MEHANIKA

Antonije Dulčić

Podaci o knjizi

Naslov:
Mehanika

Autor:
Antonije Dulčić

Ustanova:
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno matematički fakultet
Fizički odsjek

Izdanja:
2009. god., prvo interno izdanje za studente PMF-a
2012. god., drugo dopunjeno interno izdanje za studente PMF-a

Tekst s formulama napisan je u LATEX-u i pretvoren u PDF.
Za potrebe internog izdanja slike su presnimljene iz
ručnih crteža u JPG, te postavljene u LATEX.

Interna su izdanja pripremljena samo u elektroničkoj formi i
postavljena za slobodno korištenje putem Interneta.

Predgovor

Proučavanje fizike uobičajeno počinje s mehanikom budući da se kroz nju najlakše uvode temeljni pojmovi te razvijaju matematičke metode opisa i obrade pojava. Na njih se kasnije dograđuju novi pojmovi vezani uz druge grane fizike. Sadržaj mehanike već je odavna standardiziran u mnoštvu sveučilišnih udžbenika u svijetu, no način prikazivanja gradiva ipak se polako mijenjao kroz minulo stoljeće. U novije se vrijeme pokazalo da mnogi studenti imaju početnih poteškoća u usvajanju mehanike, uglavnom zbog nekih iskustveno stečenih, a pogrešno interpretiranih predodžbi i zamisli. Stoga se danas smatra korisnim svjesno otvarati ova pitanja, posvetiti dovoljno vremena da se najprije razbistre početni problemi, a tek potom uputiti na ispravno razmišljanje i rješenja.

Kaže se da je nemoguće napisati udžbenik koji bi bio po volji svim čitateljima. Razlog tome leži ponajviše u prirodnoj različitosti među ljudima. U koncipiranju ove knjige autor je posebno imao na umu one čitatelje kojima odgovara da gradivo počinje od najelementarnijih pojmova, praktički ne zahtijevajući prethodnog znanja, ali na kraju ipak dosegne veoma visoku razinu. Knjiga je također pisana tako da upućuje čitatelja na razumijevanje svakog, pa i najsitnijeg detalja jer autor smatra da učenje fizike bez razumijevanja nema nikakva smisla. Osim toga, u ljudskoj je prirodi da razumijevanje donosi osobno zadovoljstvo, pa se autor nada da će studenti to sami osjetiti.

Na nekim je mjestima u knjizi opisano nastajanje znanstvenih ideja iz prvotnih filozofskih promišljanja. Posebno se to odnosi na stvaranje pojma sile od Aristotela do Newtona. Izlaganje je moglo biti znatno kraće da je autorova namjera bila uputiti čitatelja izravno na jednadžbe kojima se zapisuju Newtonovi zakoni i zatim na formalizam primjene istih u rješavanju raznih problema. No to je upravo ono što autor nije želio učiniti. Vlastito iskustvo autora u radu sa studentima, te brojna edukacijska istraživanja provedena na američkim i europskim sveučilištima, pokazala su da uvježbavanje u formalnoj primjeni Newtonovih zakona ne osigurava razumijevanje pojma sile, a time ni pouzdano snalaženje u analizi pojedinih procesa u mehanici. Namjera je autora bila da čitatelja provede kroz proces stvaranja pojma sile, baš kao da i sam u njemu sudjeluje, te da osjeti dubinu i jednostavnost tog pojma i usvoji nepogrešivo njegovu primjenu.

Velika je pažnja u ovoj knjizi posvećena strukturiranju gradiva po poglavljima. Tako je cjelokupna kinematika okupljena u jedno poglavlje, nasuprot uobičajenoj udžbeničkoj praksi kojom se u odvojenim poglavljima izlaže gibanje tijela po pravcu, te gibanja u dvije i tri dimenzije, a kružno gibanje još u posebnom poglavlju. Dinamika je također okupljena u jedinstveno poglavlje, koje uključuje i dinamiku kružnog gibanja uz primjenu kutnih varijabli, te dinamiku sustava tijela s vanjskim i unutarnjim silama. Uvedeno je zasebno poglavlje posvećeno prirodi raznih sila. To je značajno odstupanje od dosadašnje udžbeničke prakse prema kojoj se pojedine vrste sila uvode usputno u različitim poglavljima, posvećenima uglavnom drugim temama. Obradom prirode pojedinih sila u jedinstvenome poglavlju želi se naglasiti zasebnost te teme, te ujedno uzdići njenu važnost na istu razinu na kojoj se nalazi npr. kinematika ili dinamika.

Knjiga sadrži više gradiva nego što je moguće obraditi tijekom jednog semestra. Samo prva dva poglavlja koja se odnose na kinematiku i dinamiku gibanja moraju neizostavno biti obrađena. Od sljedećih četiri poglavlja, potrebno je obraditi glavninu, a neke složenije primjere na kraju namijeniti naprednijim studentima. Ostala su poglavlja posvećena primjenama mehanike u nekim posebno važnim sustavima. Iz njih se mogu načiniti različite vrste izbora gradiva za jednosemestralni kolegij mehanike. Pojedine teme mogu biti pogodne i za obradu u individualnim studentskim seminarima. Na kraju knjige uključeno je poglavlje o relativističkoj mehanici kako bi pogled na mehaniku bio zaokružen. Ono je također potrebno kod uvođenja relativističkog pristupa u elektromagnetizmu koji se obrađuje u drugom semestru.

U metodološkom pogledu ova knjiga donosi neke nove pristupe koje je autor iskušao tijekom višegodišnjeg nastavničkog iskustva. U kinematici se najprije izlaže vektorski opis gibanja tijela, a tek se kasnije obrađuju dijagrami vremenskih ovisnosti kinematičkih veličina, što je obrnuto od dosadašnje udžbeničke prakse. Prema autorovu iskustvu, studentima je potrebno najprije dati zornu sliku općenite putanje u prostoru i vezati vektore brzina i akceleracija uz tu putanju. Iz opće slike gibanja proizlaze dijagrami vremenskih ovisnosti kinematičkih veličina za jednu ili više dimenzija. U

tom je pristupu lako razriješiti moguću konfuziju između tangente na putanju tijela i tangente na krivulju koja predstavlja vremensku ovisnost prevaljenog puta duž neke osi.

Newtonovi su zakoni gibanja predstavljeni u izvornoj formi, tj. kao aksiomi kojima se opravdanost nalazi tek *à* posteriori. Stoga je rasprava o njihovu značenju bitno složenija od one koja ih prikazuje kao izvedenicu niza eksperimenata, kako se to uobičajeno nalazi u udžbenicima. Dobitak je na kraju u boljoj spoznaji pojmova sile i mase, te uzajamnoj ovisnosti Newtonovih zakona.

Na brojnim mjestima u kinematici i dinamici preferiraju se jednadžbe s umnoškom veličina, koje se lakše fizikalno interpretiraju i shvaćaju, umjesto matematički ekvivalentnih jednadžbi s razlomkom. Također se osvješćuje razlika u pisanju definicijskih jednadžbi i onih koje iskazuju uzročno posljedičnu vezu.

Stil izlaganja u ovoj knjizi teži jednostavnosti i jasnoći. Često se u tekstu uvodi *napomena* koja je potrebna da bi studentu skrenula pažnju na neki detalj ili okolnost koja čini razmatrani slučaj različitim od nekog prijašnjeg, ili pak upozorava studenta na mogućnost pogrešnog zaključka, ili nešto slično. Na nekim se mjestima postavljaju i pitanja. Ovakav pristup čini tekst više nalik na živo predavanje koje studenti imaju prilike slušati.

Slike su koncipirane tako da na njima ne bude suvišnih detalja koji odvlače pažnju od teme koja se obrađuje. Crtane su onako kako bi to profesor na predavanju jednostavno napravio, a studenti mogli s lakoćom sami reproducirati. To se pokazuje važnim u procesu samostalnog učenja i pripremanja studenta da može drugoj osobi objašnjavati gradivo, kao što se to traži na ispitu i kasnije u praksi.

Demonstracijski pokusi koji prate predavanja nisu opisani u ovoj knjizi, iako se na mnogim mjestima može nazrijeti kakav bi pokus pritom mogao biti izveden. Živo predavanje potkrijepljeno pokusima i raspravama sa studentima ostaje nezamjenljivo u sveučilišnoj praksi.

Uz predavanja studenti pohađaju seminare i vježbe u kojima rješavaju konceptualne i numeričke zadatke. Budući da postoji niz domaćih i inozemnih zbirki zadataka i poučnika (tutorials u engl. literaturi), autor ove knjige nije smatrao potrebnim unositi takve zadatke na kraju pojedinog poglavlja, nego prepustiti odabir zbirke zadataka i poučnika nositelju seminara i vježbi, te samim studentima. Pored korištenja dobre literature, proces učenja ovisi uvelike i o interaktivnom radu nastavnika i asistenata sa studentima, te studenata međusobno.

Sadržaj

Poglavlje 1

OPIS GIBANJA TIJELA

Gibanje tijela predstavlja središnji interes mehanike. Razne vrste gibanja i uzroci koji do njih dovode tijesno su povezani. Međutim, istodobno uvođenje niza definicija koje služe za opis gibanja i objašnjavanje zakona koji utvrđuju uzroke gibanja, nije metodološki prikladno. Stoga ovo prvo poglavlje posvećujemo *kinematici* (grč. *kinema - gibanje*) koja samo opisuje gibanje, ali ne govori o uzrocima gibanja. Potonje ostavljamo za sljedeće poglavlje.

Za fizikalno opisivanje gibanja, ponajprije je potrebno utvrditi neke pojmove vezane uz gibanje i razviti odgovarajuće matematičke metode. U tu svrhu, definirat ćemo u ovome poglavlju pojmove prostora i vremena, a zatim ćemo uvesti vektorski račun, te pomoću njega definirati kinematičke veličine puta, brzine i akceleracije. U sljedećem ćemo koraku uvesti metodu grafičkog prikazivanja vremenske ovisnosti kinematičkih veličina. Među raznim vrstama gibanja tijela, posebnu važnost imaju jednoliko i jednoliko ubrzano gibanje po pravcu, te neka složena gibanja u ravnini. Za opis gibanja tijela po kružnici uvest ćemo posebne kinematičke veličine.

1.1 Prostor i vrijeme

Svako gibanje odvija se u prostoru i vremenu, pa je prije no što se pristupi opisu gibanja tijela potrebno definirati što se točno podrazumijeva pod pojmovima prostora i vremena, navesti njihova svojstva, te uvesti jedinice za mjerenja.

1.1.1 Pojam prostora

Pojam prostora preuzimamo iz običnog čovjekova shvaćanja da između dviju točaka postoji neki razmak. Ako uzimamo samo točke duž jednog pravca, govorimo o jednodimenzionalnom prostoru. U njemu se mogu opisivati neke vrste gibanja. Za opis općenitog gibanja u nekoj ravnini potreban nam je dvodimenzionalni prostor, a najsloženije gibanje odvija se u trodimenzionalnom prostoru.

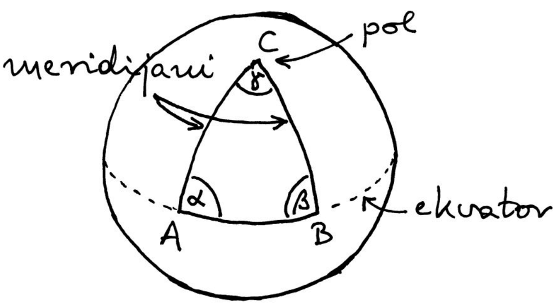
Ima li prostor neka svojstva?

Prema svakodnevnom čovjekovu iskustvu i shvaćanju, svojstva se mogu pripisati tijelima koja se nalaze u prostoru, dok se za prostor naprosto kaže da on postoji, ne pomišljajući pritom da bi mogao imati neka svojstava. Međutim, matematički opis prostora nadilazi obično čovjekovo shvaćanje. Moguće je apstraktnim razmišljanjem doći do kriterija koji definiraju razne vrste prostora, pa proučavati njihova svojstva.

Euklidov prostor. U antičko je doba znameniti grčki matematičar Euklid iz Aleksandrije napisao svoje djelo *Elementi* u kojemu se polazi od nekoliko aksioma, a zatim se iz njih dokazuju mnogi teoremi i izgrađuje struktura matematike. Prema Euklidovoj geometriji, zbroj kutova u trokutu iznosi 180^o. To možemo uzeti kao kriterij za Euklidov, odnosno *ravan prostor*. U njemu su dužine, definirane kao najkraće spojnice dviju točaka, ravne crte. Čovjekov je dojam da je prostor u kojem živimo takav da najkraću spojnicu između dviju točaka uvijek čini ravna dužina, tj. da je prostor nužno euklidski.

Da bismo uopće mogli razmišljati o nekom zakrivljenom prostoru, potrebno je malo mašte. Zamislimo tako da postoje neka bića kojima se sva zbivanja odvijaju samo na površini jedne sfere. Drugim riječima, ta bića ne znaju za radijalnu dimenziju, te su prisiljena uspostaviti geometrijska pravila na samoj površini sfere. U tim je okolnostima najkraća spojnica dviju točaka na sfernoj

plohi očito luk kružnice (izražavajući se našim euklidskim rječnikom). Da bismo mogli lakše raspravljati o ovome problemu, zamislimo jednu sferu s obilježenim polovima, meridijanima i paralelama, kao što se to radi na zemaljskoj kugli. Ako odaberemo dvije točke A i B na ekvatoru, a treću točku C na polu (slika 1.1), zbroj kutova u trokutu bit će veći od 180^o. To je uvjerljiv dokaz da zakrivljen prostor nije euklidski.

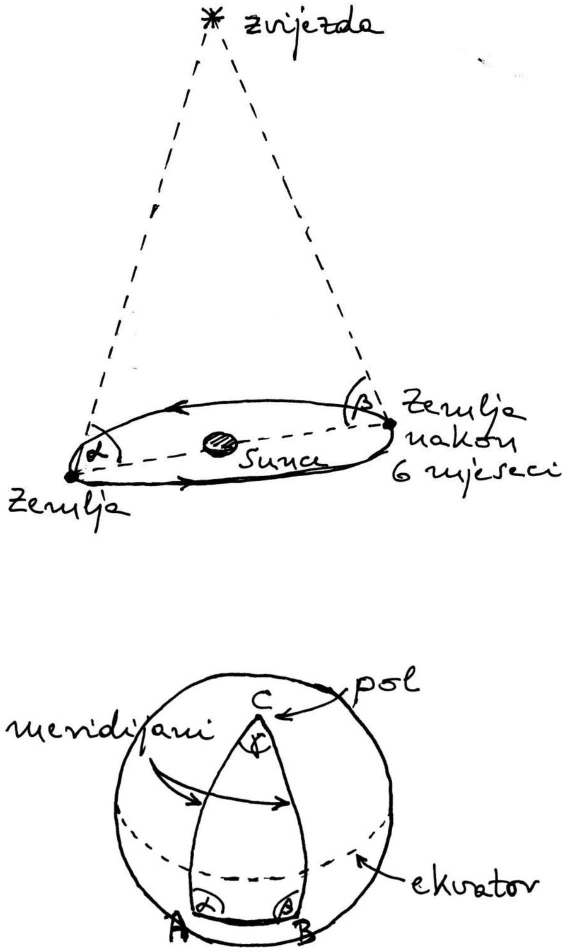


Slika 1.1: Točke A i B su na ekvatoru, a točka C je na polu. Kutovi $\alpha = \beta = 90^o$, pa je zbroj kutova u trokutu $\alpha + \beta + \gamma > 180^o$

Veliki matematičar C. F. Gauss (19.st.) postavio je pitanje našeg prostora kao eksperimentalno. Izmjerivši optičkim napravama kutove u trokutu kojemu su vrhovi bili odabrani da budu na tri međusobno udaljena brda (najdulja stranica oko 100 km), utvrdio je da nema vidljiva odstupanja od Euklidove geometrije. Točnost mjerenja je bila bolja od jedne lučne sekunde.

Eksperimentalna provjera prostora u svemirskim relacijama moguća je putem paralakse zvijezda, kako shematski prikazuje slika 1.2a. Ako je prostor ravan (euklidski), zbroj kutova $\alpha + \beta$ bit će uvijek manji od 180^o, ma koliko zvijezda bila udaljena. To je uistinu eksperimentalno utvrđeno. Granice točnosti sežu do velikih udaljenosti (oko stotinu svjetlosnih godina). Mjerenja izvršena sa satelita *Hipparcos* (1989.god.) povećala su doseg na 1600 svjetlosnih godina.

Slika 1.2b prikazuje načelnu mogućnost opažanja $\alpha + \beta > 180^o$ za dovoljno udaljenu točku u nekom zamišljenom zakrivljenom prostoru. Promatrana točka C mora biti udaljenija od radijusa zakrivljenosti prostora. Linije koja spajaju po dvije



Slika 1.2: (a) Princip mjerenja paralakse zvijezde iz dvaju položaja Zemlje nakon vremenskog intervala od pola godine. (b) Načelna mogućnost da se u zakrivljenom prostoru postigne $\alpha + \beta > 90^o$

točke uvijek su najkraće spojnice među njima, što znači da se radi o lukovima kružnica sa središtem u samome središtu sferne plohe.

Napomena: Spojnica točaka A i B nije luk na paraleli. Naime, paralela je kružnica kojoj je središte udaljeno od središta sferne plohe. Meridijan je uvijek okomit na sve paralele, ali nije općenito okomit na druge kružnice kojima se središte poklapa sa središtem same sferne plohe.

Možemo konačno zaključiti da naš prostor nije zakrivljen na skali od barem 1600 svjetlosnih godina. U svim primjerima koje ćemo obrađivati u

ovoj knjizi smatrat ćemo da je prostor potpuno euklidski.[1]

Euklidov prostor ima još dvije važne osobine, koje se u običnom govoru ne ističu, ali su nezaobilazne u strožem matematičkom razmatranju. Prva osobina je *homogenost* prostora, što znači da se prostor sam po sebi ne razlikuje od točke do točke, odnosno da je svugdje jednak. To znači da se pomakom tijela na drugo mjesto u prostoru ne mijenja njegova veličina, odnosno geometrijska svojstva. Isto tako smatramo da niti fizikalna svojstva tijela ne ovise o tome u kojem se dijelu prostora tijelo nalazi. Stoga je i fizikalni proces invarijantan na mjesto događanja, tj. na prostornu translaciju.

Druga osobina Euklidova prostora je *izotropnost.* To znači da su svi smjerovi u prostoru ravnopravni, pa tijelo ne će promijeniti svoj oblik, odnosno svoja geometrijska svojstva, ako ga se zakrene u praznom prostoru. Isto tako ne mijenjaju se ni fizikalna svojstva tijela, pa izotropnost prostora vodi na invarijantnost fizikalnog procesa prema rotacijama (misli se na konačni zakret, a ne na vrtnju).

1.1.2 Pojam vremena

Pojam vremena također preuzimamo iz običnog čovjekova iskustva. Vrijeme se veže uz niz događaja. Događaj može biti npr. dolazak nekog tijela na neko mjesto, udarac koji stvara zvuk, lom štapa, bljesak svjetlosti, itd. Ako se dva događaja nisu dogodila istodobno, onda kažemo da je između njih proteklo neko vrijeme, ili preciznije neki *interval vremena.* To je temelj za utvrđivanje pojma vremena.

Pretpostavlja se da vrijeme teče oduvijek. Stoga nije moguće odrediti apsolutni početak vremena, no to i nije bitno jer su nam za opisivanje događaja u fizici zanimljivi samo intervali vremena. Odaberemo proizvoljno neki događaj kao onaj u odnosu na koji računamo proteklo vrijeme, tj. tome događaju matematički pridružimo vrijeme $t = 0$. Tada za prethodne događaje imamo $t < 0$, a za one koji su se dogodili kasnije $t > 0$.

Također pretpostavljamo da vrijeme teče jednoliko. To pak znači da je interval vremena između dva događaja neovisan o izboru događaja za koji smo postavili da je $t = 0$.

[1] O zakrivljenosti prostora u blizini velikih gravitacijskih masa govori se u Općoj teoriji relativnosti, koja se kratko opisuje na kraju ove knjige.

1.1.3 Dimenzije fizikalnih veličina

Dimenzija fizikalne veličine označava njeno svojstvo, a ne iznos. Pojam dimenzije najlakše se može objasniti na primjerima. Temeljna veličina prostora je dužina i njenu dimenziju označavamo dogovorno simbolom [L]. Svaka dužina ima tu dimenziju, bez obzira na njenu veličinu izraženu u mjernim jedinicama. Drugim riječima, kada navedemo da neka fizikalna veličina ima dimenziju [L], znamo da se radi o dužini, a o iznosu dužine nismo se time izjasnili.

Površinu nekog pravokutnika dobivamo množenjem baze s visinom, pa je njena dimenzija $[S]=[L^2]$. Razumije se, površina bilo kojeg lika ima tu istu dimenziju. Za volumen bilo kojeg tijela imamo $[V]=[L^3]$. Dimenzije površine i volumena izvedene su iz dimenzije dužine, koja je osnovna.

Dimenzija za vrijeme, odnosno interval vremena, označava se simbolom [T]. To je također osnovna dimenzija. Svi intervali vremena imaju istu dimenziju [T], no mogu se razlikovati po iznosu. U proučavanju gibanja tijela uvodit ćemo druge fizikalne veličine koje uključuju dužinu i vrijeme, pa će njihove dimenzije biti složene.

U fizici se ponekad definiraju i veličine koje nemaju dimenziju. Radi se najčešće o omjerima dviju veličina koje imaju istu dimenziju, pa je omjer bezdimenzionalan. Jednostavniji primjer bezdimenzionalne veličine može biti omjer širine i dužine nekog tijela. Ta veličina može biti korisna u nekim razmatranjima gibanja tijela u fluidu. Primjer bezdimenzionalne veličine je i koeficijent trenja, te neke druge veličine.

Čemu koriste dimenzije fizikalnih veličina?

U rješavanju problema u fizici dolazimo do jednadžbi koje sadržavaju više fizikalnih veličina s lijeve i desne strane znaka jednakosti. Korisno je provesti *dimenzionalnu analizu* dobivene jednadžbe. Ako konačna dimenzija izraza na lijevoj strani nije jednaka dimenziji izraza na desnoj strani znaka jednakosti, možemo biti sigurni da jednadžba nije ispravna, te moramo provjeriti postupak rješavanja problema i ispraviti pogreške.

Napomena: Izraz *dimenzija* (lat. *dimensio - izmjera*) rabi se često u svakodnevnom govoru u smislu veličine nečega. Tako se npr. kaže da je

dimenzija stola veća od dimenzije knjige. Pri tome se misli da je stol veći od knjige. Također se izraz dimenzija koristi i za označavanje komponenti prostora. Za dužinu se kaže da je jednodimenzionalna, ravna ploha je dvodimenzionalna, a bilo koje tijelo je trodimenzionalno.

1.1.4 Jedinice za mjerenje fizikalnih veličina

Za svako mjerenje ili izračunavanje neke fizikalne veličine potrebno je poznavati jedinicu u kojoj se ta veličina izražava. Razlikujemo *osnovne* i *izvedene* jedinice. Osnovne se jedinice odrede dogovorno, a svaka izvedena jedinica slijedi iz jednadžbe kojom je definirana dotična fizikalna veličina. Ovo će postati jasnije navođenjem primjera.

Osnovne su jedinice utvrđene Međunarodnim sustavom jedinica za koji se upotrebljava oznaka SI (prema franc. *Système Internationale*). Ovdje ćemo navesti samo jedinice za vrijeme i dužinu jer smo te veličine pojmovno definirali. U sljedećem ćemo poglavlju definirati i pojam mase pa će tada uslijediti i opis jedinice za masu.

Jedinica za vrijeme. Jedinica za vrijeme u SI je *sekunda* (1s). U starije je doba sekunda bila definirana kao određeni dio trajanja dana. Razvojem atomske spektroskopije postalo je moguće temeljiti definiciju sekunde na jednom atomskom procesu za koji se smatra da je uvijek jednako ponovljiv jer atomska struktura nije podložna vremenskim promjenama. Od 1967. god. sekunda je definirana kao vrijeme u kojemu mikrovalno zračenje atoma cezija (^{133}Cs) izvrši 9 192 631 770 perioda titranja.

Jedinica za dužinu. Jedinica za dužinu u SI je *metar* (1m). Prvotno je metar bio definiran kao određeni dio meridijana koji prolazi kroz Pariz od sjevernoga pola do ekvatora. Kasnije je zbog veće preciznosti, a i praktičnosti, dogovoreno da se metar definira kao udaljenost između dvaju zareza urezanih na šipki načinjenoj od legure platine i iridija koja se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sevresu pokraj Pariza. Definicija metra vezana uz atomsku strukturu uvedena je 1960. god. Dogovoreno je da metar sadrži određeni broj valnih duljina narančasto crvenog zračenja atoma kriptona (^{86}Kr).

Uz odabrane definicije za metar i sekundu, obje vezane na atomsku strukturu, mogla se vrlo točno mjeriti brzina svjetlosti, no ipak je postojala neka eksperimentalna granica pouzdanosti. Budući da iz spoznaja u suvremenoj fizici slijedi da je brzina svjetlosti u vakuumu univerzalna konstanta, prevagnulo je stajalište da se njen iznos utvrdi kao potpuno pouzdana vrijednost, a to znači da se definicija metra morala tome prilagoditi. Tako je 1983. god. dogovoreno da u jednoj sekundi svjetlost prevali put od točno 299 792 485 metara. Taj dogovor znači da je 1 metar dužina koju svjetlost prevali u 1/299 792 485 sekundi.

Izvedene jedinice. Iz jednadžbe kojom se uvodi neka nova fizikalna veličina, slijedi jedinica za njeno mjerenje. To je izvedena jedinica jer se može izraziti pomoću osnovnih. Kao primjer navedimo jedinicu za mjerenje površine. Jednadžba kojom se dobiva površina pravokutnika glasi $S = ab$. Budući da su a i b dužine koje se mjere u metrima, nalazimo prema jednadžbi za površinu S da se ona mjeri u m^2. Jedinica za površinu nema posebno ime. I mnoge druge izvedene jedinice nemaju posebno ime, no neke ga ipak imaju, kao što ćemo upoznati kasnije u ovoj knjizi.

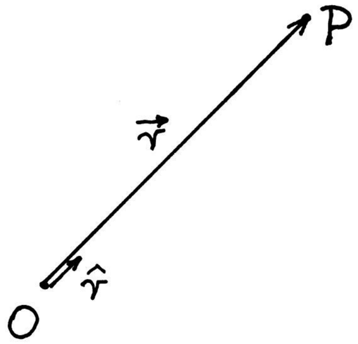
1.2 Vektorski prikaz gibanja tijela

Pojam gibanja tijela preuzimamo iz svakodnevnog života. Gibanje je pomicanje tijela iz jednog položaja u drugi tijekom vremena. Prema tome, da bismo mogli opisivati razna gibanja tijela, moramo najprije utvrditi način određivanja njegova položaja. Ovdje ćemo upotrijebiti vektorski prikaz koji se odlikuje zornošću a ujedno je i matematički elegantan, tj. sažet i pogodan za obradu.

Definicija vektora i skalara. Vektor (lat. *vector - nositelj*) je veličina koja ima iznos i smjer. U grafičkom se prikazu vektor crta usmjerenom dužinom, tj. dužinom koja ima svoj početak i kraj na kojemu nosi oznaku strelice. Skalar je veličina koja ima samo iznos, tj. ne može joj se pripisati smjer u prostoru. U fizici ćemo upoznati brojne veličine od kojih su neke vektori, a druge skalari.

1.2.1 Vektor položaja tijela

Odaberimo proizvoljno neku točku u prostoru kao ishodište O (lat. *origo - izvor*) i utvrdimo pravilo da se položaj neke točke P (lat. *punctum - točka*) određuje vektorom $\vec{r}$ kojemu je početak u ishodištu O a kraj u točki P.



Slika 1.3: Proizvoljno odabrano ishodište O, te putem vektora $\vec{r}$ utvrđen položaj točke P u odnosu prema ishodištu.

Slika 1.3 prikazuje primjer određivanja položaja jedne točke u prostoru. Svaki vektor položaja ima svoj iznos i smjer. Iznos vektora položaja predstavlja udaljenost dane točke P od ishodišta O. Razumije se, ta se veličina mjeri u metrima kao i svaka dužina. Pojam smjera vektora položaja može se izložiti pomoću običnoga govora. To je smjer kojim bi trebalo krenuti od ishodišta O da bi se došlo ravno do točke P. Međutim, takav opis nema matematičku formu koja je neophodna za primjenu u fizici. Za uvođenje matematičkog jezika potrebno je definirati neke elemente i utvrditi matematičke simbole kojima se ti elementi zapisuju. U ovome slučaju, uvodi se pojam jediničnog vektora $\hat{r}$ (čita se *er kapa*), a svrha mu je samo da određuje smjer. Njegov je iznos po definiciji jednak broju 1.

Napomena: Ovdje valja naglasiti da se iznosu jediničnog vektora ne pridružuje jedinica za mjerenje, tj. iznos jediničnog vektora $\hat{r}$ nije 1 metar nego samo bezdimenzionalan broj 1.

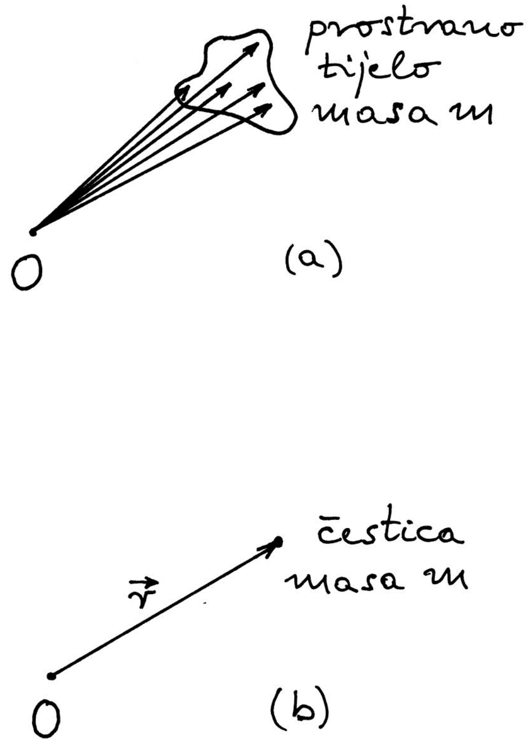
Uz te odredbe pišemo za vektor položaja

$$\vec{r} = |\vec{r}|\,\hat{r} \tag{1.1}$$

gdje $|\vec{r}|$ predstavlja oznaku za iznos (ili *modul*) vektora $\vec{r}$. Modul $|\vec{r}|$ izražava se brojem i jedinicom za mjerenje (npr. 3 metra). Zaključimo, dakle, da se položaj neke točke P određuje tako da se utvrdi modul $|\vec{r}|$ i jedinični vektor $\hat{r}$. Time utvrđujemo da se točka P nalazi na udaljenosti $|\vec{r}|$ od O i to u smjeru koji je određen jediničnim vektorom $\hat{r}$.

Čestični model

Svako makroskopsko tijelo ima neki volumen. Stoga pojedine točke toga tijela imaju različite pripadne vektore položaja. Primjer je prikazan na slici 1.4a. Očito je da položaj tijela nije moguće točno odrediti jednim jedinim vektorom. No, istodobno razmatranje mnoštva vektora predstavljalo bi ogroman problem za opis gibanja tijela, te ne bi pridonijelo stvaranju jednostavnih, ali općenitih, zaključaka kojima težimo.



Slika 1.4: (a) Vektori položaja nekoliko točaka prostranog tijela mase m. (b)Tijelo mase m predstavljeno u čestičnom modelu.

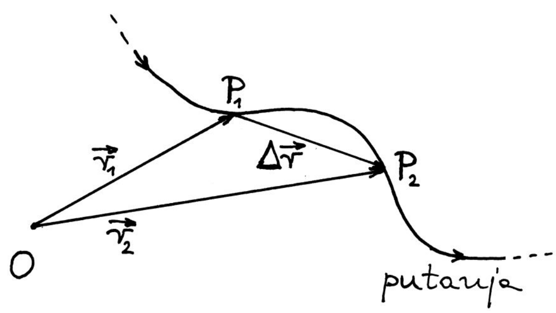
Vrlo često promatramo gibanje tijela u kojemu se sve njegove točke jednako pomiču u prostoru, tj. nema rotacije tijela oko neke osi. U tome je slučaju dovoljno promatrati gibanje samo jedne točke toga tijela i time upoznati gibanje svih ostalih točaka, tj. cijeloga tijela. Također, ako promatramo tijelo koje na svome putu prevaljuje udaljenosti mnogo veće nego što je veličina samoga tijela, npr. automobil na kilometarski dugačkoj cesti, sasvim nam je zadovoljavajuće smatrati da je položaj tijela u danome trenutku dobro određen jednim jedinim vektorom. Time dolazimo do *čestičnog modela.* Zamišljamo kao da je cijelo tijelo koncentrirano oko jedne točke tako da mu je veličina zanemariva u odnosu prema drugim promatranim udaljenostima. Takvu zamišljenu tvorevinu nazivamo *česticom.* Na slici 1.4b prikazan je čestični model kojim možemo nadomjestiti realnu situaciju iz slike 1.4a.

Općenito o modelu u fizici. U fizici se često javlja potreba da se realni sustav, koji može biti kompliciran, zamijeni pojednostavljenim sustavom u svrhu izvedive matematičke obrade. Tada govorimo o *modelu.* Model je uspješan ukoliko dobro opisuje glavne osobine realnog sustava a zanemaruje samo sporedne detalje koji bi inače učinili analizu realnoga sustava praktički nemogućom. U gornjem slučaju čestičnoga modela, zanemaren je samo stvarni volumen tijela, ali ne i druge osobine tijela. Poglavito se to odnosi na masu tijela, veličinu koju ćemo definirati i pobliže upoznati u sljedećem poglavlju, ali ovdje je ipak moramo spomenuti radi izbjegavanja pogrešnih zaključaka. Smatramo, dakle, da zamišljena čestica kojom nadomiještamo tijelo ima jednaku masu kao i samo tijelo.

Napomena: Izraz *model* upotrebljava se često u običnome govoru, ali s drugim značenjem nego u fizici. Ako se govori npr. o modelu broda, onda se misli na predmet koji nalikuje pravome brodu, ali je znatno umanjen, te nema ni izdaleka ista svojstva kao i pravi brod. U trgovini se govori o novim modelima nekog proizvoda. U drugim se prilikama govori o fotomodelima, itd.

1.2.2 Putanja tijela

Već je spomenuto da na gibanje tijela gledamo kao na promjenu njegova položaja u prostoru tijekom vremena. Uzastopni slijed položaja tijela opisuje krivulju koju nazivamo *putanjom* (ili *trajektorijom*) tijela. Na slici 1.5 prikazana je putanja tijela u nekom gibanju s time da je tijelo predstavljeno u čestičnome modelu. Kako se tijelo giba po putanji, tako se i vektor položaja $\vec{r}$ mijenja u vremenu, tj. imamo funkciju $\vec{r}(t)$. Na slici 1.5 prikazana je putanja tijela, odnosno funkcija $\vec{r}(t)$, te na njoj dva položaja tijela. Kada želimo označiti neki *određeni* položaj, onda to činimo tako da vektor položaja obilježimo indeksom koji ukazuje na pripadnost tome položaju. Uobičajeno je da prikaz poput onoga na slici 1.5 tumačimo na sljedeći način. Tijelo se gibalo po putanji i u trenutku t_1 bilo je u točki P_1 koja je određena vektorom položaja $\vec{r}_1$. U trenutku t_2 tijelo je stiglo u točku P_2, tj. imalo je položaj određen vektorom $\vec{r}_2$. Mogli bismo dalje nastaviti s prikazom proizvoljnog broja točaka, no to ne bi bitno unaprijedilo razumijevanje smisla funkcije $\vec{r}(t)$, a unijelo bi nepotrebnu grafičku složenost u sliku 1.5.



Slika 1.5: Proizvoljna putanja tijela (čestice). Naznačene su dvije točke na putanji i odgovarajući vektor pomaka $\Delta\vec{r}$.

Pored vektora položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, na slici 1.5 ucrtan je još jedan vektor. Njegov početak je u točki P_1, a kraj u točki P_2 i označen je kao $\Delta\vec{r}$. To je *vektor pomaka* tijela iz točke P_1 u točku P_2. Možemo sada logički zaključivati na sljedeći način. Zamislimo da iz ishodišta O idemo prema točki P_1 po vektoru $\vec{r}_1$, a zatim se još pomaknemo od P_1 do P_2 po vektoru $\Delta\vec{r}$. Time bismo došli na isto mjesto kao i da smo odmah išli od ishodišta O do točke P_2 po vektoru $\vec{r}_2$. Stoga možemo pisati jednakost

$$\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 \tag{1.2}$$

Ovu jednadžbu možemo shvatiti kao opis promjene vektora položaja tijela $\vec{r}$ u intervalu vremena od t_1 do t_2. Vektor položaja tijela $\vec{r}$ imao je početnu vrijednost $\vec{r}_1$, a konačna mu je vrijednost $\vec{r}_2$. Promjena vektora $\vec{r}$ označena je s $\Delta\vec{r}$. U skladu s time, jednadžba (1.2) nam kaže da ako početnoj vrijednosti vektora položaja dodamo njegovu promjenu, dobivamo konačnu vrijednost.

Napomena: Simbol Δ (veliko grč. slovo *delta*) često se u fizici upotrebljava za označavanje promjene neke fizikalne veličine i piše se ispred simbola za tu fizikalnu veličinu. U gornjem je primjeru pogrešno shvatiti $\Delta\vec{r}$ kao umnožak Δ i $\vec{r}$. Simbol Δ nije zasebna veličina, nego samo označava promjenu veličine koja slijedi.

Gornje tumačenje vektora $\Delta\vec{r}$ možemo još upotpuniti ako preinačimo jednadžbu (1.2) i napišemo je u obliku

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.3}$$

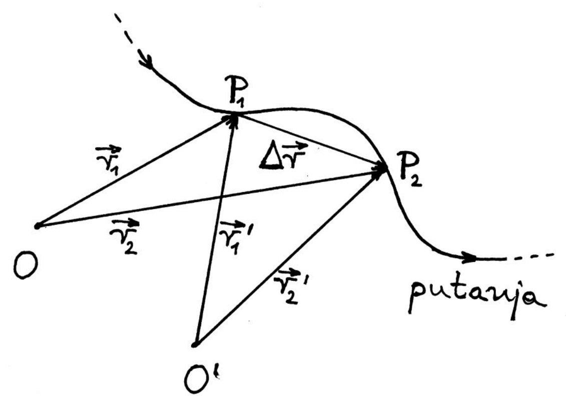
Uistinu vidimo da vektor $\Delta\vec{r}$ predstavlja promjenu vektora $\vec{r}$ jer je jednak razlici konačne vrijednosti $\vec{r}_2$ i početne vrijednosti $\vec{r}_1$.

Jednadžba (1.2) nam može poslužiti da bismo mogli na slici 1.5 uočiti pravilo za *grafičko zbrajanje vektora.* Ako se na kraju prvoga vektora ($\vec{r}_1$) nalazi početak drugoga ($\Delta\vec{r}$), njihov zbroj ($\vec{r}_2$) je vektor koji ide od početka prvoga do kraja drugog vektora.

Isto tako, iz slike 1.5 i jednadžbe (1.3) nalazimo pravilo za *grafičko odbijanje vektora.* Razliku vektora dobivamo tako da postavimo njihove početke u istu točku, te spojimo njihove krajeve s time da rezultirajući vektor ima smjer prema vektoru *od kojega se odbija.* U ovome primjeru, rezultat $\Delta\vec{r}$ ima smjer prema vrhu vektora $\vec{r}_2$.

Promjena ishodišta. Razmatranje o vektoru pomaka i putanji tijela proveli smo uz neki proizvoljno odabran izbor ishodišta O. Postavlja se pitanje što se mijenja ako neku drugu točku odaberemo za ishodište. Vektorski opis gibanja tijela bio bi beskoristan kada bi se mijenjao u ovisnosti o izboru ishodišta.

Vektor položaja bilo koje točke očito ne ovisi samo o toj točki, nego i o izboru ishodišta. Na slici 1.6 prikazana su dva izbora za ishodište, O i O'. Točka P_1 je određena vektorom položaja $\vec{r}_1$ s obzirom na O, te vektorom položaja $\vec{r}_1'$ s obzirom na O'. Analogno vrijedi za točku P_2 i vektore $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_2'$. Međutim, vektor pomaka od točke P_1 do točke P_2 ostaje nepromijenjen



Slika 1.6: Položaji točaka P_1 i P_2 u odnosu prema dvama proizvoljno odabranim ishodištima O i O'. Vektor pomaka $\Delta\vec{r}$ ne ovisi o izboru ishodišta.

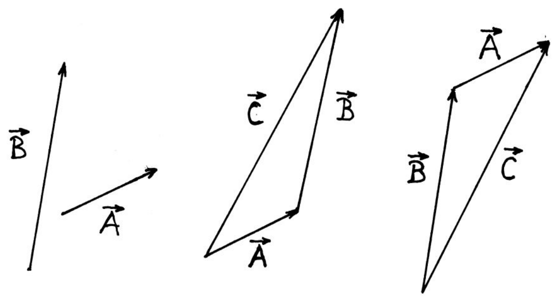
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \tag{1.4}$$

Budući da putanja tijela nastaje nizom uzastopnih pomaka tijela, zaključujemo da nam opis gibanja ne će ovisiti o izboru ishodišta.

Općenito o vektorima i vektorskim operacijama

Primjer s vektorima položaja i vektorom pomaka na slici 1.5 i jednadžbama (1.2) i (1.3) slijedi logiku koja odgovara običnim ljudskim shvaćanjima o pomicanju u prostoru. U fizici ćemo uvesti još mnoge druge vektorske veličine, koje ne opisuju pomake u prostoru, a potrebno ih je ponekad zbrajati ili odbijati. Stoga nam je korisno definirati općenita pravila za vektore i vektorske operacije.

U matematici se uvode vektori kao bezdimenzionalne veličine, tj. modul vektora je neki broj. Za njih se utvrđuju pravila po kojima se izvode neke matematičke operacije. Ovdje ćemo se osvrnuti ukratko samo na operacije zbrajanja i odbijanja vektora, te na operaciju množenja vektora skalarom. Ta se pravila primjenjuju i za sve vektorske veličine u fizici. Ostale vektorske operacije upoznat ćemo kada za njih dođe motivacija iz fizikalnog problema.



Slika 1.7: Postupci translacije i zbrajanja vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ u rezultantni vektor $\vec{C}$. Na slikama se također mogu uočiti postupci odbijanja vektora $\vec{C}-\vec{A}$, odnosno $\vec{C}-\vec{B}$.

Na slici 1.7 prikazana su dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ kao matematički elementi. Za njih je bitno da imaju iznos i smjer, a nije bitno gdje im je postavljena početna točka jer oni ne predstavljaju nešto određeno u fizikalnom smislu, npr. nisu pripisani nekim tijelima koja imaju određene položaje. Stoga vektor smijemo translatirati (lat. *translatio - prijenos*) tako da mu ne promijenimo ni iznos ni smjer, te smatrati da se i nakon translacije radi o istome vektoru.

Zbrajanje vektora $(\vec{A}+\vec{B})$ definira se na sljedeći način. Translatirajmo prema potrebi vektore tako da na kraj prvoga vektora $(\vec{A})$ postavimo početak drugoga vektora $(\vec{B})$. Rezultat zbrajanja je vektor $\vec{C}$ koji počinje od početka prvoga vektora, a završava na kraju drugoga vektora. Na slici 1.7 prikazan je postupak zbrajanja vektora

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \tag{1.5}$$

Rezultantni vektor $\vec{C}$ možemo prema potrebi translatirati tako da mu ishodište bude u bilo kojoj točki prostora. Kod zbrajanja vektora vrijedi pravilo komutacije (lat. *commutare - preokrenuti*), tj. možemo preokrenuti redoslijed vektora koje zbrajamo i dobiti isti rezultat $(\vec{B}+\vec{A}=\vec{C})$. To je lako pokazati putem konstrukcije na slici 1.7. Geometrijski dokaz o jednakosti dvaju postupaka zbrajanja vektora nalazimo također na slici 1.7. Zbog dozvoljene translacije vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, možemo složiti paralelogram tako da rezultantni vektor $\vec{C}$ bude dijagonala paralelograma.

Iz jednadžbe (1.5) možemo dobiti razliku vektora

$$\vec{B}=\vec{C}-\vec{A} \tag{1.6}$$

Pogledom na sliku 1.7 možemo zaključiti da se razlika vektora $\vec{C}-\vec{A}$ dobiva tako da početke obaju vektora dovedemo u istu točku. Razliku tih vektora čini vektor $\vec{B}$ koji spaja vrhove vektora $\vec{A}$ i $\vec{C}$ i usmjeren je prema vrhu vektora *od kojega se odbija*, tj. prema vrhu vektora $\vec{C}$.

Isto tako možemo iz jednadžbe (1.5) dobiti i drugu razliku vektora

$$\vec{A}=\vec{C}-\vec{B} \tag{1.7}$$

Na slici 1.7 prikazan je i slučaj kada su počeci vektora $\vec{B}$ i $\vec{C}$ u istoj točki a rezultantni vektor $\vec{A}$ spaja njihove vrhove i usmjeren je prema vrhu vektora *od kojega se odbija.*

Množenje vektora skalarom podrazumijeva da se njegov modul pomnoži tim skalarom. Ako je skalar pozitivan broj, smjer vektora se ne mijenja, a ako je skalar negativan broj, smjer vektora se promijeni u suprotan, tj. za 180^o. Množenje vektora $\vec{A}$ skalarom k pišemo

$$\vec{A}\,'=k\vec{A} \tag{1.8}$$

pri čemu je $|\vec{A}\,'|=|k||\vec{A}|$, dok je smjer vektora $\vec{A}\,'$ ovisan o predznaku skalara k. Napomenimo da se dijeljenje vektora skalarom k svodi na njegovo množenje skalarom $1/k$.

Vrijede li ova pravila i za vektore u fizici?

U fizici ćemo sresti mnoge vektorske veličine. Na njih se primjenjuju iste operacije kao i s vektorima u matematici. Međutim, moramo uvijek imati na umu da svaka fizikalna veličina ima određeno značenje, pa su moduli tih vektora izraženi u odgovarajućim mjernim jedinicama. Stoga je zbrajanje i oduzimanje smisleno samo s vektorima koji predstavljaju *istovrsne* veličine u fizici.

Moramo također biti oprezni s translacijama vektora u fizici. Translacije tih vektora možemo učiniti u sklopu pomoćne operacije kako bi se negdje sa strane crteža dobio rezultat zbrajanja ili odbijanja. Međutim, treba znati koje je fizikalno značenje dobivenog rezultantnog vektora, te ga naknadnom translacijom postaviti na mjesto koje mu pripada. To će postati jasnije iz brojnih primjera koji slijede u ovome poglavlju.

Množenje vektora skalarima pojavljuje se često u fizici. Pri tome vodimo računa o tome da i skalar može biti veličina koja ima dimenziju, te se izražava u nekim mjernim jedinicama. Tada rezultantni vektor predstavlja sasvim drugu fizikalnu veličinu. Njegov se modul izražava u jedinicama koje su umnožak jedinica skalara i vektora koji se množe. I ovo će postati jasnije na primjerima.

1.2.3 Brzina

Izraz *brzina* upotrebljava se u svakodnevnom govoru i svi imaju dojam da znaju o čemu se radi. Ako netko hoda brže, prije će stići do odredišta. Isto vrijedi za vožnju automobila i drugih prometnih vozila. Prosječna se brzina izračunava kao omjer prevaljenog puta i intervala vremena koji je za to bio potreban. Međutim, isto tako svi znaju da automobil u praksi vozi malo brže, pa malo sporije, itd., pa prosječna brzina nije jedino mjerilo gibanja.

U fizici je pojam brzine detaljnije razrađen. Poslužimo se opet vektorskim prikazom za opis gibanja tijela. Na slici 1.8a prikazana je putanja nekog tijela. Čim prikazujemo stvarnu putanju tijela, znači da su nam poznate sve točke kroz koje je tijelo prošlo. Također pretpostavimo da su nam poznati i vremenski trenuci kada je tijelo prolazilo kroz svaku od tih točaka.

Srednja brzina

Analizirajmo gibanje tijela od točke A do točke B. Ako za računanje uzmemo samo podatke o tim dvama položajima i vremenskim trenucima t_A i t_B kada je tijelo prolazilo kroz svaki od njih, možemo jedino reći da je tijelo doživjelo pomak $\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ u intervalu vremena $\Delta t_{AB} = t_B - t_A$. To je oskudna informacija koja nam ne govori o stvarnom kretanju tijela po zakrivljenoj putanji. No pokušajmo je ipak analizirati, a tek kasnije uključiti više podataka iz kojih slijedi poboljšan opis gibanja. Definirajmo srednju brzinu (lat. *velocitas - brzina*) na putu od A do B omjerom

$$\bar{\vec{v}}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t_{AB}} \tag{1.9}$$

Crta iznad simbola za vektor brzine predstavlja uobičajenu oznaku za srednju vrijednost. Za razliku od vektora pomaka $\Delta\vec{r}_{AB}$ koji ima iznos i smjer, vremenski interval Δt_{AB} ima iznos ali nema smjera u prostoru, pa spada u skalare. Prema tome, brzina $\bar{\vec{v}}_{AB}$ određena je gornjom jednadžbom kao omjer jednoga vektora i skalara. Smatramo da je tijelo prošlo kroz točku B u kasnijem trenutku, pa je $t_B > t_A$, odnosno skalar Δt_{AB} je pozitivan. Stoga vektor srednje brzine $\bar{\vec{v}}_{AB}$ ima isti smjer kao i vektor pomaka $\Delta\vec{r}_{AB}$. Modul vektora srednje brzine $|\bar{\vec{v}}_{AB}|$ jednak je omjeru modula $|\Delta\vec{r}_{AB}|$ i skalara Δt_{AB}. Budući da se modul $|\Delta\vec{r}_{AB}|$ izražava u metrima, a skalar Δt_{AB} u sekundama, to se modul $|\bar{\vec{v}}_{AB}|$ izražava u jedinicama metar/sekunda (ms^{-1}). Vektor srednje brzine prikazan je na slici 1.8a.

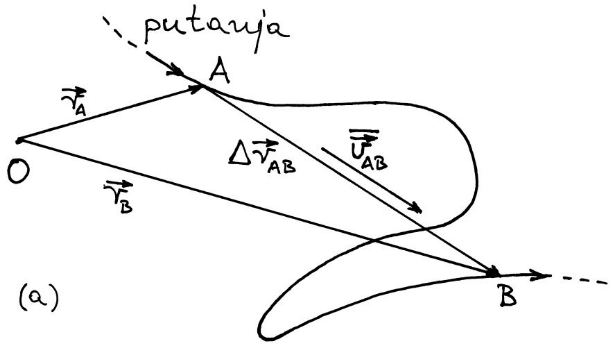
Napomena: Vektor pomaka $\Delta\vec{r}_{AB}$ uistinu se proteže od točke A do točke B kako je prikazano na slici 1.8a. Njegov je modul jednak udaljenosti tih dviju točaka i mjeri se u metrima. Vektor brzine je pak superponiran (lat. *superponere - postaviti preko nečega*) na prostornu sliku, a usmjerena dužina, kojom je prikazan na slici, nema značenje udaljenosti između dviju točaka. Kod crtanja vektora brzine, podrazumijeva se da imamo dogovoreno mjerilo po kojemu npr. 1cm usmjerene dužine na slici odgovara nekom iznosu brzine u ms^{-1}.

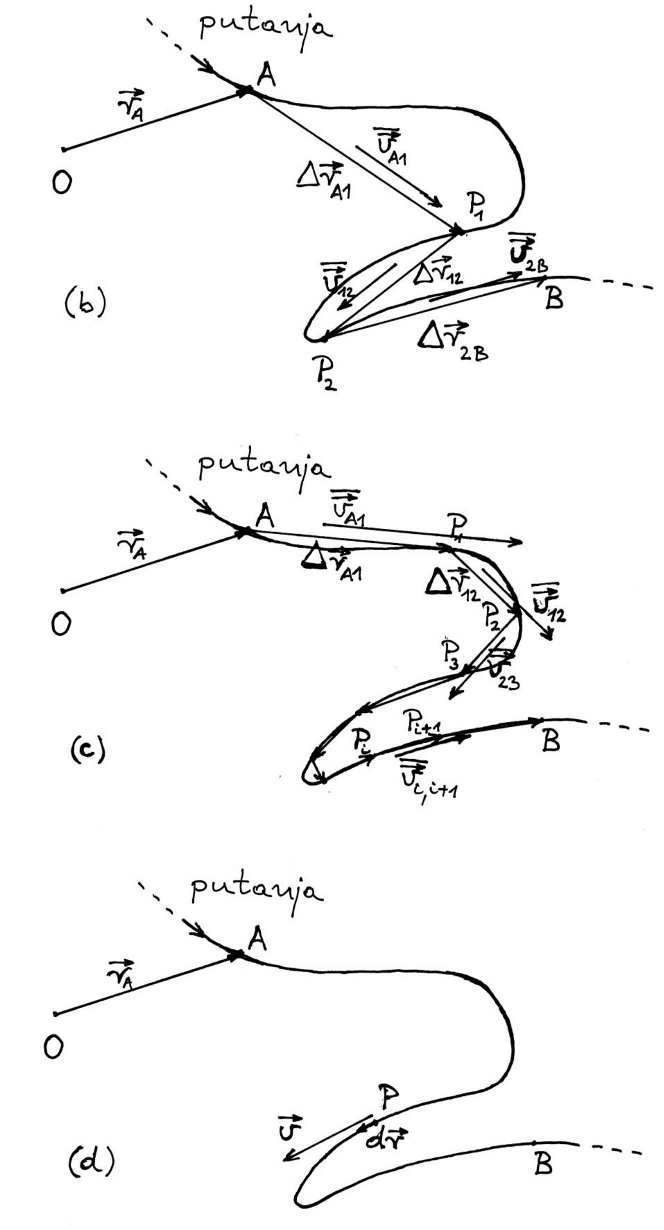
Srednja brzina definirana jednadžbom (1.9) kaže nam da bi tijelo stiglo iz točke A u točku B kada bi se neprekidno gibalo istom brzinom $\bar{\vec{v}}_{AB}$ u intervalu vremena Δt_{AB}. Drugim riječima, srednju brzinu pripisujemo gibanju tijela na cijelome putu $\Delta\vec{r}_{AB}$.

Korisno je jednadžbu (1.9) napisati na drugi način

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \bar{\vec{v}}_{AB}\,\Delta t_{AB} \tag{1.10}$$

Čitajući fizikalno ovu jednadžbu kažemo da tijelo koje se giba stalnom brzinom $\bar{\vec{v}}_{AB}$ u vremenskom intervalu Δt_{AB} prevali put $\Delta\vec{r}_{AB}$.





Slika 1.8: (a) Tijelo je bilo u točki A u trenutku t_A, te kasnije u trenutku t_B u točki B. Uzimajući samo te podatke, slijedi spoznaja o $\bar{\vec{v}}_{AB}$. (b) Kada se uzmu podaci u intervalima $\Delta t = (t_A - t_B)/3$, dobiva se nešto bolji opis gibanja. (c) Za $\Delta t = (t_A - t_B)/9$ opis gibanja je već dosta dobar, osim na jako zakrivljenim dijelovima putanje. (d) U graničnom slučaju, u infinitezimalnom intervalu dt, čestica se pomakne za $d\vec{r}$, a njeno gibanje ima trenutnu brzinu $\vec{v}$ kojom prolazi kroz točku P.

Napomena: Jednadžba (1.9) napisana je kao definicija za $\bar{\vec{v}}_{AB}$. Za razliku od toga, jednadžba (1.10) napisana je kao odnos uzroka i posljedice. Posljedica se piše s lijeve strane znaka jednakosti. U ovome je slučaju posljedica prevaljen put $\Delta\vec{r}_{AB}$. Ona je nastala zato što je tijelo imalo stalnu brzinu $\bar{\vec{v}}_{AB}$ u vremenskom intervalu Δt_{AB}. Potonje je uzrok koji se piše s desne strane znaka jednakosti. Slično imamo kod bilo koje matematičke funkcije $y = f(x)$, gdje smatramo da je x nezavisna varijabla, a y je ovisna varijabla koja poprima odgovarajuće vrijednosti u ovisnosti o odabiru raznih vrijednosti za x. S ovim ćemo se načinom razmišljanja sretati često u ovoj knjizi.

Kako možemo poboljšavati opis gibanja tijela?

Gornji je opis gibanja tijela načinjen na temelju podataka o prolasku tijela kroz dvije točke A i B. On je neprecizan zbog dva razloga. Prvi je taj što stvarna putanja tijela nije ravna crta od točke A do B, nego znatno krivuda. Stoga vektor pomaka $\Delta\vec{r}_{AB}$ ne predstavlja ni izdaleka dobro stvaran put, kao što se i vidi na slici 1.8a. Drugi razlog nije uočljiv na slici 1.8a, a potječe od mogućeg nejednolikog gibanja tijela, tj. od toga da se tijelo možda gibalo malo brže, pa malo sporije, pa opet brže, itd. Radi detaljnijeg upoznavanja gibanja tijela potrebno je uvesti više podataka. To znači da moramo uzeti u razmatranje i položaje tijela u još nekim trenucima unutar vremenskog intervala Δt_{AB}. Mogli bismo odabrati nasumično neke trenutke, no odlučimo se na jednu pravilnost. Podijelimo vremenski interval Δt_{AB} na N jednakih dijelova i označimo dobivene manje intervale s Δt, pa imamo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{AB}}{N} \tag{1.11}$$

Na slici 1.8b prikazan je slučaj za $N = 3$. Uzimamo, dakle, u račun podatke za još dvije točke, P_1 i P_2, kroz koje je tijelo prolazilo nakon uzastopnih vremenskih intervala Δt na putu od A do B. Odmah možemo uočiti da je izlomljen put od točke A preko P_1 i P_2 do točke B nešto bliži stvarnoj putanji nego ravan put od A do B.

S ovim podacima možemo načiniti tri vektora pomaka $\Delta\vec{r}_{A1}$, $\Delta\vec{r}_{12}$ i $\Delta\vec{r}_{2B}$. Oni se međusobno razlikuju po iznosu i smjeru, pa dobivamo tri različite srednje brzine

$$\bar{\vec{v}}_{A1} = \frac{\Delta\vec{r}_{A1}}{\Delta t} \quad , \quad \bar{\vec{v}}_{12} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t}$$
$$\bar{\vec{v}}_{2B} = \frac{\Delta\vec{r}_{2B}}{\Delta t} \tag{1.12}$$

Iz ove jednadžbe slijedi da svaka srednja brzina ima smjer koji odgovara pripadnome vektoru pomaka, pa su tako prikazane na slici 1.8b. Moduli pojedinih vektora srednje brzine u međusobnim su omjerima kao i moduli pripadnih vektora pomaka zato jer smo odabrali jedan te isti vremenski interval Δt s kojim se obavlja dijeljenje u jednadžbi (1.12). Možemo uočiti da su na slici 1.8b vektori brzina prikazani usmjerenim dužinama koje se po veličinama međusobno odnose kao i vektori pomaka.

Napomena: Ako na slici imamo samo jedan vektor brzine, kao npr. na slici 1.8a, onda ga možemo prikazati usmjerenom dužinom proizvoljne veličine, jer smo se time odlučili za neko mjerilo. Međutim, ako imamo više vektora brzine, kao na slici 1.8b, moramo paziti da usmjerene dužine budu međusobno u ispravnim proporcijama, jer se podrazumijeva da za sve vektore brzina na slici vrijedi isto mjerilo.

Jednadžbu (1.12) možemo napisati alternativno u obliku

$$\Delta\vec{r}_{A1} = \bar{\vec{v}}_{A1}\,\Delta t \quad , \quad \Delta\vec{r}_{12} = \bar{\vec{v}}_{12}\,\Delta t$$
$$\Delta\vec{r}_{2B} = \bar{\vec{v}}_{2B}\,\Delta t \tag{1.13}$$

Analogno fizikalnoj interpretaciji jednadžbe (1.10), možemo reći da svaki od vektora pomaka u jednadžbi (1.13) predstavlja put koji je tijelo prevalilo zato što se gibalo odgovarajućom srednjom brzinom u vremenskom intervalu Δt. Smjer vektora pomaka je uvijek određen smjerom pripadne srednje brzine, tj. tijelo prevaljuje put u smjeru u kojem je njegova brzina.

Uzmimo u razmatranje još više podataka o gibanju tijela. Stavimo $N = 9$ u jednadžbi (1.11). Slika 1.8c prikazuje opet istu putanju tijela, ali s većim brojem točaka. One označavaju položaje tijela nakon uzastopnih vremenskih intervala Δt, koji su tri puta kraći od onih u slici 1.8b. Uz povećan broj točaka, izlomljen put od točke A do točke B mnogo je bliži stvarnoj putanji tijela. Veća odstupanja javljaju se tamo gdje je putanja jače zakrivljena između uzastopnih točaka. Na slici 1.8c također lako uočavamo dijelove puta gdje se tijelo gibalo brže i one gdje se gibalo sporije. Budući da su svi vremenski intervali između uzastopnih položaja jednaki, tijelo se gibalo brže tamo gdje je prevaljen put između susjednih točaka veći, a sporije tamo gdje je prevaljen put manji, tj. tamo gdje su točke bliže jedna drugoj. Matematički to izražavamo nizom srednjih brzina

$$\bar{\vec{v}}_{A1} = \frac{\Delta\vec{r}_{A1}}{\Delta t} \quad , \quad \bar{\vec{v}}_{12} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t} \quad , \ \ldots$$
$$\bar{\vec{v}}_{i,i+1} = \frac{\Delta\vec{r}_{i,i+1}}{\Delta t} \quad , \ \ldots \tag{1.14}$$

gdje indeks i označava neku točku P_i, a $i+1$ označava sljedeću točku P_{i+1}. Vektori srednjih brzina prikazani su na slici 1.8c. Svaki vektor srednje brzine ima smjer pripadnog vektora pomaka, pa uočavamo kako brzina tijela mijenja smjer na putu od točke A do B. Mijenja se i iznos brzine u skladu s promjenama modula vektora pomaka, budući da je vremenski interval Δt u jednadžbi (1.14) jednak za sve pomake.

Smanjuju li se svi vektori kada povećavamo broj N?

Slike 1.8b i 1.8c prikazuju istu putanju tijela, pa smijemo uspoređivati veličine u njima. Vektori pomaka u slici 1.8c znatno su manji od onih u slici 1.8b. Međutim, vektori brzina na slici 1.8c *nisu* u istoj proporciji manji od onih na slici 1.8b. To je zato što su kod omjera u jednadžbi (1.14) smanjeni ne samo vektori pomaka $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$ u brojniku, nego i vremenski interval Δt u nazivniku, u usporedbi s onima u jednadžbi (1.12). Do istoga zaključka možemo doći i ako jednadžbu (1.14) napišemo u obliku

$$\Delta\vec{r}_{A1} = \bar{\vec{v}}_{A1}\,\Delta t \quad , \quad \Delta\vec{r}_{12} = \bar{\vec{v}}_{12}\,\Delta t \quad , \ \ldots$$
$$\Delta\vec{r}_{i,i+1} = \bar{\vec{v}}_{i,i+1}\,\Delta t \quad , \ \ldots \tag{1.15}$$

Smanjivanjem vremenskog intervala Δt ne moraju se proporcionalno smanjivati brzine, nego se smanjuju vektori pomaka.

Napomena: Na slici 1.8c možemo vidjeti da se vrh vektora srednje brzine nalazi u području sljedećeg vektora pomaka. To međutim ne

znači da se srednja brzina nekako povezuje s oba vektora pomaka. Duljina nacrtanog vektora samo ukazuje na iznos brzine u ms^{-1}. Cijeli taj iznos pripisuje se tijelu koje se giba i to obilježavamo tako da *početak* vektora srednje brzine postavimo negdje pokraj onog dijela puta na kojemu je tijelo imalo tu brzinu.

Trenutna brzina

Primjeri koji su prikazani na slikama 1.8b i 1.8c jasno ukazuju na mogući daljnji postupak i rezultate koji bi uslijedili. Daljnjim smanjivanjem vremenskog intervala (veći N u jednadžbi (1.11)) dobili bismo još veći broj točaka na putanji od A do B. To nam daje još veći broj podataka za opis gibanja tijela, pa prikaz postaje sve bliži stvarnome gibanju. S dovoljno gustim točkama položaja tijela, djelić stvarne putanje između susjednih točaka gotovo se ne razlikuje od ravne crte koju čini pripadni vektor pomaka. Također, susjedni vektori pomaka tek se neznatno razlikuju jedan od drugoga, što znači da se i pripadne srednje brzine međusobno malo razlikuju. Treba proći kroz puno točaka da se srednja brzina značajnije promijeni, bilo po iznosu, ili smjeru, ili oboje.

Upravo opisani postupak vodi nas na matematički pojam *derivacije* (lat. *derivatio - izvođenje*). Ako smanjujemo vremenski interval Δt tako da povećavamo N u jednadžbi (1.11) prema beskonačnosti ($N \to \infty$), kažemo da on postaje *diferencijal vremena dt* (čita se *de te*). Izraz *diferencijal* upotrebljava se inače za infinitezimalnu (franc. *infinitesime - beskonačno malen*) razliku. Odaberimo sada neku točku P (izostavljamo indeks i) na putanji tijela i označimo s $\Delta\vec{r}$ vektor pomaka koji počinje od te točke, te s $\bar{\vec{v}}$ vektor srednje brzine na putu $\Delta\vec{r}$. Ako se vremenski interval smanjuje i postaje diferencijal dt, onda se i $\Delta\vec{r}$ smanjuje, te postaje diferencijal $d\vec{r}$ (čita se *de er*). Pripadna srednja brzina teži prema omjeru $d\vec{r}/dt$ (čita se *de er po de te*). Tom se brzinom tijelo giba na beskonačno malenome putu $d\vec{r}$, pa možemo reći da ona predstavlja brzinu kojom tijelo prolazi kroz odabranu točku P, a nazivamo je *trenutnom brzinom* i označavamo s $\vec{v}$. Možemo napisati:

$$\begin{aligned} \Delta t &\to dt \\ \Delta\vec{r} &\to d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.16}$$

Matematičkim jezikom se kaže da je trenutna brzina $\vec{v}$ jednaka vektorskoj derivaciji puta po vremenu. O derivacijama se više uči u matematici, no ovdje je važno upamtiti da se sadržaj izraza "vektorska derivacija puta po vremenu" svodi na omjer diferencijala $d\vec{r}$ i dt. Zorni prikaz dan je na slici 1.8d.

Napomena: Na slici bi uvijek trebalo crtati vektor pomaka $\Delta\vec{r}$ koji ima neku konačnu dužinu. Beskonačno maleni pomak $d\vec{r}$ nije moguće nacrtati tako da bude uočljiv. Međutim, korisno je voditi raspravu upotrebljavajući diferencijalne veličine, pa ih na slikama i prikazujemo, ali tako kao da imaju konačnu veličinu. Pri tome znamo da npr. vektor $d\vec{r}$ na slici 1.8d nema uistinu dužinu kojom je prikazan, ali ima taj smjer.

Prema jednadžbi (1.16), omjer diferencijalnih veličina $d\vec{r}$ i dt *nije* beskonačno malena veličina, nego konačna vrijednost $\vec{v}$. To je vrijednost prema kojoj teži srednja brzina $\bar{\vec{v}}$ kada se smanjuju Δt i $\Delta\vec{r}$. Ovaj odnos postaje još jasniji ako jednadžbu (1.16) napišemo u obliku

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt \tag{1.17}$$

Time što interval vremena postaje beskonačno malena veličina dt, ne smanjuje se brzina $\vec{v}$, nego prevaljeni put $d\vec{r}$.

Trenutna brzina $\vec{v}$ odnosi se na prolazak tijela kroz točku P, pa u grafičkom prikazu na slici 1.8d stavljamo početak vektora brzine u točku P, ili dogovorno pokraj nje. Uočimo iz jednadžbe (1.17) da vektor $\vec{v}$ ima smjer kao $d\vec{r}$. Budući da vektor $d\vec{r}$ predstavlja djelić putanje tijela, on nužno leži na pravcu koji je tangenta na putanju u točki P. Stoga nalazimo važan zaključak da je i trenutna brzina uvijek *tangencijalna na putanju* u danoj točki P.

Po istome postupku možemo za svaku točku na putanji tijela naći trenutnu brzinu, tj. brzinu kojom je tijelo prošlo kroz dotičnu točku. Dobivene se brzine malo razlikuju za jako bliske točke, no za udaljenije se točke one mogu znatno razlikovati po veličini i po smjeru.

Dimenzija brzine i jedinica za njeno mjerenje. Prema definiciji brzine, nalazimo da je njena dimenzija $[v] = [LT^{-1}]$. Brzina je uvijek omjer prevaljenog puta i pripadnog vremenskog intervala, pa je jedinica za mjerenje 1ms^{-1}.

1.2.4 Akceleracija

Pretpostavimo da smo već odredili trenutne brzine tijela duž njegove putanje. Neka to bude opet ista putanja kao u slici 1.8, koju prenosimo u sliku 1.9a, s time da sada u pojedinim točkama imamo već poznate trenutne brzine. U sljedećem koraku želimo proučavati promjene brzine od točke do točke duž putanje.

Na slici 1.9a prikazane su trenutne brzine u dvjema točkama P_i i P_{i+1} koje su odabrane sukladno pravilu utvrđenom jednadžbom (1.11) uz neki N. Svaka od trenutnih brzina je tangencijalna na putanju u danoj točki. Zbog zakrivljenosti putanje, smjerovi trenutnih brzina $\vec{v}_i$ i $\vec{v}_{i+1}$ su različiti.

Iz slike ujedno vidimo da su i moduli brzina različiti. Tijelo je imalo neku brzinu prolazeći kroz točku P_i, a zatim se brzina gibanja mijenjala, te je tijelo prošlo kroz točku P_{i+1} nekom drugom brzinom. Od prolaska tijela kroz točku P_i do prolaska kroz točku P_{i+1}, protekao je vremenski interval Δt sukladno jednadžbi (1.11).

Definiramo *srednju akceleraciju* kao omjer promjene brzine i vremenskog intervala u kojemu se promjena dogodila

$$\bar{\vec{a}}_{i,i+1} = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_{i,i+1}}{\Delta t} \tag{1.18}$$

Vektor brzine $\vec{v}$ mijenja se duž putanje, tako da $\vec{v}_i$ i $\vec{v}_{i+1}$ predstavljaju njegovu početnu i konačnu vrijednost na dijelu putanje od P_i do P_{i+1}, a razlika konačne i početne brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ predstavlja promjenu brzine. Na slici 1.9a prikazan je kao pomoćni crtež postupak odbijanja vektora brzina. Vektore $\vec{v}_i$ i $\vec{v}_{i+1}$ translatiramo tako da im se početne točke poklope. Sukladno pravilu o odbijanju vektora, promjenu brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ predstavlja vektor koji ide od vrha vektora $\vec{v}_i$ prema vrhu vektora $\vec{v}_{i+1}$, tj. prema vrhu vektora od kojega se vrši odbijanje.

Napomena: Promjenu neke veličine uvijek dobivamo tako da od konačne vrijednosti odbijemo početnu, a ne obrnuto. To slijedi iz pravila po kojemu konačnu vrijednost neke veličine dobijemo tako da na njenu početnu vrijednost dodamo promjenu dotične veličine. Npr. u slučaju brzina imamo $\vec{v}_i + \Delta \vec{v}_{i,i+1} = \vec{v}_{i+1}$. Iz ove jednakosti slijedi da je promjena brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1} = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i$, tj. od konačne brzine odbijemo početnu, a ne obrnuto.

Gdje je mjesto vektoru srednje akceleracije?

Vektor promjene brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ dobili smo odbijanjem vektora na pomoćnom crtežu u slici 1.9a. Međutim, promjena brzine fizikalno se pripisuje gibanju tijela, pa se postavlja pitanje gdje je pravo mjesto vektora $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ na putanji. Brzina se nije skokovito promijenila u nekoj točki, nego se mijenjala u intervalu od P_i do P_{i+1}. Budući da ne znamo ništa detaljnije o tome, postavimo vektor $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ tako da mu početna točka bude na sredini puta od P_i do P_{i+1}.

Prema jednadžbi (1.18), vektor srednje akceleracije $\bar{\vec{a}}_{i,i+1}$ ima smjer kao i vektor promjene brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$. I vektor srednje akceleracije $\bar{\vec{a}}_{i,i+1}$ odnosi se, sukladno definiciji u jednadžbi (1.18), na cijeli interval od P_i do P_{i+1}, pa stoga i njegovu početnu točku stavljamo na sredinu tog intervala (slika 1.9a).

Jednadžba (1.18) je definicija srednje akceleracije. Nju možemo preinačiti tako da pišemo

$$\Delta \vec{v}_{i,i+1} = \bar{\vec{a}}_{i,i+1}\, \Delta t \tag{1.19}$$

Fizikalna interpretacija ove jednadžbe kaže nam da promjena brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ nastaje zato što tijelo ima srednju akceleraciju $\bar{\vec{a}}_{i,i+1}$ za trajanja vremenskog intervala Δt.

Trenutna akceleracija

Možemo sada zamisliti da uzimamo gušće raspoređene točke na putanji tako da smanjujemo vremenski interval Δt prema jednadžbi (1.11). To znači da interval Δt teži prema diferencijalu dt, a susjedne točke postaju sve bliže. Promjena brzine $\Delta \vec{v}_{i,i+1}$ postaje sve manja i teži prema diferencijalu $d\vec{v}$. Kao što smo gore utvrdili, srednja akceleracija $\bar{\vec{a}}_{i,i+1}$ uvijek se pripisuje intervalu puta između susjednih točaka P_i i P_{i+1} i postavlja se na sredinu tog intervala. Kako se interval puta smanjuje, tako se i položaj vektora srednje akceleracije $\bar{\vec{a}}_{i,i+1}$ točnije utvrđuje. Možemo reći da dobivamo *trenutnu akceleraciju*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.20)$$

koju pripisujemo točki P. Naime, prolazeći kroz točku P, tijelo mijenja brzinu za $d\vec{v}$ u vremenskom intervalu dt. Smjer vektora trenutne akceleracije $\vec{a}$ isti je kao smjer promjene brzine $d\vec{v}$.

Matematičkim jezikom kažemo da je akceleracija jednaka vektorskoj derivaciji brzine po vremenu. Smisao te izreke je jednostavan i svodi se na to da je akceleracija jednaka omjeru diferencijala $d\vec{v}$ i dt.

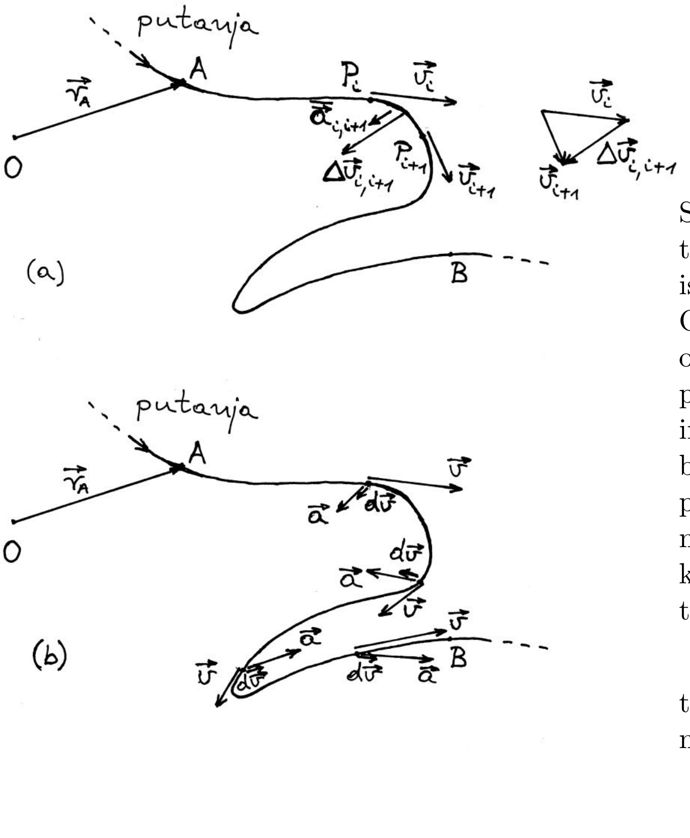
Jednadžbu (1.20) možemo napisati u alternativnom obliku

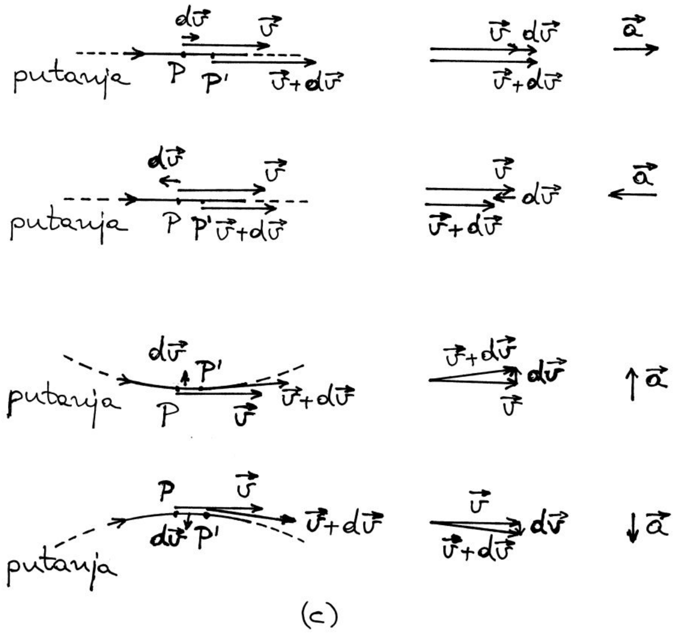
$$d\vec{v} = \vec{a}dt \qquad (1.21)$$

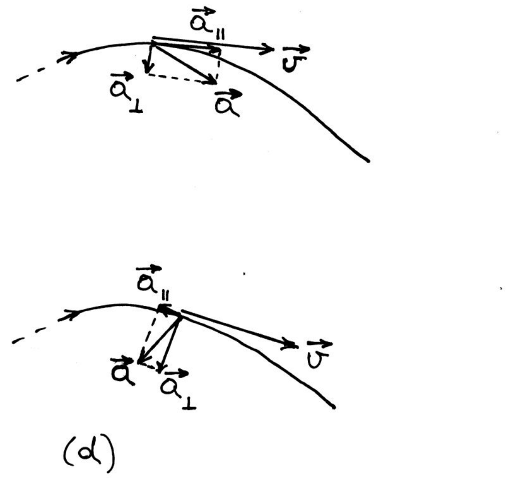
Ako tijelo prolazeći kroz točku P ima akceleraciju $\vec{a}$, onda će se u vremenskom intervalu dt njegova brzina promijeniti za $d\vec{v}$. Opet vidimo da *promjena brzine*, a ne sama brzina, ima smjer akceleracije.

Smjer akceleracije u odnosu na putanju tijela

Nalaženje vektora trenutne akceleracije možemo provesti za bilo koju točku na putanji. Prikaz rezultata za nekoliko točaka dan je na slici 1.9b. Vektori







Slika 1.9: (a) Trenutne brzine u točkama P_i i P_{i+1} te postupak nalaženja promjene brzine $\Delta\vec{v}_{i,i+1}$. U istome smjeru je i vektor srednje akceleracije. (b) Odnosi trenutnih brzina i akceleracija u nekoliko odabranih točaka na putanji. (c) Infinitezimalna promjena brzine $d\vec{v}$ i trenutna akceleracija $\vec{a}$ mogu imati smjer kao i trenutna brzina (ubrzavanje gibanja), ili suprotan smjer (usporavanje gibanja), ili pak biti u okomitom smjeru (zakretanje putanje na neku stranu). (d) Primjeri trenutne akceleracije, kojoj paralelna komponenta može biti bilo u smjeru trenutne brzine, ili suprotno od nje.

trenutnih brzina uvijek su tangencijalni na putanju, no vektori trenutnih akceleracija mogu imati

različite smjerove u odnosu na putanju. Pokušajmo naći smisao tih odnosa.

Ako akceleracija $\vec{a}$ ima u nekoj točki putanje isti smjer kao i trenutna brzina $\vec{v}$, onda će i promjena brzine $d\vec{v}$ imati isti smjer kao $\vec{v}$. Drugim riječima, nova brzina $\vec{v} + d\vec{v}$ bit će veća po iznosu. Radi se, dakle, o ubrzavanju tijela. Vektorski prikaz takve situacije dan je zasebno na slici 1.9c. Budući da nema promjene smjera brzine, putanja je na tome dijelu ravna.

Drukčiji učinak će imati akceleracija $\vec{a}$ koja ima smjer suprotan trenutnoj brzini $\vec{v}$. Vektor promjene brzine $d\vec{v}$ ima uvijek smjer akceleracije, a to sada znači da je suprotan trenutnoj brzini $\vec{v}$. Zbrajanjem dvaju vektora suprotnih smjerova dobivamo novu brzinu $\vec{v} + d\vec{v}$ koja je po iznosu manja, tj. tijelo se usporava. I ova je situacija zorno prikazana na slici 1.9c.

Napomena: Ne treba nas zbunjivati uporaba izraza akceleracija (lat. *accelerare - ubrzati*) u svim slučajevima promjene brzine, dakle i u slučaju kada se iznos brzine smanjuje, tj. tijelo usporava svoje gibanje. Do toga dolazi zato što vektor akceleracije ima smjer suprotan smjeru trenutne brzine. Definicija vektora akceleracije je uvijek ista i nema potrebe uvoditi nekakav vektor usporenja.

Konačno, možemo imati slučaj u kojemu akceleracija $\vec{a}$ ima smjer okomit na smjer trenutne brzine $\vec{v}$. Kada vektoru $\vec{v}$ dodamo vektor $d\vec{v}$ koji je na njega okomit, dobivamo novu brzinu koja se po iznosu nije promijenila, ali joj se malo promijenio smjer (slika 1.9c). To znači da je putanja na tome mjestu zakrivljena. Smjer vektora promjene brzine $d\vec{v}$ određuje na koju će stranu putanja biti zakrenuta.

Sada možemo uzeti u razmatranje slučajeve u kojima akceleracija $\vec{a}$ čini neki kut u odnosu na vektor trenutne brzine $\vec{v}$. Na slici 1.9d prikazano je kako vektor akceleracije možemo formalno rastaviti na dvije komponente, jednu okomitu na trenutnu brzinu i drugu koja može biti paralelna ili antiparalelna trenutnoj brzini. Okomita komponenta akceleracije uzrokuje zakretanje smjera brzine, a to znači da putanja postaje zakrivljena. Ako k tome imamo komponentu akceleracije koja je paralelna trenutnoj brzini, iznos brzine se povećava, tj. tijelo se ubrzava. Ako pak imamo komponentu akceleracije koja je antiparalelna trenutnoj brzini, tijelo se usporava.

S ovim općenitim spoznajama možemo ponovo pogledati putanju tijela na slici 1.9b i uočiti točke u kojima imamo bilo ubrzavanje ili usporavanje tijela. Također uočavamo da akceleracija može imati okomitu komponentu bilo na jednu ili na drugu stranu putanje i uzrokovati njenu zakrivljenost u tome smjeru.

Dimenzija akceleracije i jedinica za mjerenje. Akceleracija je definirana jednadžbom (1.20) kao omjer promjene brzine i vremenskog intervala u kojemu se promjena dogodila. Stoga izvodimo dimenziju akceleracije $[a] = [LT^{-2}]$, te jedinicu za mjerenje 1ms^{-2}.

1.3 Vremenska ovisnost kinematičkih veličina

U prethodnome odjeljku 1.2 uveli smo pojmove puta, brzine i akceleracije kao kinematičkih veličina pomoću kojih se opisuje gibanje tijela. U vektorskome prikazu, kao na slici 1.8 i 1.9, vidimo putanju tijela i vektore brzina i akceleracije u pojedinim trenucima, ali ne možemo kontinuirano pratiti njihove vremenske promjene. Ako nas upravo to pobliže interesira, morali bismo uvesti neku drugu metodu prikazivanja kinematičkih veličina.

1.3.1 Općenito gibanje po pravcu

Općenito gibanje po nekoj zakrivljenoj putanji, kao npr. onoj na slici 1.8, predstavlja složeniji problem. Stoga ćemo započeti analizu vremenske ovisnosti kinematičkih veličina na primjeru gibanja tijela po pravcu. Na slici 1.10a prikazan je pravac s, koji predstavlja putanju tijela, te na njemu označene dvije točke A i B između kojih je tijelo putovalo u vremenskom intervalu $\Delta t_{AB} = t_B - t_A$. Neka je taj vremenski interval podijeljen na N dijelova kao u jednadžbi (1.11), čime dobivamo manje vremenske intervale Δt. Na slici 1.10a prikazani su položaji tijela nakon uzastopnih intervala Δt. Sve je to iskazano odgovarajućim vektorima položaja po metodi koju smo uveli u odjeljku 1.2. Iz gustoće točaka na pravcu s, lako uviđamo da se pretpostavljeno gibanje tijela sastoji od pokretanja iz točke A, zatim

ubrzavanja dok nije dosegnuta neka brzina, pa gibanja tom brzinom na jednome dijelu puta i potom smanjivanja brzine, tj. usporavanja do konačnog zaustavljanja u točki B. Kao primjer takva gibanja u običnom životu navedimo vožnju automobila po ravnoj cesti od trenutka kada je upaljeno zeleno svjetlo na jednome semaforu do zaustavljanja zbog crvenoga svjetla na nekom drugom semaforu.

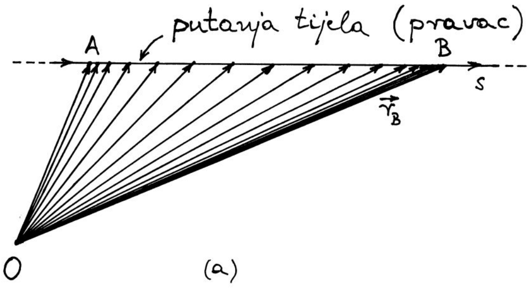
Pogled na raspored točaka na pravcu s daje nam samo kvalitativan uvid u vremensku ovisnost gibanja tijela. Za kvantitativnu analizu potrebno je načiniti nešto više. Na slici 1.10b nacrtan je opet pravac s, no okomito na njega dodana je os na kojoj nanosimo vrijeme od t_A do t_B s naznačenim intervalima Δt. Ova kombinacija pravca s kao prostorne osi i jedne vremenske osi omogućuje nam da svakome položaju tijela pridružimo i vremenski trenutak kada se tijelo našlo u tome položaju. Pridruživanje položaja i vremenskog trenutka prikazano je križićima na slici 1.10b.

Napomena: Valja dobro uočiti razliku između slika 1.10a i 1.10b. Slika 1.10a prikazuje dvodimenzionalan prostor, tj. ravninu koja je određena ishodištem O i pravcem s. Osim točaka na pravcu s mogli bismo obilježiti i neku točku izvan njega i ustvrditi da se radi o još jednoj točki u prostornoj ravnini. Za razliku od toga, slika 1.10b *ne prikazuje prostornu ravninu.* Na njoj imamo samo pravac s kao jednodimenzionalan prostor. Okomito na njega nije postavljena druga prostorna os, nego vremenska os. Stoga obilježavanje neke točke (križić) izvan pravca s nije prikaz položaja neke druge točke u prostornoj ravnini, nego povezivanje određenog položaja na pravcu s s određenim vremenskim trenutkom t.

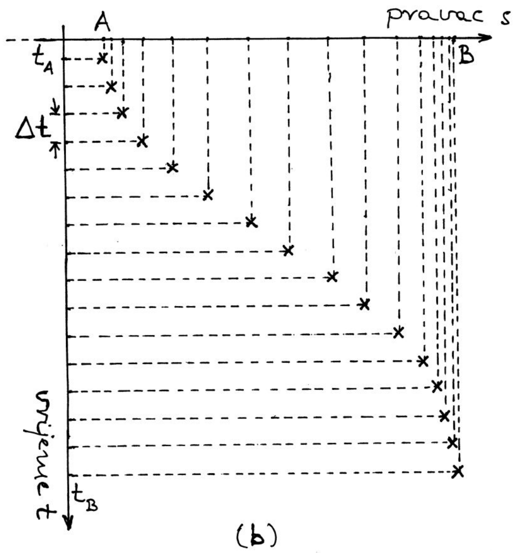
Umjesto prikaza na slici 1.10b, gdje je pravac s položen horizontalno a vremenska os vertikalno prema dolje, uobičajeno je da se vremenska os položi horizontalno a pravac s vertikalno prema gore kao na slici 1.10c. Ovdje se ne radi o promjeni smjera gibanja tijela u prostoru. Naime, slike 1.10b i 1.10c ionako ne prikazuju prostorne ravnine, pa postavljanje pravca s u bilo koji položaj na tim slikama nema značenje njegova smjera u realnome prostoru. Smjer pravca u realnome prostoru može se vidjeti samo u slici 1.10a. Ono za što nam služe slike 1.10b ili 1.10c jest analiza vremenske ovisnosti položaja tijela na pravcu.

Grafičko nalaženje brzine

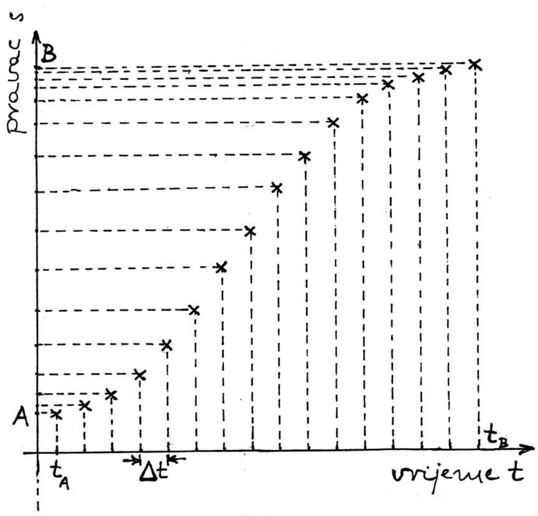
Za gibanje po pravcu možemo položaje tijela određivati algebarskim veličinama. Odaberemo neku točku na pravcu kao ishodište O, te odredimo da



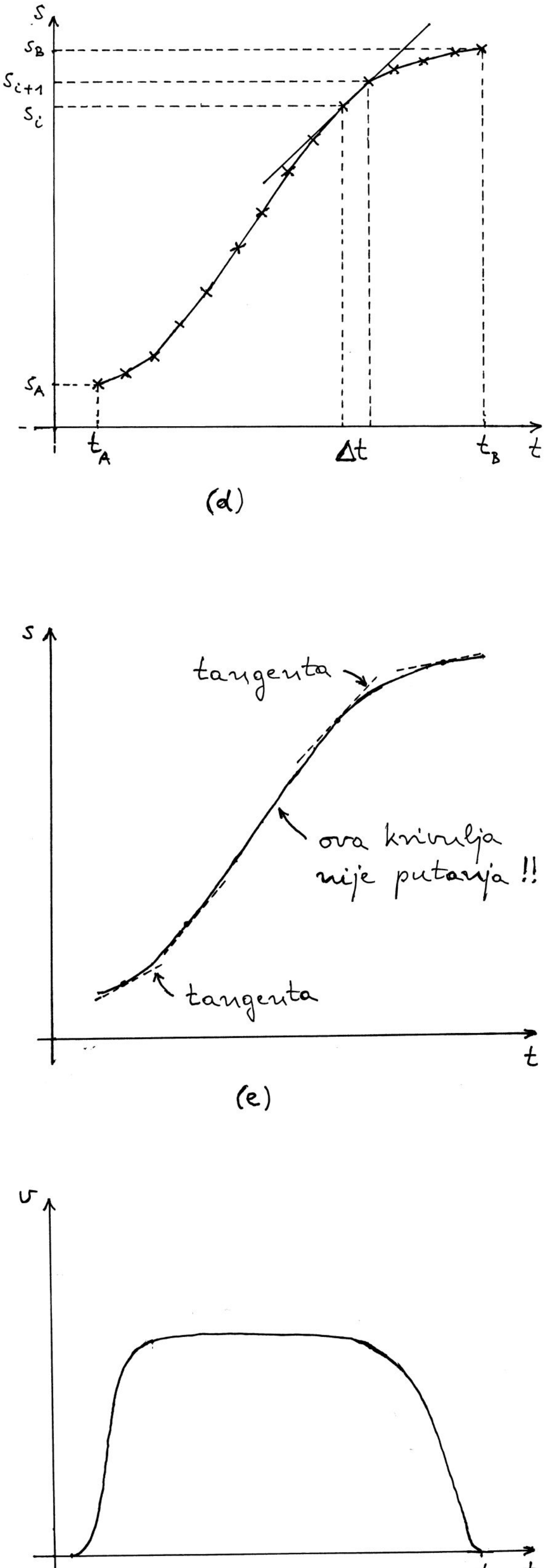
(a)

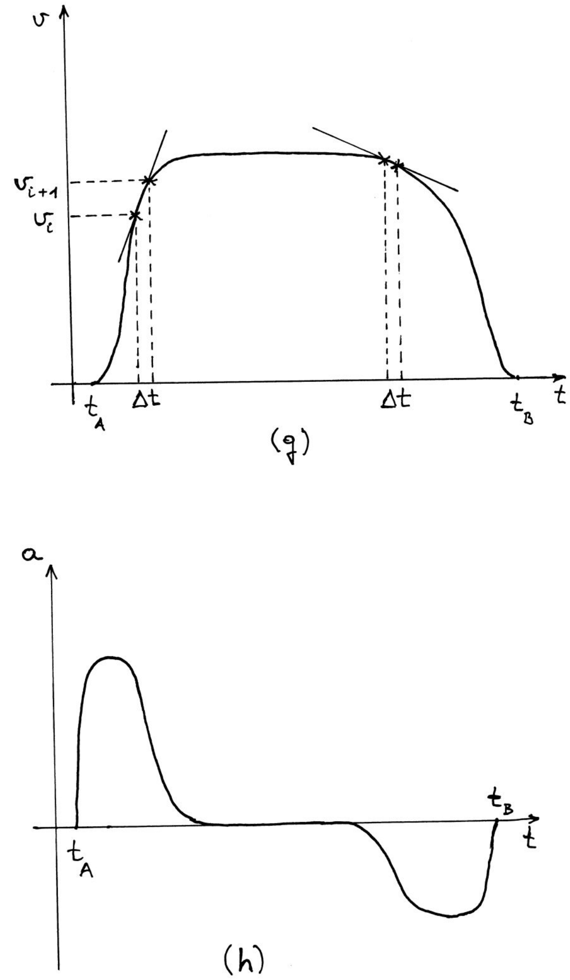


(b)



(c)





Slika 1.10: (a) Uzastopni položaji tijela koje se giba po pravcu s u prostoru. (b) Pravac s i vremenska os položena okomito na njega. Križići povezuju položaje tijela na pravcu s s pripadajućim vremenskim trenucima. (c) Uobičajen prikaz s vremenom na osi abscisa, dok su položaji tijela na osi s nanijeti na os ordinata. (d) Koeficijent smjera (nagib) sekante predstavlja srednju brzinu $\bar{v}_{i,i+1}$. (e) Graf $s(t)$ predstavlja vremensku ovisnost prevaljenog puta (putanja je pravac u (a)). Iznos trenutne brzine jednak je koeficijentu smjera tangente na krivulju $s(t)$ u danome trenutku (smjer brzine u prostoru je stalan i leži duž putanje prikazane u (a)). (f) Slijed iznosa trenutnih brzina određenih iz (e) predstavlja vremensku ovisnost $v(t)$. (g) Određivanje iznosa srednje akceleracije $\bar{a}_{i,i+1}$. (h) Slijed iznosa trenutnih akceleracija predstavljen je funkcijom $a(t)$.

od ishodišta na jednu stranu bude pozitivan smjer, a na drugu negativan. Točke A i B na pravcu s dobivaju koordinate s_A i s_B, a točka P_i svoju koordinatu s_i, kao što je prikazano na slici 1.10d. Umjesto vektora pomaka tijela $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$, sada uzimamo algebarski pomak na pravcu $\Delta s_{i,i+1} = s_{i+1} - s_i$. Srednja brzina na putu od točke P_i do P_{i+1} također postaje algebarska veličina

$$\bar{v}_{i,i+1} = \frac{\Delta s_{i,i+1}}{\Delta t} \tag{1.22}$$

Ako je $s_{i+1} > s_i$, algebarski pomak je pozitivan ($\Delta s_{i,i+1} > 0$), tj. tijelo se u vremenskom intervalu Δt pomaklo u pozitivnom smjeru pravca s. Tada je i srednja brzina, definirana jednadžbom (1.22), pozitivna algebarska veličina. Kada bismo imali gibanje u negativnom smjeru pravca s, tj. za $s_{i+1} < s_i$, bili bi i pomak i srednja brzina negativne algebarske veličine.

Na slici 1.10d, uzastopni križići su spojeni ravnim crtama. Dobivena izlomljena krivulja prikazuje nam približno vremensku ovisnost puta koji tijelo prevaljuje. Obratimo pozornost na jedan pomak tijela $\Delta s_{i,i+1}$, tj. prevaljeni put u vremenskome intervalu Δt. Ako kroz naznačene križiće povučemo pravac, nalazimo da je koeficijent smjera (tj. nagib) tog pravca ($\Delta s_{i,i+1}/\Delta t$) upravo jednak srednjoj brzini definiranoj jednadžbom (1.22).

Napomena: U matematici često zapisujemo pravac u obliku $y = kx + l$, gdje se podrazumijeva da su x i y bezdimenzionalne varijable. Tada je i koeficijent smjera k bezdimenzionalan. Sasvim je druga situacija na slici 1.10d. Pomak tijela $\Delta s_{i,i+1}$ se izražava u metrima, a vremenski interval Δt u sekundama. Stoga se koeficijent smjera toga pravca izražava u jedinicama ms^{-1} i predstavlja brzinu prema jednadžbi (1.22).

Uzimajući u račun podatke za sve veći broj točaka, tj. smanjivanjem vremenskog intervala Δt sukladno jednadžbi (1.11), dobivamo diferencijal vremena dt, a prevaljeni put tijela između uzastopnih točaka $\Delta s_{i,i+1}$ postaje diferencijal puta ds. Srednja brzina $\bar{v}_{i,i+1}$ iz jednadžbe (1.22) postaje trenutna brzina

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1.23}$$

Ako ovaj postupak deriviranja pratimo grafički kao na slici 1.10d, lako uviđamo da povećanjem broja točaka izlomljena krivulja sve bolje oponaša glatku, a pravac koji prolazi kroz susjedne točke postaje *tangenta* na glatku krivulju. Koeficijent smjera te tangente je trenutna brzina prema jednadžbi (1.23).

Postupak deriviranja možemo izvesti za bilo koji trenutak t kada tijelo prolazi kroz odgovarajuću točku na pravcu s. Na slici 1.10e prikazan je rezultat deriviranja za nekoliko različitih trenutaka. Svaka tangenta na slici 1.10e ima svoj koeficijent smjera koji je jednak brzini u tome trenutku.

Napomena: Ne smijemo pomiješati tangentu na slici 1.10e s vektorom brzine na slici 1.8d. Krivulja na slici 1.8d je *putanja* tijela u prostoru, a tangenta na nju daje smjer brzine u prostoru. Nasuprot tome, krivulja na slici 1.10e *nije putanja* tijela u prostoru, nego funkcija $s(t)$. Iz nje se ne određuje smjer brzine, nego samo iznos brzine kao koeficijent smjera tangente.

Iznos brzine se očito mijenja na putu od A do B. To smo najprije utvrdili iz niza uzastopnih položaja tijela prikazanih na slici 1.10a. Isto vidimo i iz nagiba (koeficijenta smjera) tangente u raznim točkama krivulje $s(t)$ na slici 1.10e. Pretpostavimo da smo odredili nagibe tangenti u svim točkama krivulje $s(t)$, tj. za svaki trenutak t imamo pripadnu vrijednost brzine v. To znači da smo odredili funkciju $v(t)$, koju možemo nacrtati na slici 1.10f. Odmah uočavamo da je ovakva vrsta grafa jako korisna. Dok smo iz prethodnih slika samo kvalitativno mogli uočiti promjenu brzine, ovdje nam se brzina prikazuje kvantitativno i lakše je možemo analizirati.

Na slici 1.10f brzina najprije raste, što odgovara dijelu krivulje $s(t)$ u slici 1.10e na kojemu se nagib tangente povećava. Zatim je, prema slici 1.10f, brzina neko vrijeme konstantna, što odgovara onome dijelu krivulje $s(t)$ u slici 1.10e u kojemu se ona ponaša kao pravac, pa se nagib tangente ne mijenja. Zatim slijedi smanjivanje brzine koje se može pratiti i na krivulji $s(t)$ kada se nagib tangente smanjuje i konačno padne na nulu.

Grafičko nalaženje akceleracije

Promjenu brzine na slici 1.10f možemo još detaljnije analizirati. U tu svrhu uzmimo u razmatra-

nje podatke o trenutnim brzinama nakon uzastopnih vremenskih intervala Δt koji su određeni jednadžbom (1.11). Rezultat je prikazan na slici 1.10g. Svaka točka na tom grafu predstavlja iznos brzine u nekom trenutku. Crta kojom smo spojili uzastopne točke je ravna, što predpostavlja da je promjena brzine linearna unutar vremenskog intervala Δt. Možemo dobiti srednju akceleraciju kao algebarsku veličinu

$$\bar{a}_{i,i+1} = \frac{\Delta v_{i,i+1}}{\Delta t} \tag{1.24}$$

gdje je $\Delta v_{i,i+1} = v_{i+1} - v_i$ promjena brzine u vremenskom intervalu Δt. Iz primjera na slici 1.10g vidimo da je srednja akceleracija jednaka koeficijentu smjera pravca koji prolazi uzastopnim točkama na krivulji $v(t)$.

Napomena: U ovome slučaju, koeficijent smjera pravca je omjer promjene brzine $\Delta v_{i,i+1}$, koja se izražava u ms^{-1} i vremenskog intervala Δt, koji se izražava u sekundama. Stoga se koeficijent pravca na slici 1.10g izražava u jedinicama ms^{-2}.

Srednja akceleracija može biti pozitivna ili negativna algebarska veličina, u ovisnosti o tome je li $v_{i+1} > v_i$ ili je $v_{i+1} < v_i$. Predznak srednje akceleracije očituje se u grafičkome prikazu na slici 1.10g kao pozitivan nagib (uspon), ili negativan nagib (pad), pravca koji prolazi kroz uzastopne točke.

Sada možemo zamisliti postupak derivacije u kojemu povećavamo broj točaka u kojima uzimamo podatke o brzini. Vremenski interval Δt se smanjuje prema jednadžbi (1.11) tako da postaje diferencijal vremena dt, a promjena brzine $\Delta v_{i,i+1}$ postaje također beskonačno malena veličina dv. Srednja akceleracija teži prema trenutnoj akceleraciji kao algebarskoj veličini

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.25}$$

Akceleracija koju tijelo ima u nekome trenutku t jednaka je koeficijentu smjera tangente na krivulju $v(t)$ u točki koja odgovara trenutku t.

Ako na ovaj način odredimo akceleracije u svim trenucima t, možemo nacrtati krivulju $a(t)$ kao na slici 1.10h. Akceleracija je u početku pozitivna, što znači da se brzina tijela povećava. Uz to uočavamo da iznos akceleracije raste, što znači da se brzina sve naglije povećava u tom dijelu gibanja. Taj dio odgovara pozitivnom nagibu tangente koji raste u početnome dijelu krivulje $v(t)$ na slici 1.10f. Trenutak kada nagib tangente dosegne maksimum, odgovara maksimalnoj pozitivnoj akceleraciji na slici 1.10h, što znači da je tada naglost povećavanja brzine najveća. Nakon toga, smanjuje se nagib tangente na krivulju $v(t)$ na slici 1.10f, a time opada akceleracija na slici 1.10h. To znači da se brzina gibanja tijela i dalje povećava, ali ne više tako naglo kao u maksimumu. U određenom trenutku, nagib tangente na krivulju $v(t)$ na slici 1.10f postane jednak nuli i ostaje nula neko vrijeme. To, naravno, ne znači da je brzina jednaka nuli. Naprotiv, brzina je veća nego prije, ali se ne mijenja u tom vremenskom intervalu. Stoga je akceleracija kroz to vrijeme jednaka nuli, a to pokazuje zorno slika 1.10h. Nakon tog perioda, brzina se smanjuje, što znači da akceleracija mora postati negativna veličina. Sve se to detaljno može pratiti na slici 1.10h. Najveći iznos (negativne) akceleracije pokazuje interval u kojemu se brzina naglo smanjivala. Vidimo da je grafičko prikazivanje vremenske ovisnosti akceleracije korisno ako želimo detaljnije analizirati promjenljivo gibanje.

Matematički gledano, mogli bismo nastaviti s deriviranjem funkcije $a(t)$, no to ipak ne ćemo napraviti. U fizikalnom opisu gibanja nije uvedena nova veličina koja bi bila jednaka derivaciji akceleracije. Razlozi za to ne mogu se obrazložiti na temelju same kinematike koju obrađujemo u ovome poglavlju. Tek u sljedećem poglavlju, koje se bavi dinamikom, otkrit ćemo razlog zašto se deriviranje zaustavlja na akceleraciji.

Općenito o derivaciji funkcije

U matematici se uzima da su varijable bezdimenzionalne veličine (brojevi). Time se postiže općenitost matematičkih izraza i raznih izvoda i dokaza. Razmotrimo tako neku funkciju jedne varijable koja se često zapisuje u obliku

$$y = f(x) \tag{1.26}$$

Pri tome smatramo da je x neovisna varijabla, a y ovisna. To znači da za bilo koju odabranu vrijednost x_i (broj), možemo izračunati vrijednost $f(x_i)$ i taj broj označiti kao y_i. Simbolom $f(..)$ naznačujemo da smo zamislili neki postupak po kojemu, polazeći od jednog broja, nekim računom

nalazimo drugi. Zato se kaže da je funkcija matematički postupak po kojemu svakome broju x_i *pridružujemo* broj $f(x_i)$. Par brojeva (x_i, y_i) obilježava nam jednu točku na krivulji koja grafički prikazuje funkciju $y = f(x)$. Primjer grafičkog prikaza funkcije nalazimo na slici 1.11a.

Derivacija funkcije *u nekoj točki* $P_i(x_i, y_i)$ definira se sljedećim pravilom

$$\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \qquad (1.27)$$

Derivaciju funkcije u točki P_i dobivamo tako da najprije nađemo za koliko se promijeni vrijednost funkcije kada se neovisna varijabla promijeni od x_i na $x_i + \Delta x$. Zatim napravimo omjer promjene vrijednosti funkcije $(f(x_i + \Delta x) - f(x_i))$ i promjene neovisne varijable Δx. Derivacija funkcije u točki P_i jednaka je graničnoj vrijednosti (lat. *limes - međa, granica*) tog omjera kada Δx postaje sve manji, tj. teži prema nuli. Uočimo da derivaciju funkcije *u nekoj točki* dobivamo iz omjera dvaju brojeva pa je i ona sama broj.

Derivaciju funkcije u točki P_i možemo pisati i na druge jednakovrijedne načine

$$\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x_i} = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x_i} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_i} \qquad (1.28)$$

Pravilo postavljeno u jednadžbi (1.27) definira u potpunosti derivaciju funkcije u nekoj točki. Zgodno je uvesti grafički prikaz kojim bi se zorno predočio postupak deriviranja funkcije. Na slici 1.11b prikazana je opet ista funkcija $y = f(x)$ i na njoj odabrana neka točka $P_i(x_i, y_i)$. Ako neovisnoj varijabli dademo nešto veću vrijednost $x_i + \Delta x$, dobivamo novu vrijednost funkcije $f(x_i + \Delta x)$. Taj novi par vrijednosti predstavlja koordinate jedne druge točke P na krivulji. Povucimo pravac koji prolazi kroz točke P_i i P. Iz slike vidimo da je omjer $(f(x_i+\Delta x)-f(x_i))/\Delta x$, koji nalazimo u jednadžbi (1.27), jednak koeficijentu smjera povučenoga pravca. Ako je krivulja koja predstavlja funkciju $y = f(x)$ zakrivljena između točaka P_i i P, kao što je to slučaj na slici 1.11b, onda povučeni pravac predstavlja sekantu (lat. *secare - sjeći*) krivulje.

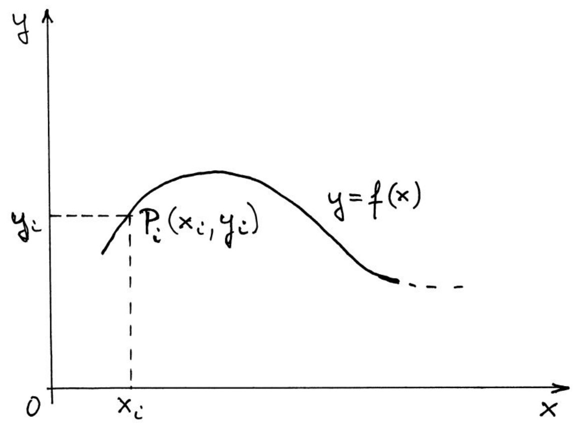
Za deriviranje funkcije u odabranoj točki P_i potrebno je, sukladno jednadžbi (1.27), ponavljati postupak načinjen na slici 1.11b, ali sa sve manjim i manjim iznosom Δx. To je prikazano na slici 1.11c. Očito je da sekanta time postaje sve bliža tangenti (lat. *tangere - dotaknuti*) u točki P_i. Derivacija funkcije u točki P_i jednaka je koeficijentu smjera te tangente.

Dobili smo da je derivacija funkcije *u odabranoj točki*, npr. u točki P_i na slici 1.11c, jednaka nekom broju. Ako odredimo derivaciju iste funkcije *u svakoj točki*, možemo definirati funkciju

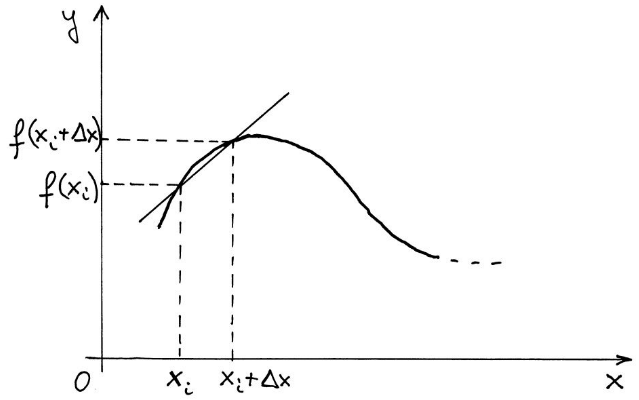
$$g(x) = \frac{d}{dx}f(x) \qquad (1.29)$$

Svakoj vrijednosti neovisne varijable x pridružujemo vrijednost $g(x)$ tako da ona bude jednaka derivaciji funkcije $f(x)$ u danoj točki. Funkcija $g(x)$ je derivacija funkcije $f(x)$.

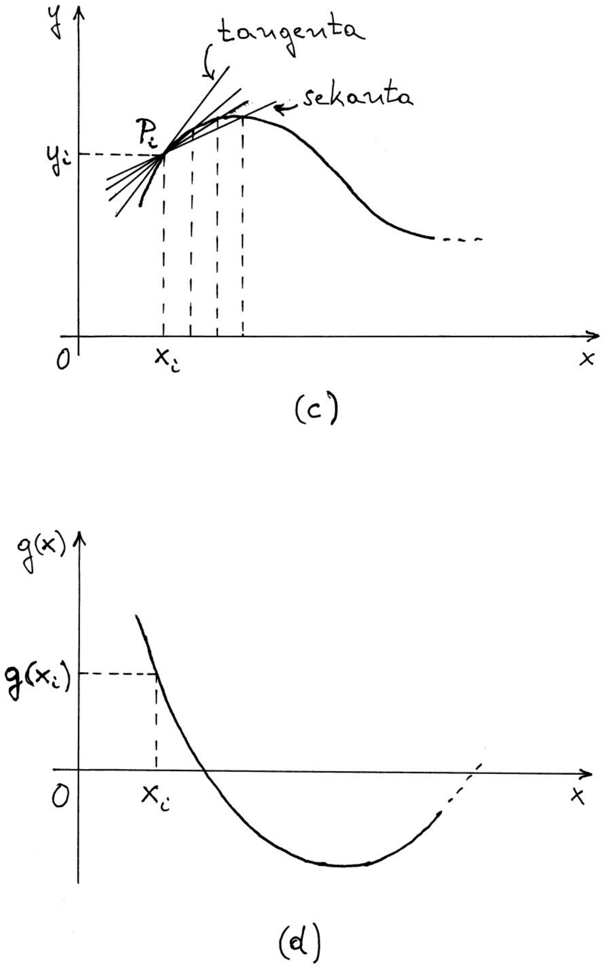
Napomena: Moramo razlikovati termin *derivacija funkcije u točki* od termina *derivacija*



(a)



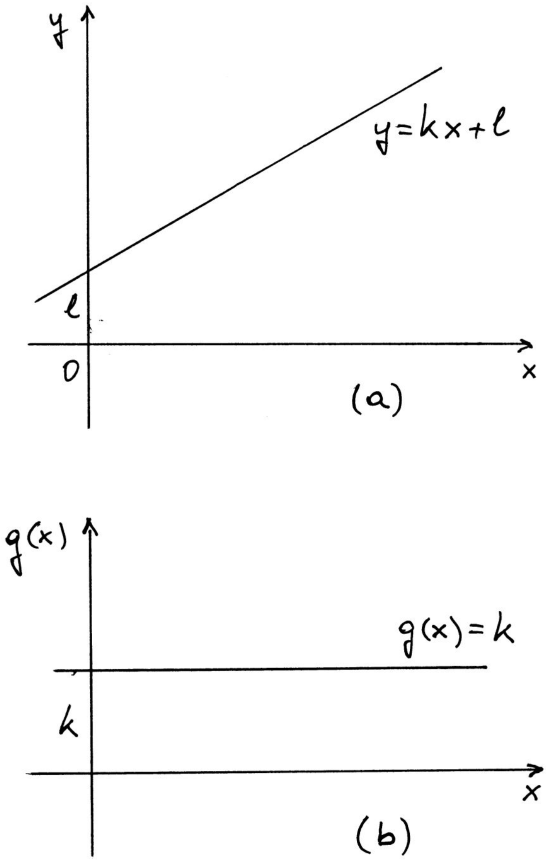
(b)



Slika 1.11: (a) Grafički prikaz proizvoljne funkcije $y = f(x)$. Svaka točka na krivulji povezuje dvije vrijednosti (x_i, y_i). (b) Sekanta kroz dvije točke na krivulji. (c) Niz sekanti koje se približavaju tangenti na $f(x)$ u točki P_i. (d) Veličina $g(x_i)$ jednaka je koeficijentu smjera tangente na $f(x)$ u točki P_i (derivacija u točki). Krivulja $g(x)$ predstavlja slijed derivacija u raznim točkama funkcije $f(x)$, pa se naziva derivacijom funkcije $f(x)$.

> *funkcije.* Derivacija funkcije u točki je samo broj, a derivacija funkcije je nova funkcija.

Funkcija $g(x)$ prikazana je grafički krivuljom na slici 1.11d. Svaka točka na toj krivulji predstavlja par brojeva $(x_i, g(x_i))$. Moramo dobro uočiti koji odnos postoji između krivulja na slikama 1.11c i d. Ordinata $g(x_i)$ na slici 1.11d je broj koji je jednak koeficijentu smjera tangente u točki P_i na slici 1.11c.



Slika 1.12: (a) Linearna funkcija je grafički prikazana pravcem. Tangenta na pravac u bilo kojoj njegovoj točki poklapa se sa samom pravcem. (b) Derivacija linearne funkcije je konstanta jednaka nagibu pravca u (a).

Derivacija linearne funkcije. Neka je zadana linearna funkcija $f(x) = kx + l$, gdje su k i l konstante. Prema jednadžbi (1.27) imamo

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[k(x+\Delta x)+l]-[kx+l]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k \tag{1.30}$$

Rezultat je neovisan o x, što znači da derivacija funkcije $f(x)$ u svakoj točki ima istu vrijednost. Drugim riječima, svakoj vrijednosti varijable x pridružujemo istu vrijednost k, pa imamo funkciju

$$g(x) = k \tag{1.31}$$

U grafičkom prikazu, funkcija $f(x) = kx + l$ je predstavljena pravcem (slika 1.12a) . Tangenta na

taj pravac u bilo kojoj njegovoj točki je opet taj isti pravac, a koeficijent smjera mu je k. Funkciju $g(x) = k$ grafički prikazujemo pravcem koji je paralelan s osi x, a njegov odsječak na osi ordinata je k (slika 1.12b).

Derivacija kvadratne funkcije. Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2$ dobivamo primjenom jednadžbe (1.27)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\left[2x\Delta x + (\Delta x)^2\right]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} a(2x+\Delta x) = 2ax \qquad (1.32)\end{aligned}$$

Derivacija funkcije $f(x) = ax^2$ nije ista u svakoj točki. Mijenjajući vrijednost varijable x, mijenja se i odgovarajuća vrijednost derivacije $2ax$. Ako svakoj vrijednosti x pridružujemo vrijednost $2ax$, znači da imamo funkciju

$$g(x) = 2ax \qquad (1.33)$$

U grafičkom prikazu (slika 1.13a), funkcija $f(x)$ je predstavljena parabolom. U raznim točkama parabole, tangenta ima različit nagib (koeficijent smjera). Za dani x_i, koeficijent smjera tangente iznosi $2ax_i$. Funkcija $g(x) = 2ax$ predstavlja pravac na slici 1.13b. Uočimo da je ordinata $g(x_i)$ neke točke na tome pravcu jednaka koeficijentu smjera tangente u točki P_i na slici 1.13a.

Opće pravilo za potencije. Navedimo ovdje, izostavljajući dokaz, da vrijedi općenito pravilo za derivacije funkcija potencija

$$f(x) = x^n \qquad (1.34)$$

$$g(x) = \frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1} \qquad (1.35)$$

Deriviranje potencije varijable umanjuje iznos eksponenta za jedinicu, a prijašnji eksponent dolazi kao množitelj.

1.3.2 Jednoliko gibanje po pravcu

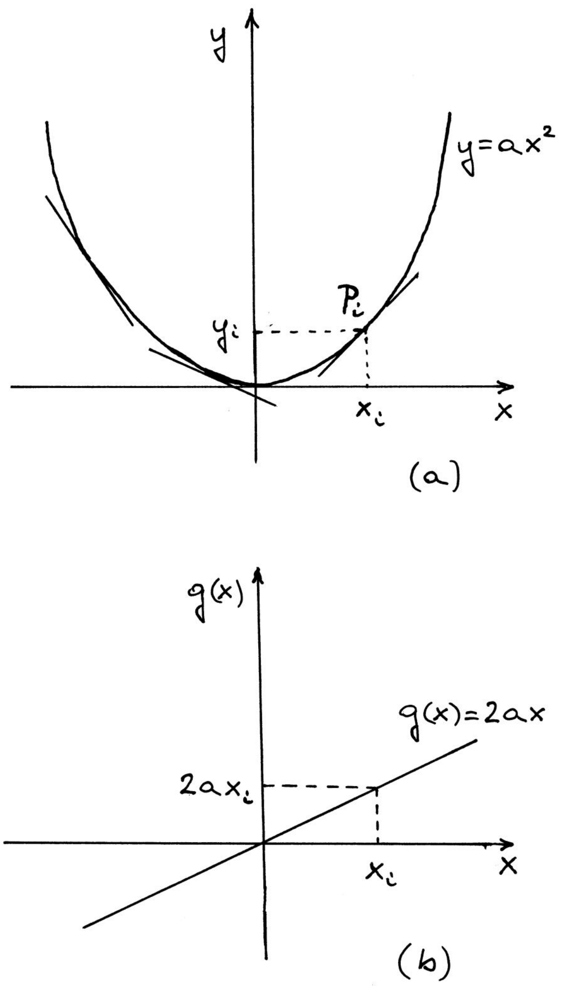
Od svih mogućih vrsta gibanja, posebnu važnost ima ono u kojemu je brzina konstantna po iznosu i smjeru, tj. vektor brzine je konstantan u vremenu

$$\vec{v} = konst. \qquad (1.36)$$

Zbog konstantnog *iznosa* brzine, to gibanje nazivamo jednolikim, a konstantnost *smjera* brzine znači da se gibanje odvija po pravcu.

U realnome svijetu, jednoliko gibanje po pravcu može biti npr. vožnja automobila stalnom brzinom po ravnoj cesti, ili plovidba broda stalnom brzinom po zadanom kursu, a mogli bismo navesti i niz drugih primjera.

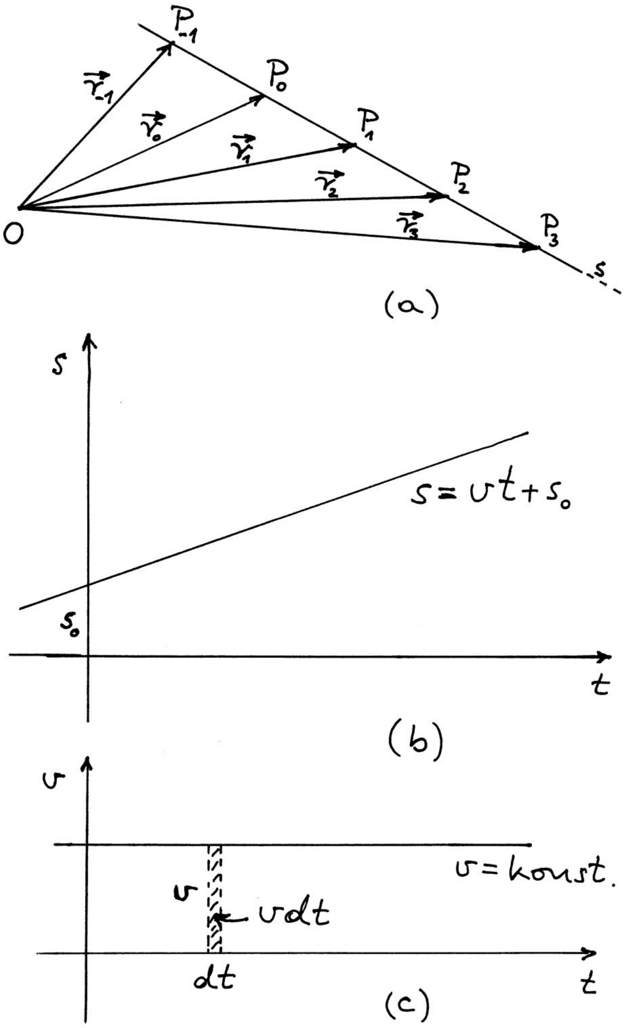
Slika 1.14a prikazuje tijelo u čestičnom modelu koje se giba jednoliko po pravcu. Primijenjen je vektorski opis kakav smo uveli u odjeljku 1.2. Odaberimo proizvoljno neku točku P_0 na pravcu, te

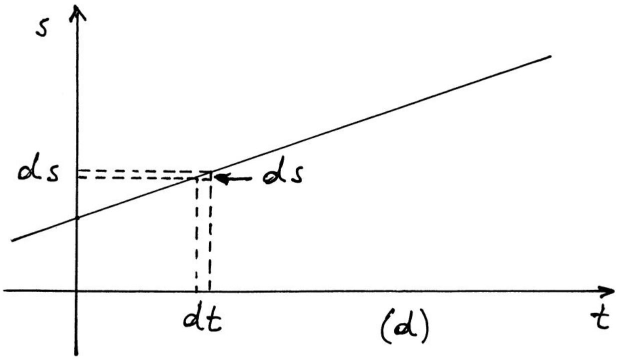


Slika 1.13: (a) Grafički prikaz kvadratne funkcije. Tangente na krivulju u raznim točkama imaju različite (negativne ili pozitivne) nagibe. (b) Slijed nagiba tangenti iz (a) daje linearnu funkciju koja predstavlja derivaciju kvadratne funkcije.

odlučimo da ćemo vrijeme mjeriti u odnosu na trenutak t_0 u kojemu je tijelo prošlo kroz točku P_0, tj. dogovorno stavimo da je $t_0 = 0$. Na pravcu su također prikazane točke P_i koje predstavljaju položaje tijela prije i poslije prolaska kroz P_0, s time da su svi vremenski intervali $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ jednaki. Zbog konstantnosti brzine na cijelome putu, međusobno su jednaki svi vektori pomaka $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$.

Iz slike 1.14a slijedi graf vremenske ovisnosti prevaljenog puta na slici 1.14b, koji možemo dobiti po logici koja je već primijenjena za općenitije gibanje na slikama 1.10a-c. Pri tome smo morali pravcu s odrediti pozitivan smjer i odabrati neku njegovu točku za ishodište od kojega mjerimo udaljenosti na jednu i na drugu stranu pravca. Proizvoljno smo odabrali ishodište tako da ne bude u točki P_0. To znači da se u $t = 0$ tijelo nije nalazilo u ishodištu, nego na nekoj udaljenosti s_0 od njega. Pravac na





Slika 1.14: (a) Vektorski prikaz jednolikog gibanja čestice po pravcu s. (b) Vremenska ovisnost položaja čestice na pravcu $s(t)$. (c) Deriviranjem funkcije $s(t)$ dobiva se konstantna brzina v. Ako želimo nakon toga primijeniti postupak integracije, polazimo od šrafiranog pravokutnika površine vdt. (d) Postupak integracije daje opet funkciju $s(t)$ jer se zbrajaju infinitezimalni vertikalni pomaci $ds = vdt$.

slici 1.14b grafički predstavlja funkciju $s(t)$. Ona je linearna funkcija koju bismo matematički mogli zapisati u općem obliku $s = kt + l$, s time da bismo morali odrediti veličine k i l.

Prema jednadžbi (1.23), brzina je jednaka derivaciji puta po vremenu $v = ds/dt$, a po općem pravilu za derivaciju linearne funkcije (jednadžba (1.30)), za derivaciju funkcije $s(t) = kt + l$ dobiva se k. To znači da veličina k zapravo predstavlja brzinu v. Što se tiče veličine l, ona predstavlja odsječak na osi s, a to je udaljenost tijela od ishodišta u $t = 0$, koju smo označili kao $s_0 = s(0)$. Prema tome, vremenska ovisnost puta kod jednolikog gibanja po pravcu glasi

$$s(t) = vt + s_0 \tag{1.37}$$

Postupak integriranja

U gornjem smo razmatranju počeli od pretpostavke da je brzina konstantna i zatim smo grafičkim postupkom, na slici 1.14b, ustanovili da je funkcija $s(t)$ linearna. No, postoji i drugi način kako od zadane konstantne brzine v možemo doći do spoznaje o linearnosti funkcije $s(t)$. Taj se postupak naziva *integriranje* i ovdje je zgodna prilika da ga upoznamo na jednostavnom primjeru. Jednadžbu (1.23) možemo preinačiti u oblik

$$ds = vdt \tag{1.38}$$

Ova nam jednadžba kaže da tijelo, koje se giba po pravcu brzinom v, prevali u vremenskom intervalu dt put ds. Ako želimo dobiti ukupan put koji tijelo prevali od trenutka $t_0 = 0$ do proizvoljno odabranog trenutka t, moramo zbrojiti sve prevaljene putove ds. Taj postupak zbrajanja naziva se integriranje i označava se na poseban način

$$s - s_0 = \int_{s_0}^{s} ds \tag{1.39}$$

Ukupno prevaljen put je $s - s_0$. Simbol $\int$ je znak integrala. Ono što piše iza znaka integrala je infinitezimalna veličina koju moramo zbrajati u uzastopnim koracima. U ovome slučaju, to je infinitezimalni put ds. Veličine zapisane pri dnu i pri vrhu znaka integrala nazivaju se donja i gornja granica integrala. Ovdje nam one ukazuju da se zbrajanje treba provesti od s_0 do s.

Jednadžba (1.39) ne zahtijeva nikakvo dokazivanje. Ona kaže da zbrajanjem svih infinitezimalnih putova ds od s_0 do s dobivamo ukupno prevaljen put $s - s_0$, što je samo po sebi razumljivo. U tome smislu, jednadžba (1.39) ne donosi neki napredak u rješavanju problema. Međutim, poslužimo se sada jednadžbom (1.38) tako da zamijenimo ds u jednadžbi (1.39) s vdt, pa dobivamo sljedeći ekvivalentan izraz

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} vdt \tag{1.40}$$

Razlika je jedino u tome što smo sada promijenili varijablu po kojoj integriramo. Umjesto ds imamo dt, pa moramo i granice integrala promijeniti u t_0 i t. Kada mijenjamo varijablu po kojoj integriramo, moramo paziti da ne promijenimo vrijednost integrala, a to postižemo tako da nam donja granica u novoj varijabli t_0 odgovara donjoj granici u staroj varijabli s_0, tj. t_0 mora biti trenutak kada se tijelo nalazilo na položaju s_0. Isto pravilo vrijedi i za gornju granicu.

Jednadžba (1.40) se već može iskoristiti za rješavanje problema. Ona nam kaže da moramo zbrajati vdt u vremenskom intervalu od t_0 do t. Budući da je u cijelom tom vremenskom intervalu brzina v konstantna, možemo zbrajati samo infinitezimalne vremenske intervale dt i zbroj pomnožiti s v. Matematički to pišemo u obliku

$$s - s_0 = v \int_{t_0}^{t} dt \tag{1.41}$$

Naime, zbroj svih infinitezimalnih vremenskih intervala dt je naznačeni integral i njega množimo s v. Matematičkim rječnikom se kaže da konstantan faktor možemo staviti ispred znaka integrala. Vidjeli smo na ovome primjeru zašto je to valjano.

Nastavimo s obradom jednadžbe (1.41). Napišimo u eksplicitnoj formi da je vremenski interval $t - t_0$ jednak zbroju svih infinitezimalnih vremenskih intervala dt od t_0 do t

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt \tag{1.42}$$

Ova jednadžba je sama po sebi razumljiva i ne zahtijeva nikakvo dokazivanje kao ni jednadžba (1.39). One su, uostalom, po formi iste. Jednadžba (1.42) nije zasebno korisna, ali ako je uvrstimo u jednadžbu (1.41) dobivamo rezultat

$$s - s_0 = v(t - t_0) \tag{1.43}$$

Prevaljeni put je linearno ovisan o vremenu. Jednadžba (1.43) formalno sadrži t_0 zato da bi vremenski interval bio zapisan kao razlika $t - t_0$. Međutim, u ovome slučaju smo odabrali da je $t_0 = 0$, pa jednadžbu (1.43) možemo napisati u obliku

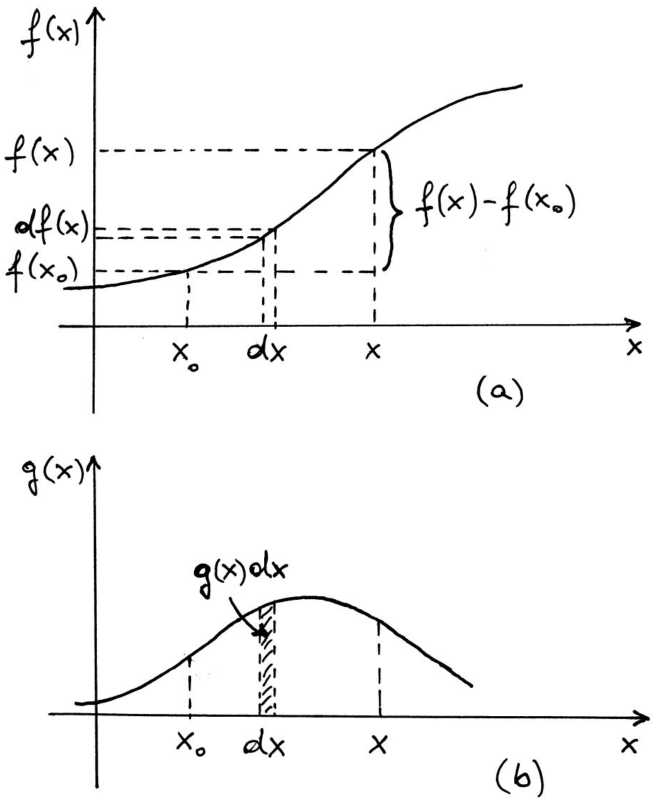
$$s = vt + s_0 \tag{1.44}$$

koji je identičan jednadžbi (1.37).

Grafički prikaz integriranja. Kao što smo kod deriviranja postigli korisnu zornost kada smo uveli grafički prikaz, tako možemo učiniti i s integriranjem. U tu svrhu, analizirajmo grafički prikaz funkcije $v(t)$ na slici 1.14c. Brzina je konstantna, tj. $v(t) = v = konst.$, pa je na grafu prikazana pravcem paralelnim s osi t, te s odsječkom v na osi ordinata. Osvrnimo se na osjenčani pravokutnik. Grafički gledano, njegova površina mora biti jednaka umnošku baze i visine. U ovome slučaju, baza je dt, a visina je v, pa je površina pravokutnika jednaka vdt. No znamo da je $vdt = ds$, dakle, put prevaljen u vremenskom intervalu dt. Na slici 1.14d prikazana je ponovo funkcija $s(t)$ kao pravac, te uz nju dt i ds. Dobili smo da je površina vdt osjenčanoga pravokutnika u slici 1.14c jednaka vertikalnom porastu ds pravca na slici 1.14d.

Napomena: Osjenčana površina na slici 1.14c nije prava geometrijska površina koja se mjeri u m^2. Naime, osi na toj slici ne predstavljaju dužine koje se mjere u metrima. Na jednoj je osi vrijeme, koje se mjeri u sekundama, a na drugoj brzina, koja se mjeri u ms^{-1}. Stoga se umnožak vdt mjeri u metrima i kao takav predstavlja grafičku, a ne geometrijsku površinu.

Prema jednadžbi (1.40), ukupno prevaljeni put $s-s_0$ jednak je integralu (zbroju) svih vdt od t_0 do t. Grafički gledano, radi se o zbroju površina svih pravokutnika vdt na slici 1.14c u intervalu od t_0 do t. Vidimo da je taj zbroj jednak ukupnoj grafičkoj površini iznad osi t pa do pravca koji predstavlja brzinu, a u intervalu od t_0 do t. Ova grafička površina $s - s_0$ iz slike 1.14c odgovara vertikalnom porastu pravca na slici 1.14d u istome vremenskom intervalu.



Slika 1.15: (a) Graf proizvoljno odabrane funkcije $f(x)$. Označen je interval od neke fiksne vrijednosti x_0 do moguće promjenljive vrijednosti x. (b) Funkcija $g(x)$ je derivacija funkcije $f(x)$. Površina osjenčanog pravokutnika odgovara vertikalnom porastu $df(x)$ u (a), a cjelokupna površina ispod grafa $g(x)$ u intervalu od x_0 do x odgovara vertikalnom porastu $f(x) - f(x_0)$.

Općenito o odnosu derivacije i integrala

U prethodnom razmatranju jednolikog gibanja po pravcu utvrdili smo povezanost brzine i prevaljenog puta

$$\frac{d}{dt}s(t) = v \qquad \Longrightarrow \qquad s - s_0 = \int_{t_0}^{t} vdt \qquad (1.45)$$

Deriviranjem funkcije $s(t)$ dobivamo v, a integriranjem vdt dobivamo $s-s_0$. Pokazat ćemo da ovaj odnos vrijedi i za slučaj kada brzina nije konstantna, nego ovisi o vremenu kao $v(t)$.

Možemo postupiti sasvim općenito u razmatranju odnosa derivacije i integrala. Neka je $fx)$ neka funkcija, a $g(x)$ njena derivacija

$$\frac{d}{dx}f(x) = g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)-f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(x)dx \qquad (1.46)$$

Ovu je posljedicu lako razumjeti. Iz prve jednadžbe imamo $df(x) = g(x)dx$, gdje $df(x)$ znači diferencijal funkcije, odnosno infinitezimalnu promjenu vrijednosti funkcije. Druga jednadžba kaže da ukupnu promjenu funkcije $f(x) - f(x_0)$ dobivamo zbrajanjem svih $df(x)$ u intervalu od x_0 do x.

Odnos definiran jednadžbom (1.46) možemo ilustrirati grafički. Na slici 1.15a prikazana je funkcija $f(x)$, a na slici 1.15b njena derivacija $g(x)$. Osjenčani pravokutnik na slici 1.15b ima grafičku površinu $g(x)dx$. Ona je jednaka diferencijalu $df(x)$, tj. infinitezimalnoj promjeni označenoj malenim vertikalnim pomakom na slici 1.15a.

Zbroj svih grafičkih površina $g(x)dx$ u intervalu od x_0 do x na slici 1.15b daje ukupnu grafičku površinu ispod krivulje koja predstavlja funkciju $g(x)$, s time da se u obzir uzme interval od x_0 do x. Ta je površina jednaka ukupnoj promjeni funkcije $f(x) - f(x_0)$, koja je na slici 1.15a prikazana vertikalnim pomakom. Ovo je opće pravilo integriranja na koje ćemo se često navraćati.

1.3.3 Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu

Razmotrimo sada gibanje u kojemu je akceleracija konstantna

$$\vec{a} = konst. \tag{1.47}$$

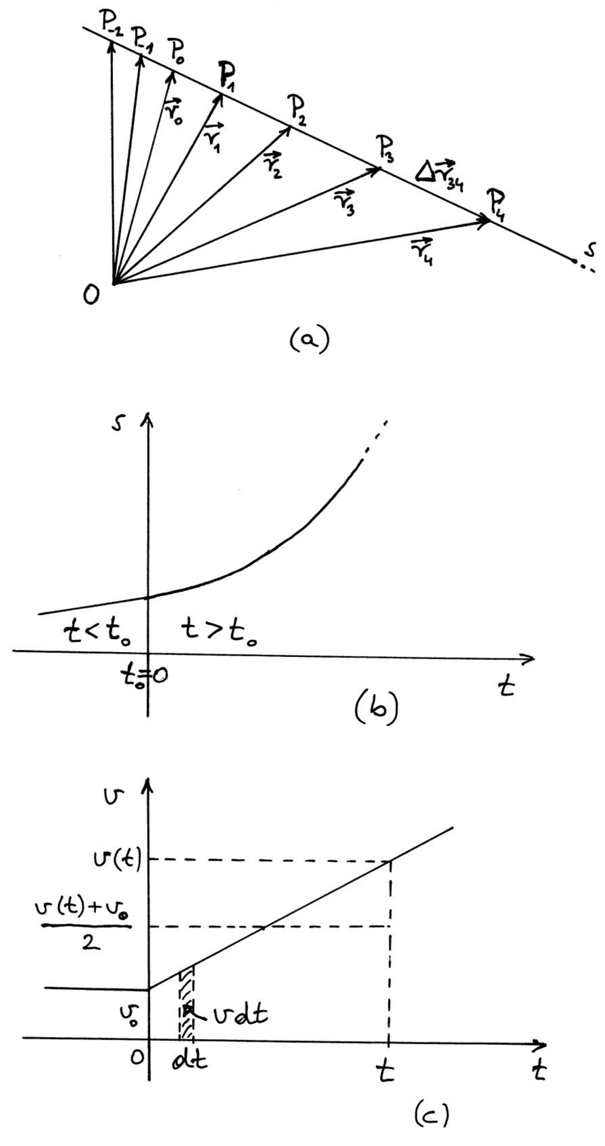
Iz vektorskog opisa gibanja u odjeljku 1.2 znamo da konstantnost smjera vektora akceleracije ne znači nužno da se tijelo giba po pravcu. Potrebno je još da brzina nema, ni u kojem trenutku, komponentu okomitu na zadanu akceleraciju, tj. da bude uvijek na istome pravcu kao i zadana akceleracija.

Kao primjer iz realnoga života, možemo imati slučaj automobila koji se giba nekom konstantnom brzinom $\vec{v}_0$ po ravnoj cesti, a u trenutku t_0 nastupi gibanje s konstantnom akceleracijom $\vec{a}$ u istome smjeru kao i brzina $\vec{v}_0$. Na slici 1.16a prikazano je takvo gibanje u čestičnome modelu i s vektorskim opisom uvedenim u odjeljku 1.2.

Kao P_0 označena je na slici 1.16a točka u kojoj je nastupilo gibanje s konstantnom akceleracijom. Također su označene točke P_i kroz koje je tijelo prolazilo slijedom uzastopnih jednakih vremenskih intervala Δt prije i poslije t_0. Uočavamo da su vektorski pomaci $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$ međusobno jednaki prije t_0, a povećavaju se nakon t_0. To nam odražava činjenicu da je brzina prije t_0 konstantna i jednaka $\vec{v}_0$, a nakon t_0 raste, tako da vektori srednje brzine $\bar{\vec{v}}_{i,i+1}$ bivaju sve veći.

Vektor srednje akceleracije definirali smo u jednadžbi (1.18) putem razlike trenutnih brzina na početku i kraju vremenskog intervala Δt. U ovome slučaju razmatramo gibanje tijela s konstantnom akceleracijom nakon t_0, što znači da su tada i sve srednje akceleracije jednake. Srednju akceleraciju možemo izraziti kao omjer razlike uzastopnih srednjih brzina $\bar{\vec{v}}_{i,i+1} - \bar{\vec{v}}_{i-1,i}$ i vremenskog intervala Δt, pa dobivamo da konstantna akceleracija, označena na slici 1.16a, nužno podrazumijeva da je, nakon t_0, svaka sljedeća srednja brzina veća od prethodne uvijek za isti iznos. Zbog proporcionalnosti vektora srednje brzine $\bar{\vec{v}}_{i,i+1}$ i vektora pomaka $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$, zaključujemo da i za vektore pomaka mora vrijediti pravilo po kojemu je, nakon t_0, svaki sljedeći vektor pomaka veći od prethodnoga za isti iznos. Tako je i prikazano na slici 1.16a.

Na slici 1.16b analiziramo ovo isto gibanje u $s-t$ dijagramu. Vektori pomaka $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$ pretvaraju se ovdje u algebarske pomake $\Delta s_{i,i+1}$ s istim pravilom ponašanja. Funkcija $s(t)$ je linearna za $t < t_0$, što je očekivano za jednoliko gibanje po pravcu. Za $t > t_0$ funkcija $s(t)$ očito nije linearna. Iz onoga što prikazuje slika 1.16b, nije lako zaključiti kakva bi matematička funkcija odgovarala toj krivulji.



Slika 1.16: (a) Vektorski prikaz gibanja čestice po pravcu s u kojemu čestica prelazi iz jednolikog u jednoliko ubrzano gibanje nakon prolaska kroz točku P_0. (b) Grafički prikaz vremenske ovisnosti položaja čestice na pravcu s. (c) Grafički prikaz vremenske ovisnosti brzine. Površina ispod nagnutog pravca u intervalu od 0 do t jednaka je površini ispod donje crtkane linije (zbog jednakosti trokuta).

Rješenje za brzinu

Rješenje gornjega problema možemo dobiti u dva koraka primjenom integrala. Pođimo od toga da je za $t > t_0$ akceleracija a, kao algebarska veličina, konstantna. Nju povezujemo s promjenom brzine primjenjujući pravilo iz jednadžbe (1.46)

$$\frac{d}{dt}v(t) = a \quad \Longrightarrow \quad v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a dt = a(t - t_0) \tag{1.48}$$

Kod određivanja vrijednosti integrala uvažili smo da je akceleracija a konstanta koju možemo iznijeti ispred znaka integrala, pa preostali integral znači zbrajanje svih dt od t_0 do t, što daje ukupni vremenski interval $t - t_0$. Ovaj je postupak identičan onome u jednadžbama (1.41)-(1.43), s time da smo tada određivali prevaljen put iz poznate konstantne brzine, a sada određujemo promjenu brzine iz zadane konstantne akceleracije.

U jednadžbi (1.48) pisali smo radi forme oznaku $v(t_0)$ za brzinu u trenutku t_0, no to nam je ista brzina koju smo već označavali kao v_0 za $t \leq t_0$. Naime, tijelo se tek nakon t_0 počne ubrzavati. Uz ovu oznaku, jednadžbu (1.48) možemo preinačiti u oblik

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0 \tag{1.49}$$

Dobivena funkcija $v(t)$ je linearna u vremenu. Ne zaboravimo da je ona dobivena samo za $t > t_0$ kada tijelo ima akceleraciju a. Radi matematičke jednostavnosti uzmimo da je $t_0 = 0$ pa imamo

$$v(t) = at + v_0 \tag{1.50}$$

Napomena: Moramo uvijek imati na umu da varijabla t u jednadžbi (1.50) predstavlja zapravo vremenski interval od $t = 0$ do nekog t. U tome intervalu brzina je porasla za at.

Grafički je funkcija $v(t)$ prikazana na slici 1.16c. Za $t < t_0$, brzina je konstantna, dok za $t > t_0$, ona raste linearno u vremenu. Upravo zbog tog jednolikog rasta brzine u vremenu, takvo se gibanje naziva *jednoliko ubrzanim*[2].

Rješenje za prevaljeni put

Problemu nalaženja funkcije $s(t)$ možemo sada pristupiti tako da prevaljeni put povežemo s brzinom primjenjujući opet opće pravilo iz jednandžbe (1.46)

$$\frac{d}{dt}s(t) = v(t) \quad \Longrightarrow \quad s(t) - s_0 = \int_{0}^{t} v(t) dt \tag{1.51}$$

Ovdje smo odmah postavili da je $t_0 = 0$, pa je vrijednost donje granice integrala jednaka nuli. U integralu je $v(t)$ linearna funkcija, a ne konstanta, pa ne možemo brzinu staviti ispred znaka integrala. Problem možemo riješiti ako nađemo takav oblik funkcije $s(t)$, da njena derivacija bude upravo linearna funkcija $v(t)$ zadana jednadžbom (1.50). Poznavajući pravilo o deriviranju funkcija potencija u jednadžbama (1.34) i (1.35), možemo ustanoviti da je

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C\right] = at + v_0 = v(t) \tag{1.52}$$

Izraz u uglatoj zagradi mora predstavljati funkciju $s(t)$, a u njemu je C neka konstanta. Nju odredimo na sljedeći način. Označimo s $s(0)$ položaj tijela u trenutku $t = 0$. Iz jednadžbe (1.52) dobivamo uvrštavanjem $t = 0$ da je $s(0) = C$, pa pišemo

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{1.53}$$

gdje je upotrijebljena uobičajena oznaka $s_0 = s(0)$. Time je problem riješen. Funkcija $s(t)$ iz jednadžbe (1.53) odgovara krivulji na slici 1.16b za $t > 0$.

Pokažimo još da rezultat iz jednadžbe (1.53) možemo dobiti i putem grafičke metode za integriranje. Slika 1.16c prikazuje funkciju $v(t)$. Osjenčani pravokutnik ima grafičku površinu $v(t)dt$ koja predstavlja prevaljeni put ds u vremenskom intervalu dt. Da bismo dobili ukupno prevaljen put $s(t) - s_0$, moramo zbrojiti površine svih takvih pravokutnika od $t = 0$ do t. Grafička površina tog lika ispod pravca jednaka je grafičkoj površini pravokutnika koji ima bazu t i visinu $1/2\,[v(t) + v_0]$ naznačenu crtkanom linijom na slici 1.16c. Stoga za prevaljeni put dobivamo

[2]Pravilnost jednoliko ubrzanog gibanja prvi je eksperimentalno ustanovio Galileo Galilei u prvoj polovici 17. stoljeća kada je proučavao gibanje kuglice niz kosinu. Sam Galilei je jezgrovito napisao: *Motum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dico illum, qui a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superadit.* (Jednako, ili jednoliko, ubrzano gibanje nazivam ono, koje od početka gibanja, u jednakim vremenima, dobiva jednake priraste brzina).

$$s(t) - s_0 = \left[\frac{1}{2}\left[v(t) + v_0\right]\right] t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \quad (1.54)$$

Ovaj je rezultat identičan onome iz jednadžbe (1.53).

Prikladno je na ovome mjestu promisliti o fizikalnoj interpretaciji dobivenog izraza za prevaljeni put. Možemo reći da se ukupno prevaljen put od $t = 0$ do t sastoji od dva dijela. Jedan dio iznosi $v_0 t$ i jednak je putu koji bi tijelo prevalilo da se nastavilo gibati brzinom v_0 i za vrijeme $t > 0$, tj. kao da nema akceleracije. Drugi dio iznosi $(1/2)at^2$ i predstavlja prevaljen put uz postojanje akceleracije, ali bez početne brzine.

Mertonsko pravilo

1.4 Rastavljanje gibanja u dvije i tri dimenzije

U odjeljku 1.2 opisivali smo neko općenito gibanje u ravnini i uveli kinematičke veličine u vektorskoj formi. No, kada smo u odjeljku 1.3 pristupili proučavanju vremenske ovisnosti kinematičkih veličina, ograničili smo se samo na gibanje po pravcu. Tada su uvedeni grafički prikazi pomoću jedne prostorne i jedne vremenske osi. Za općenito gibanje u ravnini, ili u trodimenzionalnom prostoru, očito nije dovoljna jedna prostorna os, pa moramo razviti dopunu metode prikazivanja vremenske ovisnosti kinematičkih veličina.

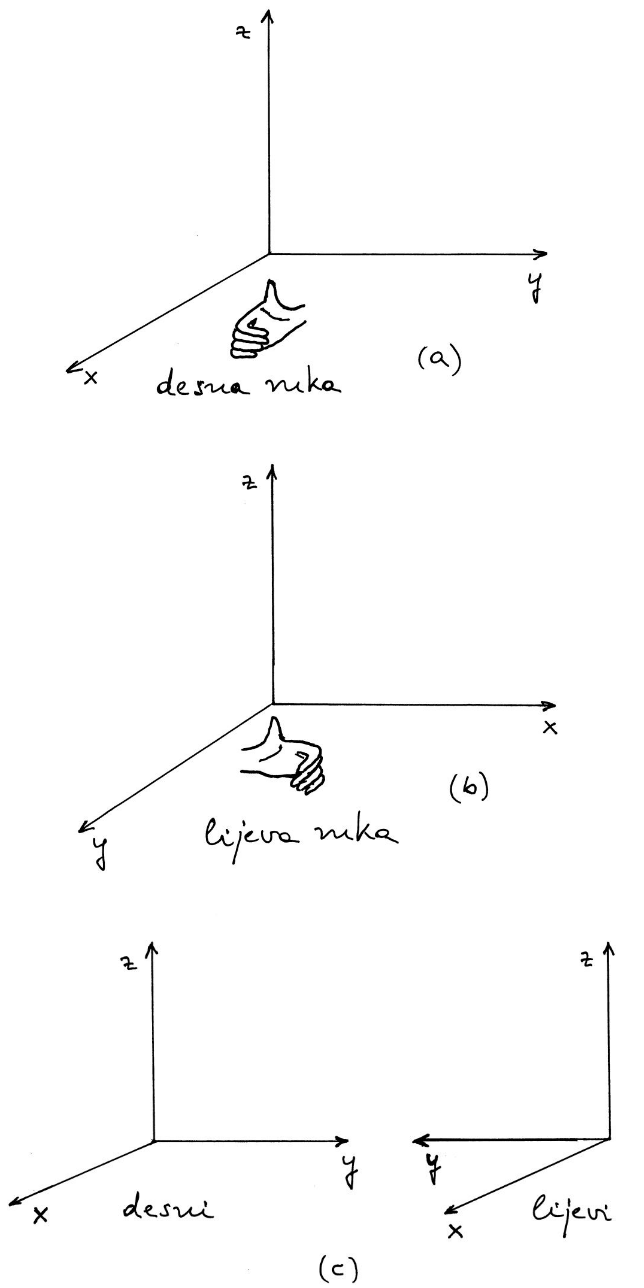
1.4.1 Vektori u kartezijevu sustavu

Kartezijev[3] koordinatni sustav sastoji se od tri međusobno okomita pravca koji se sijeku u jednoj točki, a za svaki od pravaca definiran je pozitivan i negativan smjer. To su osi koordinatnog sustava koje je uobičajeno označavati s x, y i z.

Lijevi i desni koordinatni sustav

Kartezijev koordinatni sustav može biti *desni* ili *lijevi*. Oni su prikazani na slikama 1.17a i b zajedno s desnom, odnosno lijevom rukom kojima se utvrđuje njihova simetrija.

[3]René Descartes, francuski filozof, matematičar i fizičar iz 17. stoljeća nazivao se na latinskom *Cartesius*.



Slika 1.17: (a) Desni koordinatni sustav i pravilo desne ruke. (b) Lijevi koordinatni sustav i pravilo lijeve ruke. (c) Promjena smjera jedne od osi dovodi do promjene desnog u lijevi sustav (ili obrnuto).

Pravilo desne ruke kaže da je potrebno najprije ispružiti prste i zatim namjestiti ruku tako da ispruženi prsti pokazuju duž pozitivnog smjera osi x. Zatim treba stiskati šaku i pratiti smjer zakretanja prstiju. Prema potrebi, ruku valja uvijati dok se ne postigne da stiskanjem šake zakrećemo smjer

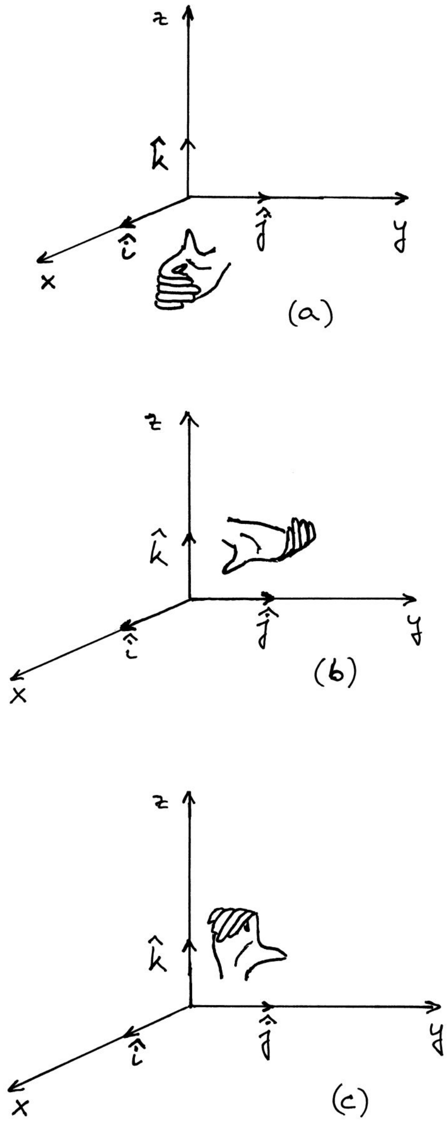
prstiju od pozitivnog smjera osi x prema pozitivnom smjeru osi y. Tada će nam ispruženi palac pokazivati pozitivan smjer osi z. Na isti se način lijevom rukom ostvaruje ovo pravilo za lijevi koordinatni sustav.

Iz slika 1.17a i b možemo uočiti da se prostom zamjenom dviju osi (x i y) iz desnog koordinatnog sustava dobije lijevi, i obrnuto. Ovo svojstvo vrijedi za bilo koji par osi.

Prelazak iz desnog u lijevi koordinatni sustav može se ostvariti i promjenom smjera samo jedne od osi. Na slici 1.17c prikazani su desni i lijevi koordinatni sustavi tako da im se smjerovi osi x i z podudaraju, pa se jasno vidi da su tada pozitivni smjerovi njihovih osi y suprotni jedan drugome.

Zbog navedenih razlika između lijevih i desnih koordinatnih sustava, moramo jako paziti da ih ne pomiješamo. Za prikaz fizikalnih zbivanja mogla bi nam jednako dobro poslužiti bilo jedna ili druga vrsta koordinatnih sustava, no dogovorno se uzima *desni koordinatni sustav.*

Radi potpunosti, spomenimo i pravilo *desnog* vijka koje se često navodi u knjigama iz fizike. U praksi se gotovo uvijek upotrebljavaju desni vijci, pa se podrazumijeva da svi imaju iskustva u tom pogledu. Ako postavimo osi x i y u ravninu okomitu na os simetrije vijka, te vijak rotiramo od pozitivnog smjera osi x prema pozitivnome smjeru osi y, smjer napredovanja desnog vijka pokazuje pozitivan smjer osi z desnoga koordinatnog sustava.



Slika 1.18: (a) Pravilo desne ruke primijenjeno na redoslijed vektora $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$. (b) Pravilo desne ruke se može primijeniti i na ciklički zamijenjen redoslijed $\hat{\jmath}, \hat{k}, \hat{\imath}$. (c) Daljnja ciklička zamjena u redoslijed $\hat{k}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}$ također podliježe pravilu desne ruke.

Jedinični vektori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ i $\hat{\mathbf{k}}$.

Za prikazivanje vektora u kartezijevu koordinatnom sustavu korisno je uvesti tri jedinična vektora, po jedan duž pozitivnog smjera svake od triju osi.

U ovoj ćemo knjizi koristiti oznake $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ i $\hat{k}$ za jedinične vektore duž osi x, y i z kako je prikazano na slici 1.18. Ove su oznake najčešće u literaturi, no pojavljuju se i druge, npr. $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$, ili $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ i $\hat{e}_z$.

Za jedinične vektore u desnome koordinatnom sustavu vrijedi pravilo desne ruke koje kaže da postavljanjem ispruženih prstiju u smjer prvoga vektora $\hat{\imath}$, te stiskanjem šake tako da prsti rotiraju prema drugome vektoru $\hat{\jmath}$, ispruženi palac pokazuje duž smjera trećega vektora $\hat{k}$ (slika 1.18a).

Pravilo cikličke zamjene. Pravilo desne ruke vrijedi i ako načinimo *cikličku zamjenu* u redoslijedu kojim prste vezujemo uz jedinične vektore. Ispružene prste desne ruke postavimo duž drugoga vektora $\hat{\jmath}$, te ih stiskanjem šake rotiramo prema trećemu vektoru $\hat{k}$. Ispruženi palac tada pokazuje duž prvoga vektora $\hat{\imath}$ kao na slici 1.18b. Možemo isto tako načiniti još jednu cikličku zamjenu i dobiti poredak $\hat{k}$, $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$ kao na slici 1.18c.

Rastavljanje vektora na komponente

Neka je $\vec{A}$ neki vektor. Na slici 1.19a prikazano je rastavljanje vektora $\vec{A}$ na komponente duž osi kartezijeva sustava

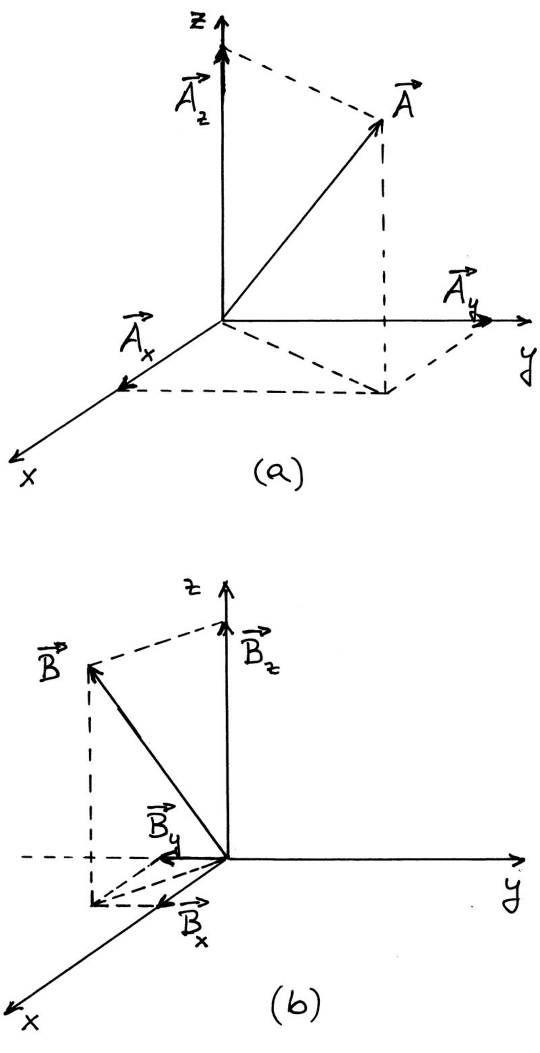
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \tag{1.55}$$

Vektori $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ i $\vec{A}_z$ su projekcije vektora $\vec{A}$ na koordinatne osi.

Drugi način kako zapisujemo rastavljanje vektora na komponente, koristi se jediničnim vektorima

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k} \tag{1.56}$$

Razumije se, između ova dva načina zapisivanja



Slika 1.19: (a) Rastavljanje vektora na komponente duž osi koordinatnog sustava. (b) Primjer vektora koji ima komponentu duž negativnog smjera osi y.

postoji veza $\vec{A}_x = A_x\,\hat{\imath}$ i analogno za komponente duž osi y i z.

Napomena: Veličina A_x u jednadžbi (1.56) *nije* modul vektora $\vec{A}_x$. Naime, modul vektora je uvijek pozitivna veličina, dok je A_x algebarska veličina koja može biti pozitivna ili negativna u ovisnosti o tome je li komponenta $\vec{A}_x$ u smjeru jediničnog vektora $\hat{\imath}$ ili u suprotnome smjeru. Isto vrijedi i za veličine duž osi y i z.

Kao dopunski primjer, slika 1.19b prikazuje vektor $\vec{B}$, kojemu je komponenta $\vec{B}_y$ usmjerena duž negativnog smjera osi y, odnosno suprotno jediničnome vektoru $\hat{\jmath}$. Rastavljanjem kao u jednadžbi (1.56) dobivamo da je B_y negativna algebarska veličina.

Zbog Pitagorina poučka dobivamo za modul vektora $\vec{A}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.57}$$

Predznak algebarskih veličina u ovome izrazu ne igra ulogu zbog kvadriranja.

1.4.2 Vremenske ovisnosti komponenti kinematičkih veličina

Analizirajmo najprije jedno gibanje u ravnini. Poopćenje rezultata na gibanje u trodimenzionalnom prostoru možemo lako izvesti naknadno.

Na slici 1.20a prikazana je ravnina s koordinatnim sustavom Oxy i neka putanja kojom se tijelo giba. Radi jednostavnosti primjenjujemo čestični model za prikaz tijela. Kao što smo već rekli u odjeljku 1.2, prikazivanje putanje tijela podrazumijeva da su nam poznate sve točke kroz koje je tijelo prolazilo. Međutim, iz same putanje ne mogu se očitati vremenski trenuci u kojima je tijelo prolazilo kroz pojedine točke. Da bismo dobili uvid u vremenski tijek gibanja, moramo barem nekim točkama na putanji pripisati odgovarajuće vremenske trenutke.

Odaberimo neku točku na putanji koja je određena vektorom položaja $\vec{r}_0$ i računajmo vrijeme u odnosu na trenutak kada je tijelo prošlo kroz tu točku, tj. postavimo da je tada bio trenutak $t = 0$. Zatim označimo na putanji točke u kojima se tijelo nalazilo prije i poslije $t = 0$ u vremenskim razmacima od Δt. Iz takva prikaza

možemo otprilike razabrati kako je izgledalo gibanje tijela tijekom vremena. Međutim, ako želimo detaljnije izučiti vremensku ovisnost gibanja, potrebno nam je imati grafove kao u odjeljku 1.3. U njima je uvijek jedna os prostorna, a druga vremenska. No, ovdje se javlja problem zato što putanja na slici 1.20a nije pravac, pa ne možemo govoriti samo o jednoj prostornoj osi. Kada bismo mjerili samo iznos prevaljenog puta u metrima, te prikazivali njegovu vremensku ovisnost, bila bi to nepotpuna informacija o gibanju jer se iz nje ne bi znalo je li putanja pravac, ili je zakrivljena, te kako je zakrivljena.

Problem potpunog opisa gibanja tijekom vremena možemo riješiti ako gibanje na slici 1.20a prikažemo kao da se ono sastoji od dvaju istodobnih gibanja duž osi x i y. Pođimo od toga da vektor položaja tijela $\vec{r}$ možemo rastaviti na komponente

$$\vec{r} = r_x\,\hat{\imath} + r_y\,\hat{\jmath} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \tag{1.58}$$

Oznake r_x i r_y dolaze po analogiji s jednadžbom (1.56), no češća je praksa da se za vektor položaja rabe samo oznake x i y. Ako promatramo pomak tijela od npr. $\vec{r}_i$ do $\vec{r}_{i+1}$, možemo napisati

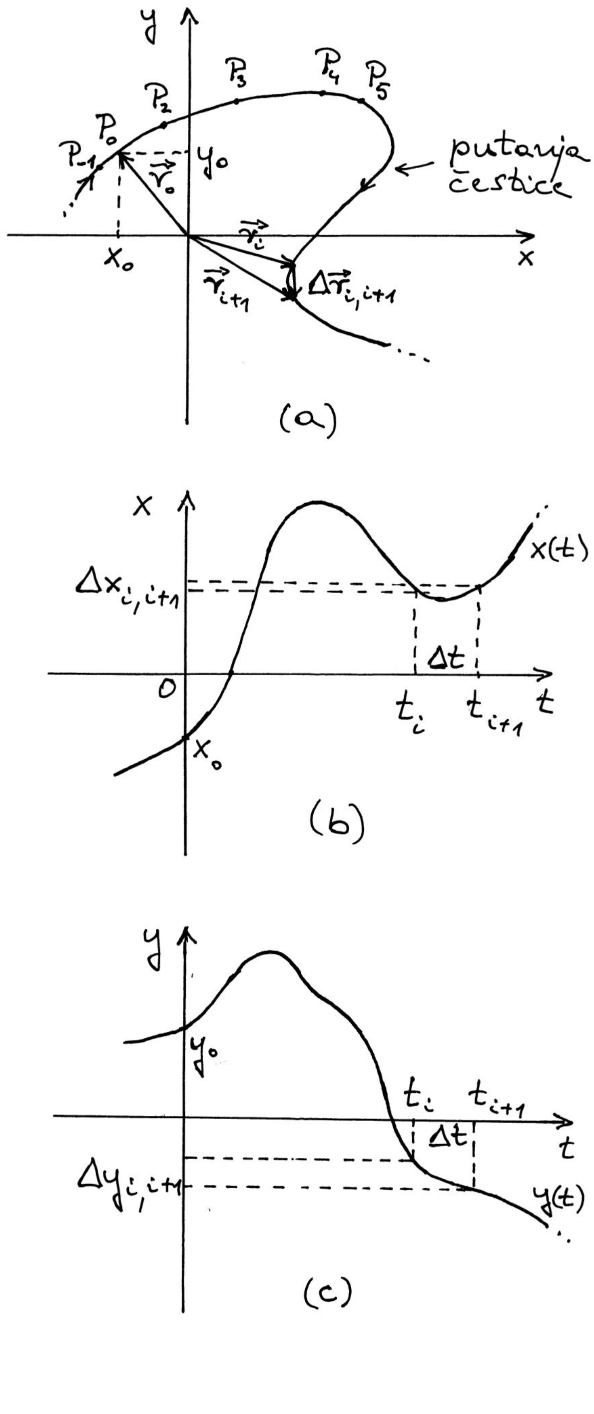
$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_{i,i+1} &= \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i \\ &= (x_{i+1} - x_i)\,\hat{\imath} + (y_{i+1} - y_i)\,\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.59}$$

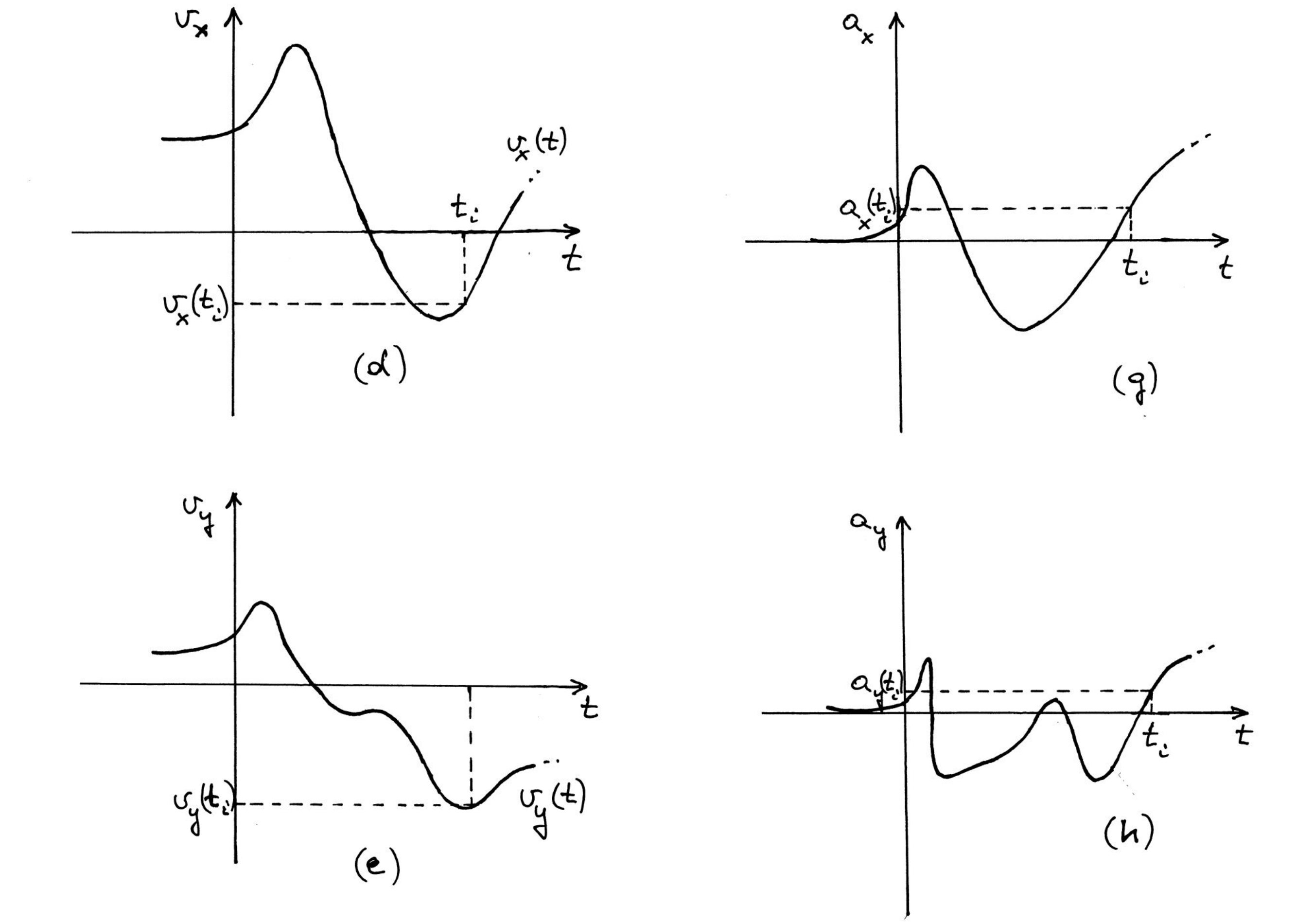
Uviđamo da je prostorni pomak tijela za $\Delta\vec{r}_{i,i+1}$ potpuno ekvivalentan *istodobnom* pomaku tijela duž osi x za iznos $(x_{i+1} - x_i)$ i pomaku duž osi y za iznos $(y_{i+1} - y_i)$.

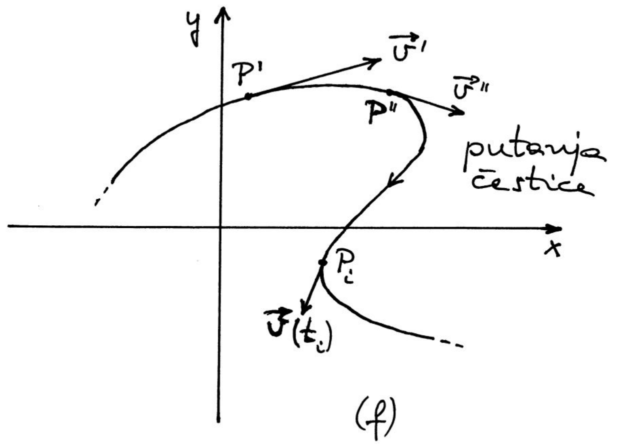
Ovo nas razmatranje vodi na zaključak da je cjelokupno gibanje tijela po bilo kakvoj putanji u ravnini potpuno određeno dvjema funkcijama $x(t)$ i $y(t)$. Za gibanje iz slike 1.20a dobivamo grafove vremenske ovisnosti $x = x(t)$ i $y = y(t)$ prikazane na slikama 1.20b i c.

Napomena: Svaki od dvaju grafova na slikama 1.20b i c ima jednu prostornu i jednu vremensku os, kao i grafovi koje smo razmatrali u odjeljku 1.3. Međutim, ovdje grafovi ne prikazuju dva neovisna gibanja, nego *oba zajedno* opisuju vremensku ovisnost *jednoga* gibanja po zakrivljenoj putanji u ravnini Oxy.

Ako su zadani grafovi kao na slikama 1.20b i c, možemo potpuno rekonstruirati putanju tijela u prostoru na sljedeći način. Za neki vremenski trenutak t_i, očitamo na grafu iz slike 1.20b vrijednost x_i, a na grafu iz slike 1.20c vrijednost y_i. Kada ove vrijednosti složimo u uređeni par (x_i, y_i) dobivamo prostorne koordinate točke na putanji koju prikazujemo u ravnini Oxy kao na slici 1.20a. Tijelo je prošlo kroz tu točku u trenutku t_i.







Slika 1.20: (a) Proizvoljno odabrana putanja tijela u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu i niz uzastopnih položaja tijela u intervalima vremena Δt. (b) i (c) Vremenske ovisnosti istodobnog pomaka tijela duž osi x i y. (d) i (e) Vremenske ovisnosti komponenata brzine duž osi x i y (derivacije funkcija prikazanih na slikama (b) i (c)). (f) Konstrukcija vektora brzine na temelju komponenata očitanih u grafovima (d) i (e). Vektor brzine je uvijek tangencijalan na putanju tijela. (g) i (h) Vremenske ovisnosti komponenata akceleracije duž osi x i y (derivacije funkcija prikazanih na slikama (d) i (e)).

Komponente brzine

Krenimo sada u postupak nalaženja srednjih brzina za gibanje prikazano na slici 1.20a. Postupajući kao u odjeljku 1.2, dobivamo za srednje brzine

$$\vec{v}_{i,i+1} = \frac{\Delta \vec{r}_{i,i+1}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y_{i,i+1}}{\Delta t}\hat{\jmath} \qquad (1.60)$$

Ovdje smo također uzeli u obzir jednadžbu (1.59), te stavili oznake $\Delta x_{i,i+1} = (x_{i+1} - x_i)$ i $\Delta y_{i,i+1} = (y_{i+1} - y_i)$. Ako smanjujemo vremenski interval Δt, smanjuju se i komponente prevaljenog puta $\Delta x_{i,i+1}$ i $\Delta y_{i,i+1}$, pa se približavamo trenutnoj brzini

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} \qquad (1.61)$$

Svaki se vektor može rastaviti na komponente po

uzoru na jednadžbu (1.56), pa isto vrijedi i za vektor trenutne brzine

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} \tag{1.62}$$

Usporedbom gornjih dviju jednadžbi nalazimo da vrijede jednakosti

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} \tag{1.63}$$

Ovo je važan rezultat. Komponentu brzine duž neke osi dobivamo kao derivaciju komponente prevaljenog puta duž te iste osi. Na slikama 1.20d i e nalazimo grafove funkcija $v_x(t)$ i $v_y(t)$ koje su vremenske derivacije funkcija $x(t)$ i $y(t)$ prikazanih na slikama 1.20b i c.

Grafovi na slikama 1.20d i e jednoznačno su povezani s iznosom i smjerom vektora brzine u prostoru u kojemu je putanja tijela. U nekom trenutku t_i očitamo iz grafova vrijednosti $v_x(t_i)$ $v_y(t_i)$ te možemo konstruirati vektor trenutne brzine u prostoru. Taj je vektor tangencijalan na putanju tijela (slika 1.20f).

Komponente akceleracije

Rastavljanje akceleracije na komponente slijedi po analogiji s gornjim postupkom za brzinu. Rastavimo vektor akceleracije na komponente

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} \tag{1.64}$$

Koeficijenti uz jedinične vektore povezani su s vremenskim promjenama brzine duž pojedinih osi

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \tag{1.65}$$

Grafovi na slikama 1.20g i h prikazuju funkcije $a_x(t)$ i $a_y(t)$, koje su vremenske derivacije funkcija prikazanih na slikama 1.20d i e. Očitavajući vrijednosti $a_x(t_i)$ i $a_y(t_i)$ u nekome trenutku t_i možemo pomoću njih konstruirati vektor trenutne akceleracije u prostoru gdje se nalazi putanja tijela.

Gibanje u tri dimenzije

Ako putanja tijela izlazi iz jedne ravnine, moramo za njen opis upotrebljavati potpuni kartezijev koordinatni sustav s tri osi. Sve vektore rastavljamo na tri komponente. Za vektor položaja imamo

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \tag{1.66}$$

Vremensku ovisnost položaja tijela opisujemo jednoznačno pomoću tri grafa $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$.

Brzina je dana vektorom

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k} \\ &= \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}\end{aligned} \tag{1.67}$$

Vremensku ovisnost brzine prikazujemo putem triju funkcija $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$ i $v_z = v_z(t)$. Svaka od tih funkcija predstavlja vremensku derivaciju funkcije pomaka duž odgovarajuće osi.

I konačno, za vektor akceleracije imamo

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\,\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k}\end{aligned} \tag{1.68}$$

Vremensku ovisnost akceleracije prikazujemo pomoću tri grafa za funkcije $a_x = a_x(t)$, $a_y = a_y(t)$ i $a_z = a_z(t)$, koje su vremenske derivacije odgovarajućih funkcija za brzine.

1.4.3 Svrhovitost kod rastavljanja gibanja u dvije i tri dimenzije

Putanja tijela i vrsta gibanja (jednoliko, ubrzano, itd.) imaju svoje uzroke koje ćemo proučavati u drugom poglavlju, no već sada možemo ustvrditi da ni putanja ni vrsta gibanja ne ovise o izboru koordinatnih osi. Stoga imamo slobodu u izboru koordinatnog sustava jer, kakav god izbor napravili, trebalo bi biti moguće ispravno opisati gibanje tijela. Međutim, u praksi ipak težimo ka maksimalnoj jednostavnosti u opisu gibanja, pa u tu svrhu nastojimo postaviti najpogodniji koordinatni sustav. Ponekad također vodimo brigu o okruženju u kojemu se gibanje odvija, pa odabiremo koordinatni sustav čije osi slijede neke istaknute smjerove u okruženju. Ova nam načela mogu postati jasnija kada ih se razmotri na nekim primjerima.

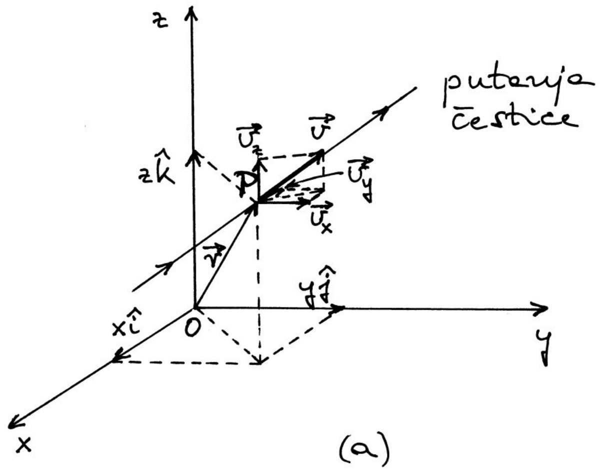
Moguće rastavljanje gibanja po pravcu

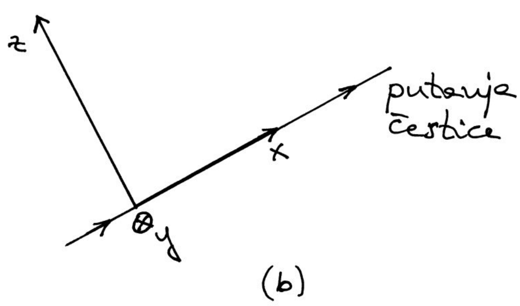
Na slici 1.21a prikazana je putanja tijela koje se giba po pravcu. Takvo gibanje možemo analizirati u proizvoljnom koordinatnom sustavu od kojih je jedan prikazan na istoj slici.

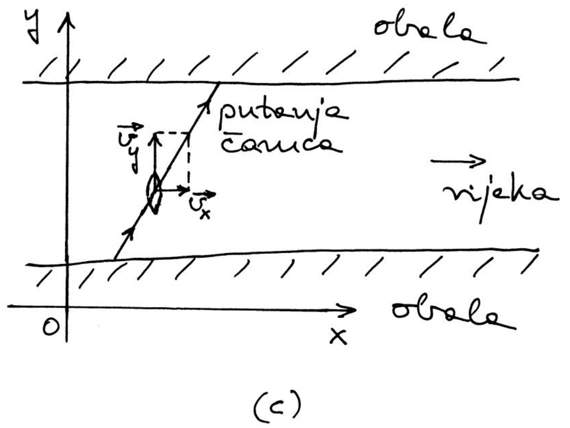
Vektor položaja $\vec{r}$ ima tri komponente, pa bi nam za prikaz vremenske ovisnosti prevaljenog puta bila potrebna tri grafa. Vektori brzine $\vec{v}$ i akceleracije $\vec{a}$ leže na putanji tijela, tako da i oni imaju po tri komponente, te je i njihov opis složen.

Matematičku jednostavnost opisa gibanja možemo postići ako jednu od osi koordinatnoga sustava, npr. os x, postavimo tako da se poklapa s putanjom tijela, kao što je prikazano na slici 1.21b. Orijentacije osi y i z nisu tada više ni važne. Svi vektori $\vec{r}$, $\vec{v}$ i $\vec{a}$ leže na osi x, pa imaju samo jednu komponentu. Analiza vremenske ovisnosti gibanja identična je onoj koja je uvedena u odjeljku 1.3 za gibanje po pravcu s, uz eventualnu zamjenu oznake s sa x.

Međutim, ima slučajeva kada ne postupamo po kriteriju matematičke jednostavnosti. Uzmimo primjer gibanja čamca koji prelazi s jedne obale rijeke na drugu. U pojednostavljenu modelu, voda teče jednakom brzinom na cijeloj širini rijeke. Ako se čamac usmjeri okomito na smjer toka rijeke i pokreće ga motor, njegovo će stvarno gibanje biti koso na taj smjer zbog toga što ga i voda zanosi (slika 1.21c). Gibanje čamca se odvija na pravcu, no iz praktičnih nas razloga često zanima zasebno gibanje čamca okomito na smjer toka rijeke i njegovo gibanje nizvodno. Zato nam može biti korisno postavljanje koordinatnih osi duž tih smjerova, kao što je i prikazano na slici 1.21c.





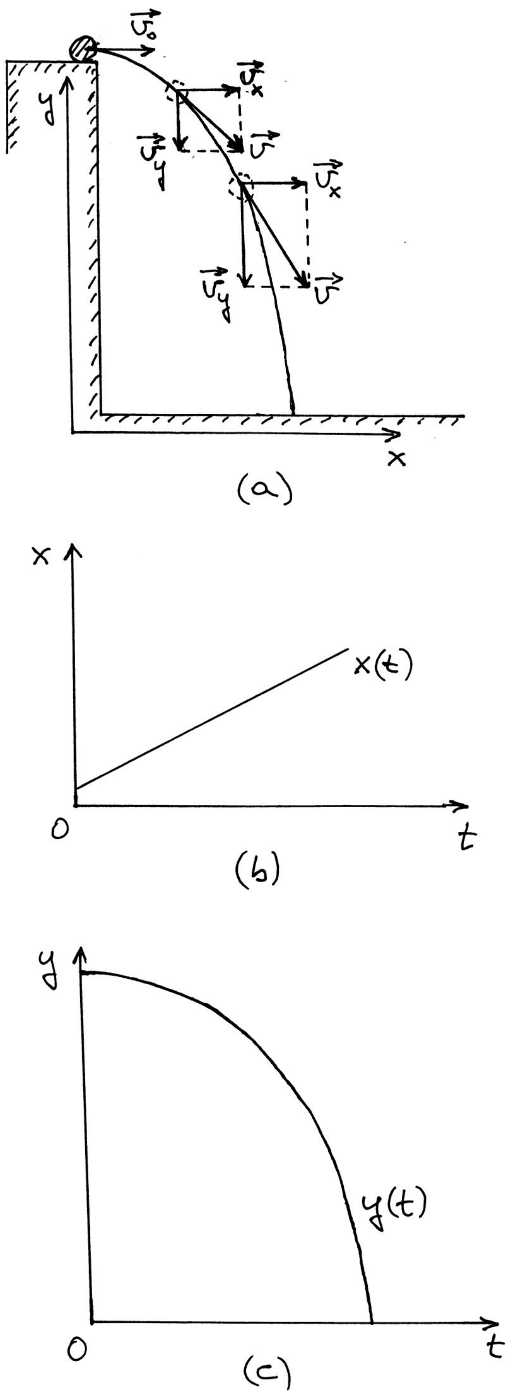


Slika 1.21: (a) Putanja tijela (pravac) u koordinatnom sustavu $Oxyz$. Vektor trenutnog položaja tijela ima tri komponente, a isto tako i vektor trenutne brzine. (b) Pojednostavljenje u opisivanju gibanja može se postići ako se jedna od osi koordinatnog sustava položi duž pravca po kojem se tijelo giba. (c) Putanja tijela je ravna linija, ali os koordinatnog sustava ipak ne postavljamo u tom smjeru, nego tako da možemo očitije analizirati položaj čamca prema okolini.

Slično bismo postupili i kod analize kotrljanja kuglice niz kosinu. Iako se radi o pravčastoj putanji za koju bi bila dovoljna jedna os, najčešće nas interesira rastavljanje gibanja duž horizontalne i vertikalne osi.

Rastavljanje gibanja kod horizontalnog hica

Horizontalni hitac nastaje kada tijelu, koje miruje na rubu nekog potpornja, damo u trenutku $t = 0$ neku početnu brzinu $\vec{v}_0$. Primjer je prikazan na slici 1.22a. Gibanje koje potom nastaje poznato nam je iz svakodnevnog života. U drugome ćemo poglavlju upoznati uzroke koji utječu na oblik gibanja tijela, a za sada prihvatimo kao gotov rezultat da putanja tijela ima oblik parabole kojoj je os vertikalna, a tjeme u početnoj točki gibanja.



Slika 1.22: (a) Nakon horizontalnog hica tijelo se giba po paraboli. Horizontalna komponenta brzine ostaje konstantna tijekom gibanja, dok vertikalna komponenta raste. (b) Vremenska ovisnost gibanja tijela duž osi x. (c) Vremenska ovisnost gibanja tijela duž (negativnog) smjera osi y.

Za analitički opis ovoga gibanja potrebne su nam barem dvije prostorne osi, koje bismo u načelu mogli postaviti bilo kako, no, zbog simetrije putanje, a iz zbog naše zainteresiranosti da upoznamo visinsku komponentu puta i horizontalni pomak tijela, postavljamo jednu os horizontalno, a drugu vertikalno. Takav odabir koordinatnog sustava prikazan je na slici 1.22a.

U drugome ćemo poglavlju također objasniti zašto se kod horizontalnoga hica gibanje odvija konstantnom brzinom v_0 duž horizontalne osi, dok se vertikalno prema dolje tijelo giba jednoliko ubrzano, tj. konstantnom akceleracijom koju označavamo posebnim simbolom g. Ovdje samo unosimo te rezultate u sliku 1.22a. Vektor brzine $\vec{v}$ prikazan je u nekim točkama na putanji. Tijekom vremena, brzina mijenja iznos i smjer, no uvijek tako da horizontalna komponenta ostane konstantna, a raste samo vertikalna.

Na temelju toga, možemo na slici 1.22b prikazati vremenske ovisnosti prevaljenog puta duž osi x i y. Pomak duž osi x raste linearno jer je brzina duž te osi konstantna, dok pomak duž osi y počinje od vrijednosti y_0 na kojoj se tijelo nalazilo u trenutku $t = 0$ i smanjuje se tijekom vremena sve dok tijelo ne padne na tlo ($y = 0$).

Napomena: Valja dobro razlikovati dvije parabole na slikama 1.22a i c. Parabola na slici 1.22a predstavlja putanju tijela u dvodimenzionalnom prostoru. Za razliku od nje, parabola na slici 1.22c nije putanja tijela u prostoru jer se na osi abscisa nalazi vrijeme. To je graf funkcije $y(t)$.

Uistinu vidimo da je rastavljanje jedinstvenog gibanja tijela na gibanja duž horizontalne i vertikalne osi pogodan izbor jer svako od tih gibanja zasebno ima neku jednostavnu pravilnost.

1.5 Opis kružnog gibanja

Kružno gibanje susrećemo u praksi kod svake vrtnje tijela oko neke osi. Još češće susrećemo razna gibanja tijela po zakrivljenoj putanji gdje možemo za neki dio putanje reći da, barem približno, predstavlja luk neke zamišljene kružnice. Takav slučaj predstavlja npr. gibanje automobila ili vlaka u zavoju. Geometrijski gledano, kružnica je krivulja s visokim stupnjem simetrije. Stoga možemo očekivati

da će matematički opis kružnog gibanja biti jako jednostavan.

1.5.1 Kinematičke veličine kod kružnog gibanja

Za određivanje nekog kružnog gibanja moramo ponajprije utvrditi ravninu u kojoj bi kružnica trebala ležati, zatim središte kružnice i konačno njen radijus. Time je definirana kružnica kao putanja tijela. Za vektorski opis trenutnog položaja tijela potrebno je imati ishodište O. Njega možemo postaviti proizvoljno u bilo kojoj točki, kao npr. na slici 1.23a. Na primjeru dvaju položaja tijela tijekom gibanja uočavamo da se vektor položaja $\vec{r}$ mijenja po iznosu i po smjeru. Stoga bi opis kružnog gibanja bio matematički prilično složen. No, možemo uočiti da se svaki vektor položaja dade prikazati kao zbroj dvaju vektora

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}\,' \tag{1.69}$$

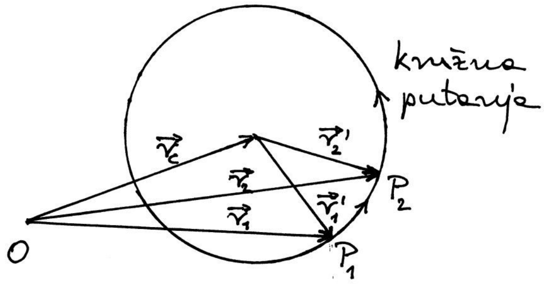
gdje je $\vec{r}_c$ vektor položaja središta kružnice u odnosu na ishodište O, a $\vec{r}\,'$ je vektor koji ide od središta kružnice do zadane točke na kružnici. Kod gibanja tijela po kružnici, vektor $\vec{r}_c$ ostaje konstantan, a mijenja se samo vektor $\vec{r}\,'$. Ako želimo pratiti vremenski tijek gibanja, dovoljno je analizirati vektor $\vec{r}\,'$. Stoga ne gubimo ništa na općenitosti opisa kružnog gibanja ako ishodište postavimo u središte kružnice kao na slici 1.23b i time eliminiramo vektor $\vec{r}_c$, a $\vec{r}\,'$ postane zapravo $\vec{r}$. Iznos vektora $\vec{r}$ ostaje sada stalan (radijus kružnice), a mijenja se samo njegov smjer, pa matematički opis gibanja postaje jednostavniji.

U odjeljku 1.2 upoznali smo neka opća pravila za kinematičke vektorske veličine, koja ovdje možemo primijeniti na kružno gibanje. Vektor trenutne brzine uvijek je tangencijalan na putanju tijela. Razlog je sadržan u jednadžbi (1.17) po kojoj infinitezimalni put $d\vec{r}$ nužno ima smjer brzine $\vec{v}$. Međutim, iznos brzine može se mijenjati tijekom gibanja, kao što npr. pokazuje slika 1.23c.

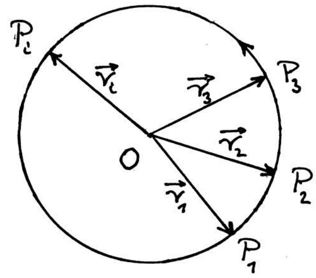
Analizirajmo nekoliko trenutnih situacija prikazanih na slici 1.23d. Ako infinitezimalna promjena brzine $d\vec{v}$ ima neiščezavajuću komponentu duž smjera trenutne brzine $\vec{v}$, povećavat će se iznos brzine, a ukoliko $d\vec{v}$ ima komponentu u suprotnom smjeru od $\vec{v}$, iznos brzine se smanjuje. Prema poznatoj jednadžbi (1.21), infinitezimalna promjena brzine $d\vec{v}$ uvijek ima isti smjer kao vektor trenutne akceleracije $\vec{a}$. Tako su na slici 1.23d prikazane i trenutne akceleracije za pretpostavljeno kružno gibanje tijela. Uočavamo i točku u kojoj se iznos brzine ne mijenja, što vidimo po tome da promjena brzine i akceleracija nemaju komponente niti u smjeru brzine, niti suprotno od smjera brzine, nego samo okomito na smjer trenutne brzine.

Centripetalna akceleracija

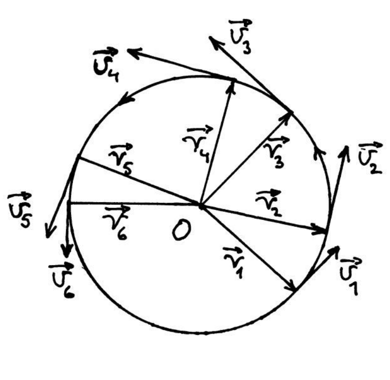
Dosadašnja nas je analiza dovela do zaključka da kod kružnog gibanja uvijek postoji komponenta ak-



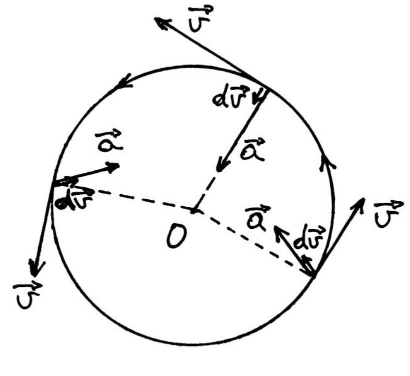
(a)



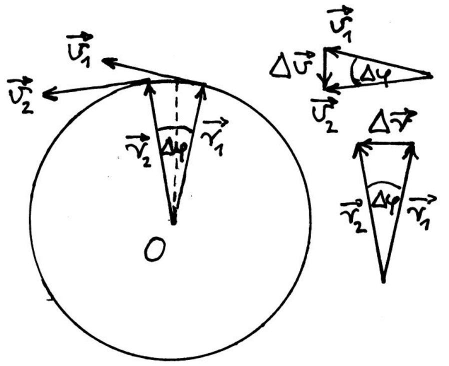
(b)



(c)



(d)



(e)

Slika 1.23: (a) Vektorski opis kružnog gibanja s proizvoljno postavljenim ishodištem O. Kao primjer su naznačene dvije točke na putanji i pripadni vektori položaja s obzirom na odabrano ishodište. (b) Jednostavniji se opis kružnog gibanja postiže postavljanjem ishodišta u središte kružnice. (c) Vektor trenutne brzine je uvijek okomit na vektor radijusa, a njegov iznos se može mijenjati tijekom gibanja. (d) Tijekom gibanja vektor promjene brzine $d\vec{v}$ može imati komponentu duž smjera trenutne brzine (ubrzavanje), ili komponentu u suprotnom smjeru od trenutne brzine (usporavanje). Ako je $d\vec{v}$ okomit na $\vec{v}$ iznos brzine se ne mijenja. (e) Primjer jednolikog gibanja po kružnici. Pomoćni crteži ukazuju na jednadžbu (1.70).

celeracije u smjeru prema središtu kružnice. Za nju se rabi naziv *centripetalna akceleracija* (lat. *centrum - središte* i *petere - težiti*). Razmotrimo odnos između centripetalne akceleracije, trenutne brzine i radijusa kružnice.

Na slici 1.23e prikazano je kružno gibanje na dijelu puta na kojemu se brzina $\vec{v}$ ne mijenja po iznosu, nego samo po smjeru. Od jedne do druge bliske točke zakrene se vektor položaja za neki kut $\Delta\varphi$. Za isti se kut zakrene i vektor brzine, jer on uvijek mora biti okomit na vektor položaja.

Translacijom vektora položaja i brzina na pomoćni crtež pokraj kružnice, možemo naći vektorske razlike $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ i $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. I ova dva vektora su okomiti jedan na drugoga. Vektor promjene brzine $\Delta\vec{v}$ odnosi se na prevaljeni put između dviju zadanih točaka, pa je fizikalno opravdano da zamislimo njegovu translaciju od pomoćnog crteža do sredine toga puta. U tom bi slučaju vektor promjene brzine $\Delta\vec{v}$ imao točno smjer prema središtu kružnice (duž crtkane linije). Stoga bi i vektor srednje akceleracije $\bar{\vec{a}}_c = \Delta\vec{v}/\Delta t$ također bio usmjeren prema središtu kružnice.

Interesira nas iznos vektora srednje akceleracije $\left|\bar{\vec{a}}_c\right| = \bar{a}_c$. U tu svrhu razmotrimo trokute na pomoćnom crtežu u slici 1.23e. Kut $\Delta\varphi$ jednak je kod obaju trokuta, pa vrijedi jednakost omjera

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \tag{1.70}$$

gdje je uvaženo da se iznos brzine ne mijenja, tj. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, a isto se tako ne mijenja ni iznos vektora položaja $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$. Iz jednadžbe (1.70) slijedi $|\Delta\vec{v}| = (v/r)\,|\Delta\vec{r}|$, pa za iznos srednje akceleracije dobivamo

$$\bar{a}_c = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \tag{1.71}$$

Ako smanjujemo vremenski interval Δt, tj. odabiremo točke sve bliže jedna drugoj, omjer $|\Delta\vec{r}|\,/\Delta t$ postaje jednak iznosu brzine v, pa dobivamo konačan izraz za iznos akceleracije $a_c = v^2/r$. Pri tome vektor akceleracije zadržava smjer prema središtu kružnice, tako da trenutnu centripetalnu akceleraciju možemo napisati u vektorskom obliku

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \tag{1.72}$$

gdje je $\hat{r}$ jedinični vektor koji ima smjer od središta kružnice prema točki u kojoj se trenutno nalazi tijelo. Predznak minus ukazuje na činjenicu da centripetalna akceleracija ima suprotan smjer.

Korisno je analizirati netom dobiveni rezultat za centripetalnu akceleraciju. Za gibanje nekog tijela po kružnici zadanog radijusa r, centripetalna akceleracija ovisi o kvadratu brzine. Naime, uz veći

iznos brzine ide i brže zakretanje smjera vektora brzine, što sve dovodi do veće centripetalne akceleracije. Ako je iznos brzine u vremenu konstantan, onda i centripetalna akceleracija zadržava isti iznos. Međutim, ako se iznos brzine mijenja tijekom kružnog gibanja tijela, tada se mijenja i centripetalna akceleracija. U svakom trenutku imamo neki iznos trenutne brzine v i odgovarajući iznos trenutne centripetalne akceleracije proporcionalan s v^2.

U općenitom slučaju, trenutna akceleracija može, pored centripetalne, imati i tangencijalnu komponentu

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t \tag{1.73}$$

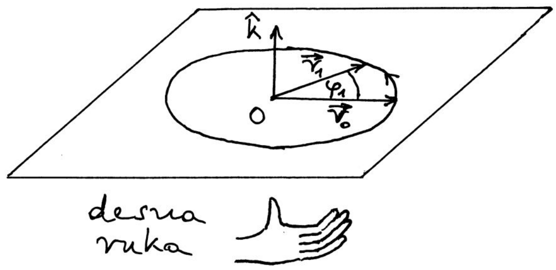
Tangencijalna komponenta akceleracije $\vec{a}_t$ uzrokuje promjenu iznosa brzine. Ako je $\vec{a}_t$ u smjeru trenutne brzine $\vec{v}$, onda se iznos brzine povećava, a kada $\vec{a}_t$ ima suprotan smjer, iznos brzine se smanjuje.

1.5.2 Kutne kinematičke veličine

Dosad smo opisivali kružno gibanje pomoću običnih kinematičkih veličina, tj. prevaljenog puta, brzine i akceleracije. Sada ćemo uvesti kutne kinematičke veličine pomoću kojih se također može opisivati kružno gibanje. Takav opis ima stanovitih prednosti zbog svoje matematičke jednostavnosti.

Kut zakreta oko odabranog smjera

Razmotrimo opet jedno gibanje tijela po kružnici kao na slici 1.24. Neka je u trenutku $t = 0$ označen smjer vektora položaja tijela $\vec{r}_0$, te od njega računamo kut φ_1 koji prebriše vektor položaja $\vec{r}(t)$ do trenutka t_1. Ovu promjenu položaja tijela možemo opisati bilo pomoću vektora $\vec{r}_0$ i $\vec{r}_1$, bilo uvođenjem nekih drugih veličina koje ćemo sada navesti. Ponajprije, uočimo da vektori $\vec{r}_0$ i $\vec{r}_1$ određuju jednu ravninu u prostoru. Orijentaciju neke ravnine u prostoru možemo jednoznačno povezati s jediničnim vektorom koji je okomit na tu ravninu. Neka jedinični vektor $\hat{k}$ određuje ravninu rotacije kako je prikazano na slici 1.24. Ujedno postavljamo dogovor po kojemu je smjer gibanja tijela po kružnici povezan sa smjerom jediničnog vektora $\hat{k}$ pravilom desne ruke na sljedeći način. Postavimo ispružene prste duž vektora $\vec{r}_0$, a zatim stiskanjem šake zakrećemo prste prema smjeru vektora $\vec{r}_1$. Pritom je ispružen palac nužno okomit na ravninu u kojoj se zakreću prsti, dakle i na ravninu u kojoj se odvija kružno gibanje, te nam pokazuje smjer jediničnog vektora $\hat{k}$. Možemo zaključiti da se pomak tijela po kružnici može jednoznačno odrediti pomoću smjera jediničnog vektora $\hat{k}$, kuta zakreta φ_1 i radijusa kružnice, što je ekvivalentno kao da smo odredili vektore $\vec{r}_0$ i $\vec{r}_1$.



Slika 1.24: Pomak tijela (čestice) po kružnoj putanji pri čemu radijus vektor prebriše kut φ_1. Jedinični vektor $\hat{k}$ određen je pravilom desne ruke.

Kutna brzina

Neka se tijelo giba po zadanoj kružnici tako da u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ radijus prebriše kut $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Možemo reći da se kut zakreta promjenio tako da je na početnu vrijednost φ_1 dodana promjena $\Delta\varphi$, te smo dobili konačnu vrijednost φ_2

$$\varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_2 \tag{1.74}$$

Navedena je rotacija prikazana na slici 1.25a, gdje se vidi i jedinični vektor $\hat{k}$ koji pokazuje smjer rotacije prema pravilu desne ruke. Promjena kuta zakreta $\Delta\varphi$ jednaka je razlici konačnog i početnog kuta

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{1.75}$$

Sada možemo definirati vektor srednje kutne brzine

$$\bar{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,\hat{k} \tag{1.76}$$

Smjer vektora srednje kutne brzine isti je kao i smjer vektora $\hat{k}$. Vektor $\bar{\vec{\omega}}$ prikazan je također na slici 1.25a.

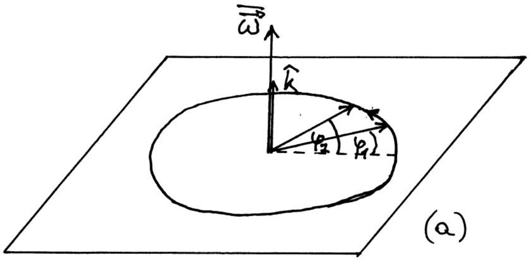
Napomena: Vektor brzine $\vec{v}$ uvijek crtamo tako da mu početak stoji uz trenutni položaj tijela. Time simbolički ukazujemo na činjenicu da se taj vektor odnosi upravo na tijelo. No, i kutna brzina se također odnosi na gibanje tijela. Međutim, dogovorno se početak vektora kutne brzine stavlja u središte kružnice kako bi se ukazalo na os oko koje se odvija kružno gibanje.

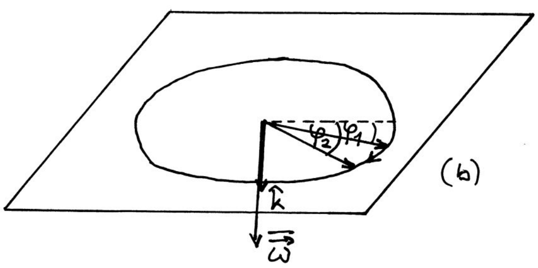
Kod rotacije u suprotnom smjeru, mijenja se smjer vektora $\hat{k}$, kao što je prikazano na slici 1.25b. Tada i vektor srednje kutne brzine ima suprotan smjer.

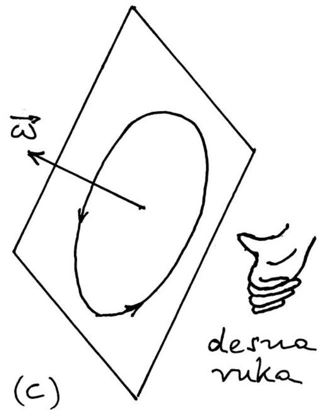
Ako smanjujemo vremenski interval Δt tako da on postaje diferencijal dt, smanjuje se i promjena kuta zakreta $\Delta\varphi$ tako da on postaje diferencijal $d\varphi$. Za *trenutnu kutnu brzinu* možemo pisati

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{1.77}$$

gdje je uveden *vektor infinitezimalne rotacije* $d\vec{\varphi} = d\varphi\,\hat{k}$. To je vektor koji ima smjer kao $\hat{k}$, a iznos mu je $d\varphi$.







Slika 1.25: (a) Kružno gibanje tijela (čestice) u kojemu radijus prebriše kut $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ u intervalu vremena Δt. Označen je vektor srednje kutne brzine $\bar{\vec{\omega}}$. (b) Kružno gibanje u suprotnom smjeru. (c) Kružno gibanje u ravnini proizvoljne orijentacije uprostoru. Označen je pripadni vektor trenutne kutne brzine određen pravilom desne ruke.

Napomena: U matematičkim dopunama na kraju ovoga poglavlja obradit ćemo problem uzastopnih zakreta oko različitih osi i pokazati da se zakretima za konačne iznose kutova ne mogu pridružiti pravi vektori, ali za infinitezimalne zakrete možemo upotrebljavati vektore poput $d\vec{\varphi}$.

Vektor kutne brzine uvijek je okomit na ravninu u kojoj se odvija kružno gibanje, a smjer mu određujemo pomoću pravila desne ruke koje je prikazano na slici 1.25c. Postavimo savijene prste desne ruke tako da pokazuju smjer nekog zadanog kružnog gibanja tijela u prostoru. Ispruženi palac pokazuje nam tada smjer vektora kutne brzine.

Vrijedi i obrat, tj. ako je u prostoru zadan vektor kutne brzine, možemo postaviti ispruženi palac desne ruke u smjeru tog vektora, pa nam savijeni prsti pokazuju smjer u kojemu se odvija kružno gibanje.

Preinačimo još jednadžbu (1.77) u oblik

$$d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\,dt \tag{1.78}$$

Ako je zadana trenutna kutna brzina $\vec{\omega}$, tijelo će u sljedećem infinitezimalnom vremenskom intervalu dt izvršiti djelić kružnoga gibanja s kutom zakreta $d\vec{\varphi}$.

Jedinica za mjerenje kutne brzine. Kutna brzina je definirana jednadžbom (1.77), pa je mjerimo u radijanima u sekundi (rad s^{-1}).

Kutna akceleracija

Razmotrimo kružno gibanje kod kojega kutna brzina nije stalna. Pretpostavimo da su nam poznate kutne brzine u svim trenucima tijekom gibanja, tj. poznata nam je funkcija $\vec{\omega}(t)$. Uzmemo li jedan vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$, možemo ustanoviti da se kutna brzina promijenila od $\vec{\omega}_1$ na $\vec{\omega}_2$. Primjer je prikazan na slici 1.26a. Promjenu vektora kutne brzine pišemo kao $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$, a srednja kutna akceleracija se definira kao omjer

$$\bar{\vec{\alpha}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \tag{1.79}$$

Srednja kutna akceleracija ima smjer kao i vektor promjene kutne brzine $\Delta\vec{\omega}$. Na slici 1.26a vidimo da se u vremenskom intervalu Δt kutna brzina povećala, pa $\Delta\vec{\omega}$ ima isti smjer kao i $\vec{\omega}_1$. U tome smjeru je i vektor srednje kutne akceleracije $\bar{\vec{\alpha}}$.

U slučaju kada se kutna brzina smanjuje, vektor $\Delta\vec{\omega}$ ima suprotan smjer od $\vec{\omega}_1$, kao na slici 1.26b. Vektor srednje kutne akceleracije $\bar{\vec{\alpha}}$ uvijek ima smjer kao i vektor promjene kutne brzine $\Delta\vec{\omega}$.

Napomena: Pojava vektora $\Delta\vec{\omega}$ sa suprotnim smjerom na slici 1.26b ne znači da se promjenio smjer kružnog gibanja tijela. Smjer kružnog gibanja određuje se iz vektora $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ po pravilu desne ruke. Budući da su na slici 1.26b oba vektora kružne brzine u istome smjeru, moramo zaključiti da se smjer kružnog gibanja nije promijenio. Kružno gibanje se nastavilo u istome smjeru, ali nešto sporije.

Ako smanjujemo vremenski interval Δt, smanjuje se i promjena kutne brzine $\Delta\vec{\omega}$, tako da srednja kutna akceleracija teži prema *trenutnoj kutnoj akceleraciji*

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.80}$$

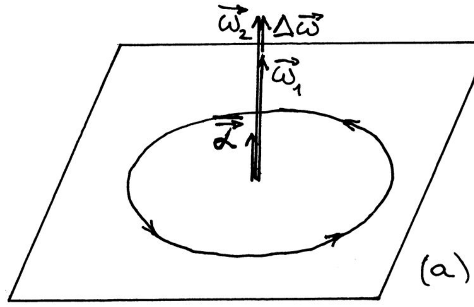
Trenutna kutna akcleracija $\vec{\alpha}$ pokazuje kako se u tome trenutku mijenja kutna brzina $\vec{\omega}$. Ako $\vec{\alpha}$ ima isti smjer kao i $\vec{\omega}$, iznos kutne brzine se povećava, tj. kružno gibanje postaje brže. Ako su im smjerovi suprotni, dolazi do usporavanja kružnog gibanja. Primjeri su prikazani na slici 1.26c.

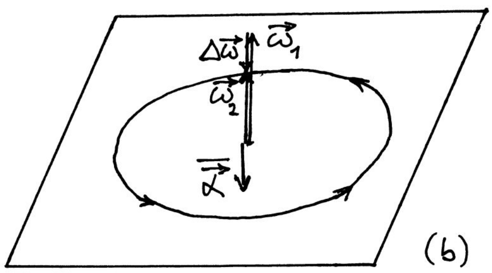
Napomena: Ubrzavanje ili usporavanje kružnog gibanja ovisi samo o *relativnom* odnosu vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{\alpha}$, a ne o tome u kojem smjeru je trenutno kružno gibanje, tj. u kojem smjeru je vektor $\vec{\omega}$. Na slici 1.26d prikazano je kružno gibanje u suprotnom smjeru, tj. vektor $\vec{\omega}$ je u suprotnom smjeru od onoga u slici 1.26c.

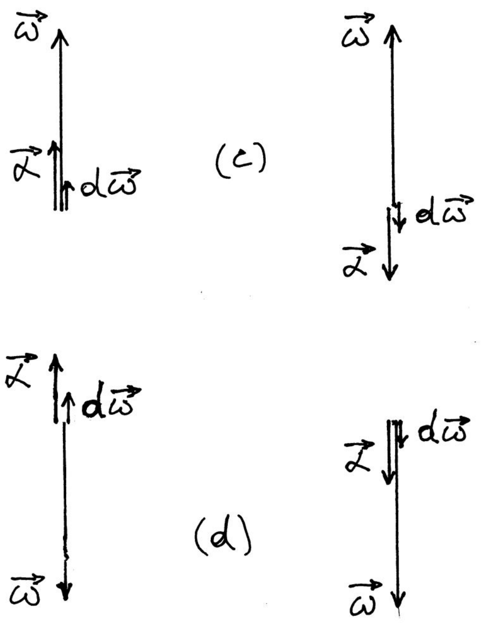
Jedinica za mjerenje kutne akceleracije. Kutna akceleracija je definirana jednadžbom (1.80). S obzirom na ranije utvrđenu jedinicu za mjerenje kutne brzine, nalazimo da se kutna akceleracija mjeri u radijanima u sekundi na kvadrat (rad s^{-2}).

Odnos kutnih i obodnih kinematičkih veličina

Nakon što smo uveli kutne kinematičke veličine, možemo se zapitati postoji li nekakva matematička povezanost između kutnih i linearnih (obodnih) kinematičkih veličina. Na slici 1.27 prikazan je dio kružnog gibanja tijela u kojem tijelo prevali put $d\vec{r}$ u vremenskom intervalu dt. Put $d\vec{r}$ je obodna veličina jer se nalazi na kružnici. Odgovarajuća







Slika 1.26: (a) Kružno gibanje u kojemu se kutna brzina povećava. Vektor srednje kutne akceleracije ima isti smjer kao i vektori kutne brzine. (b) Kada se kutna brzina smanjuje, vektor srednje kutne akceleracije ima suprotan smjer od vektora kutne brzine. (c) Vektor infinitezimalne promjene kutne brzine i trenutne kutne akceleracije u slučajevima porasta, odnosno pada kutne brzine. (d) Primjeri s obrnutim smjerom vektora kutne brzine (suprotan smjer rotacije) nego u prethodnoj slici.

kutna veličina je vektor $d\vec{\varphi}$, kojemu je iznos jednak kutu $d\varphi$ što ga prebriše vektor položaja $\vec{r}$ u dotičnom vremenskom intervalu. Za kružni isječak na slici 1.27 vrijedi poznati geometrijski odnos luka, radijusa i vršnog kuta

$$|d\vec{r}| = |d\vec{\varphi}|\,|\vec{r}| \tag{1.81}$$

Iznos $|d\vec{r}|$ je kao infinitezimalna veličina jednak luku kružnog isječka kojemu je radijus $|\vec{r}|$, a vršni kut $d\varphi$. Dakle, prevaljen put jednak je umnošku radijusa i odgovarajućeg kuta koji je prebrisan.

Ako lijevu i desnu stranu u jednadžbi (1.81) podijelimo s pripadajućim vremenskim intervalom dt, dobivamo

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}| \tag{1.82}$$

gdje je uvažen odnos $|\vec{v}| = |d\vec{r}|/dt$ i $|\vec{\omega}| = d\varphi/dt$. Iznos linearne (ili obodne) brzine jednak je umnošku iznosa kutne brzine i radijusa.

Krenimo dalje i razmotrimo moguću promjenu brzine. Možemo u trenutku t_1 imati $|\vec{v_1}| = |\vec{r}|\,|\vec{\omega_1}|$, a u trenutku t_2 odnos $|\vec{v_2}| = |\vec{r}|\,|\vec{\omega_2}|$, pa se iznos brzine promijenio za $\Delta|\vec{v}| = |\vec{r}|\,\Delta|\vec{\omega}|$.

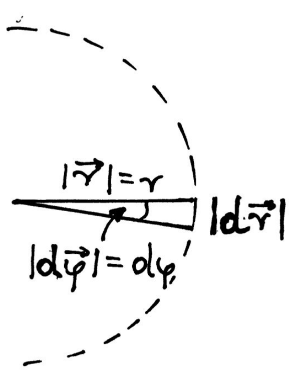
Napomena: Uočimo da je ovdje uvedena veličina $\Delta|\vec{v}| = |\vec{v_2}| - |\vec{v_1}|$ koja predstavlja promjenu samog iznosa brzine i razlikuje se od veličine $|\Delta\vec{v}| = |\vec{v_2} - \vec{v_1}|$ koja bi označavala modul vektora promjene brzine. Analogno se razlikuje $\Delta|\vec{\omega}|$ od veličine $|\Delta\vec{\omega}|$.

Kod infinitezimalnih se promjena ovaj odnos svodi na $d|\vec{v}| = r\,d|\vec{\omega}|$, pa dijeljenjem lijeve i desne strane s dt dobivamo

$$|\vec{a}_t| = |\vec{\alpha}|\,|\vec{r}| \tag{1.83}$$

gdje je $\vec{a}_t$ tangencijalna komponenta akceleracije koja je već bila uvedena u jednadžbi (1.73). Dakle, iznos tangencijalne komponente akceleracije dobivamo ako iznos kutne akceleracije pomnožimo s radijusom kružnice.

Vidimo da u gornjim jednadžbama vrijedi uvijek isto pravilo po kojemu obodnu veličinu dobijemo kao produkt odgovarajuće kutne veličine i radijusa. No, to su jednadžbe koje uspostavljaju odnose između modula odgovarajućih vektora, a ne samih vektora. Postavlja se pitanje možemo li te odnose zapisati kao vektorske jednadžbe. Pri tome moramo imati na umu da vektori kutnih veličina imaju



Slika 1.27: Kružni isječak koji prebriše vektor položaja u infinitezimalnom intervalu vremena dt.

smjer okomit na ravninu kružnog gibanja, vektor $\vec{r}$ je na njih okomit, a vektori obodnih veličina imaju smjer tangente na kružnicu, dakle, okomiti su i na vektor $\vec{r}$ i na vektore kutnih veličina.

Rješenje postoji, no potrebno je uvesti matematički postupak množenja vektora. Nakon toga, vratit ćemo se na odnos vektorskih veličina u kružnom gibanju.

Skalarni i vektorski produkt vektora

Uzmimo sasvim općenito dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Matematički se dogovorno definiraju dvije vrste produkta vektora. *Skalarni produkt* je definiran izrazom

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{1.84}$$

gdje je θ kut između vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

Napomena: Oznaka $\cdot$ (centrirana točka) između vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ s lijeve strane znaka jednakosti je *neizostavna* kod pisanja skalarnog produkta.

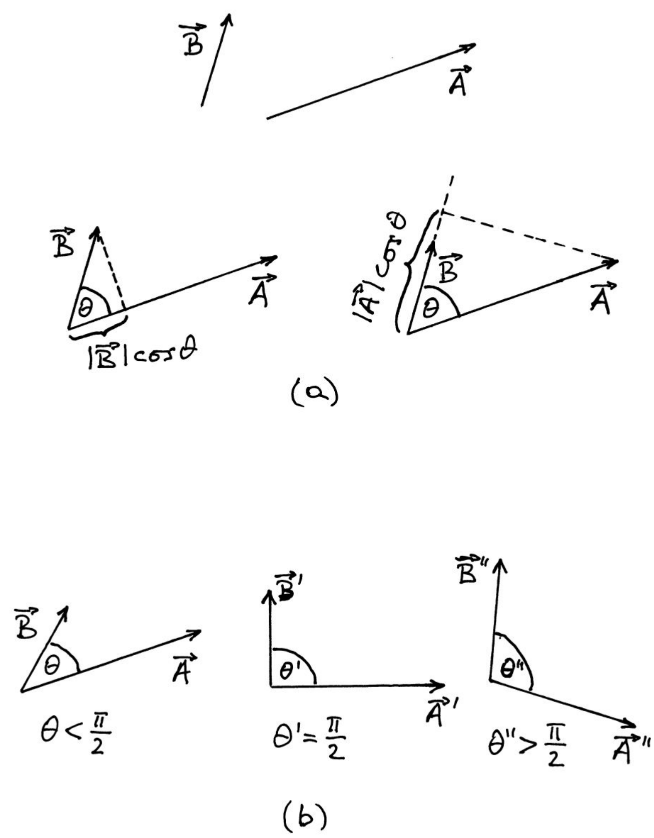
Izraz s desne strane u jednadžbi (1.84) je umnožak triju skalarnih veličina, pa je rezultat opet skalar. Zato se produkt $\vec{A} \cdot \vec{B}$ naziva skalarnim.

Na slici 1.28a prikazana su kao primjer dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Translacijom ih možemo dovesti do preklapanja početnih točaka, tako da se lako uočava kut θ među njima. Također uočavamo da je $|\vec{B}| \cos\theta$ iznos projekcije vektora $\vec{B}$ na vektor $\vec{A}$. Ako se taj iznos pomnoži s iznosom $|\vec{A}|$, dobiva se desna strana u jednadžbi (1.84), a to je upravo skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Isto tako možemo razmotriti projekciju vektora $\vec{A}$ na vektor $\vec{B}$, što je također prikazano na slici 1.28a. Iznos te projekcije je $|\vec{A}| \cos\theta$, a ako se još pomnoži s iznosom $|\vec{B}|$, dobiva se opet izraz na desnoj strani jednadžbe (1.84), tj. skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Skalarni produkt može biti pozitivna veličina, nula ili negativna veličina u ovisnosti o tome je li kut θ oštar ($\theta < \pi/2$), pravi ($\theta = \pi/2$) ili tup ($\theta > \pi/2$). Sve tri mogućnosti prikazuje slika 1.28b.

Skalarni produkt vektora često ćemo primjenjivati kasnije u ovoj knjizi. Za sada nam je korisno uočiti da uvjet okomitosti dvaju vektora možemo izraziti matematičkim zahtjevom da njihov skalarni produkt iščezava.



Slika 1.28: (a) Translacijom vektora možemo preklopiti njihove početne točke, pa kut među njima postaje uočljiv. Skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B}$ jednak je umnošku modula jednog od vektora i modula projekcije drugog vektora na prvi. (b) Kut između dvaju vektora može imati bilo koju vrijednost u intervalu $0 \leq \theta \leq \pi$.

Prijeđimo sada na definiciju *vektorskog produkta* dvaju vektora. Zorni je prikaz dan na slici 1.29a. Vektorski se produkt piše u obliku

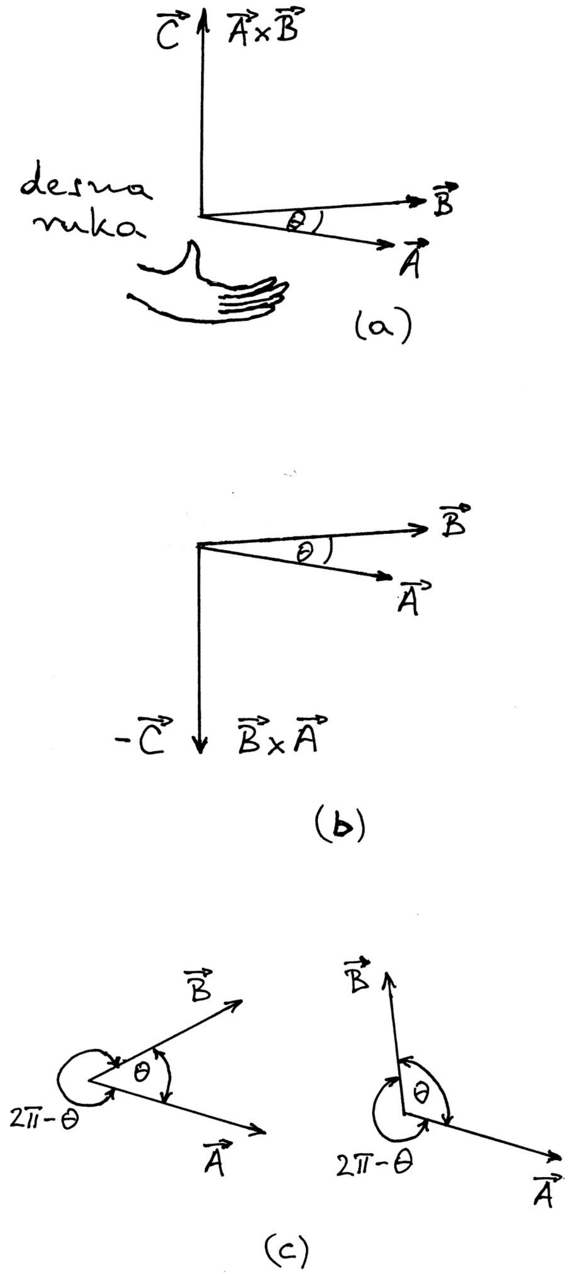
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \tag{1.85}$$

Napomena: Kod vektorskog produkta moramo *uvijek* staviti oznaku $\times$ između dvaju vektora. Nikada se ne smiju pobrkati oznake za skalarni i vektorski produkt dvaju vektora.

Rezultat vektorskog produkta dvaju vektora je novi vektor. Njegov je iznos jednak

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \tag{1.86}$$

gdje je θ opet kut među vektorima kao na slici 1.29a. Smjer novog vektora $\vec{C}$ određujemo po pravilu desne ruke. Postavimo ispružene prste desne



Slika 1.29: (a) Vektorski produkt dvaju vektora. Prvi vektor u produktu je $\vec{A}$, a drugi $\vec{B}$. (b) Vektorski produkt s obrnutim redoslijedom vektora nego u prethodnoj slici. (c) Unutarnji i vanjski kut između dvaju vektora. Kod vektorskog se produkta uvijek uzima u obzir manji od dvaju kutova.

ruke u smjer prvog vektora u produktu (vektor $\vec{A}$ u jednadžbi (1.85)) i stiskanjem šake zakrećemo prste tako da idu prema smjeru drugoga vektora u produktu (vektor $\vec{B}$ u jednadžbi (1.85). Tada nam ispruženi palac desne ruke pokazuje smjer vektora $\vec{C}$.

Kod vektorskog je produkta važan redoslijed vektora. Naime, ako u jednadžbi (1.85)) zamijenimo redoslijed vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, dobivamo kao rezultat vektor koji ima suprotan smjer od vektora $\vec{C}$, tj.

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C} \tag{1.87}$$

Kada uzmemo vektor $\vec{B}$ kao prvi, a vektor $\vec{A}$ kao drugi, onda prste desne ruke moramo zakretati u suprotnom smjeru nego na slici 1.29a. No, to je moguće jedino ako desnu ruku preokrenemo i postavimo je tako da ispruženi palac pokazuje u suprotnom smjeru.

Napomena: Uočimo da je između dvaju vektora moguće prepoznati dva kuta, jedan veći a drugi manji, kao na slici 1.29c. Kao kut θ u jednadžbi (1.86) uvijek se uzima manji kut. Tada je nužno $\theta < \pi$, pa je $\sin\theta > 0$ i dobivamo modul $|\vec{C}|$ kao pozitivnu veličinu. Također uočimo da je prste na ruci moguće savijati samo za kut manji od π.

Vektorski produkt iščezava ako su vektori kolinearni, tj. ako leže na istome pravcu, ili na paralelnim pravcima. Ako imaju isti smjer, kut među njima je $\theta = 0$, a ako su im smjerovi suprotni $\theta = \pi$. U oba je slučaja $\sin\theta = 0$, pa prema jednadžbi (1.86) dobivamo $|\vec{C}| = 0$.

Vektorske relacije kutnih i obodnih kinematičkih veličina

Sada smo sposobni pretočiti skalarne odnose iz jednadžbi (1.81), (1.82) i (1.83) u vektorske jednadžbe. Slike 1.30a, b i c prikazuju odgovarajuće kutne i obodne vektorske veličine. Uvažavajući pravilo desne ruke, nalazimo da vrijede odnosi

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \tag{1.88}$$

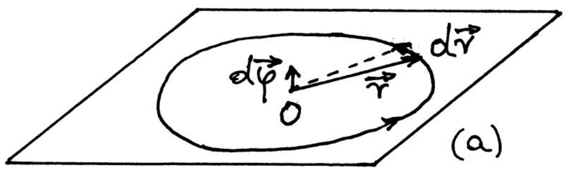
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.89}$$

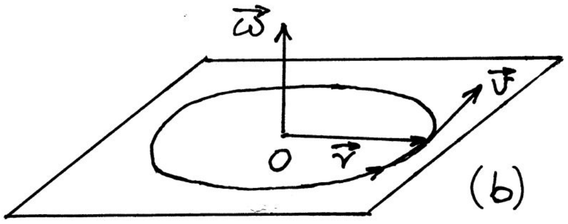
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{1.90}$$

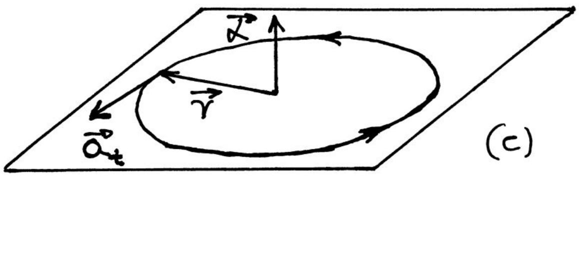
Uočimo da su vektori kutnih veličina uvijek okomiti na vektor $\vec{r}$, tako da u svakom od ovih vektorskih produkata nalazimo $\sin(\pi/2) = 1$, te su zadovoljene jednadžbe (1.81), (1.82) i (1.83).

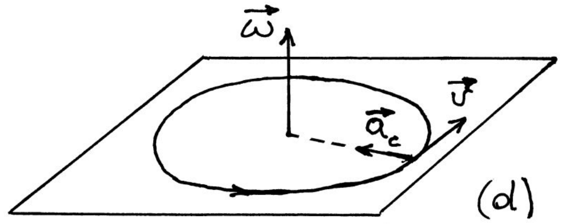
Zaključujući ovo razmatranje možemo reći da obodnu kinematičku veličinu u danome trenutku dobivamo tako da odgovarajuću kutnu kinematičku veličinu vektorski pomnožimo s trenutnim vektorom položaja tijela.

Napomena: Uz malo analize ustanovit ćemo da su jednadžbe (1.88) i (1.89) uzajamno konzistentne. Naime, ako pođemo od poznatog izraza $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\, dt$ (jednadžba (1.78)), te ga uvrstimo u jednadžbu (1.88), dobivamo izraz $d\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}\, dt$. Uvažavajući sada i jednadžbu (1.89), dobivamo $d\vec{r} = \vec{v} dt$, što je ispravan opći izraz za prevaljeni put u infinitezimalnom vremenskom intervalu dt.









Slika 1.30: (a) Obodni pomak $d\vec{r}$ dobijemo kada kutni pomak $d\vec{\varphi}$ vektorski pomnožimo s trenutnim vektorom položaja $\vec{r}$. (b) Trenutna obodna brzina jednaka je vektorskom produktu kutne brzine i trenutnog vektora položaja tijela. (c) Vektorskim produktom kutne akceleracije i trenutnog vektora položaja tijela dobivamo tangencijalnu komponentu akceleracije. (d) Centripetalna akceleracija jednaka je produktu dviju brzina, kutne i obodne.

Gdje je tu mjesto centripetalnoj akceleraciji?

Dok je brzina $\vec{v}$ uvijek tangencijalna na putanju, akceleracija to ne mora biti. Štoviše, kod zakrivljene putanje nužno postoji komponenta koja je okomita na tangentu, kao što smo raspravili u odjeljku 1.2. U slučaju kružnog gibanja imamo radijalnu komponentu akceleracije koja se naziva centripetalna akceleracija $\vec{a}_c$ i dana je jednadžbom (1.72). Za nju očito ne vrijedi pravilo postavljeno u jednadžbi (1.90), koje se odnosi *samo* na obodnu (tangencijalnu) komponentu akceleracije $\vec{a}_t$.

Gledajući iznos centripetalne akceleracije $\vec{a}_c$ prema jednadžbi (1.72), vidimo da on ovisi o iznosu trenutne brzine i radijusu, a ne ovisi o tangencijalnoj i kutnoj akceleraciji. Drugim riječima, centripetalna akceleracija postoji i u slučaju kada nema promjene brzine rotacije. Ona se javlja samim time što se mijenja smjer brzine $\vec{v}$. Uzimajući u obzir jednadžbu (1.82), možemo iznos centripetalne akceleracije u jednadžbi (1.72) preinačiti u oblik $|\vec{a}_c| = |\vec{v}|\,|\vec{\omega}|$. Dakle, iznos centripetalne akceleracije jednak je produktu iznosa dviju brzina, obodne i kutne. Uzmemo li još u obzir i smjerove tih vektorskih veličina na slici 1.30d, možemo složiti vektorsku jednadžbu

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1.91}$$

Iako ispravna, ova se jednadžba rijetko upotrebljava. Ovdje smo je zapisali uglavnom zato da istaknemo razliku prema tangencijalnoj komponenti akceleracije $\vec{a}_t$ za koju vrijedi pravilo iz jednadžbe (1.90).

Za centripetalnu akceleraciju se najčešće rabi izraz u jednadžbi (1.72), koji izravno ukazuje na smjer prema središtu kružnice. Uvažavajući jednadžbu (1.82), taj se izraz može preinačiti u ekvivalentan oblik

$$\vec{a}_c = -\,|\vec{\omega}|^2\,|\vec{r}|\,\hat{r} = -\,|\vec{\omega}|^2\,\vec{r} \tag{1.92}$$

I ovdje vidimo da centripetalna akceleracija ovisi o kvadratu brzine vrtnje.

1.5.3 Vrste kružnih gibanja

Kod proučavanja gibanja po pravcu u odjeljku 1.3 istaknuli smo dvije posebne vrste gibanja. Svako od njih karakterizirano je po tome što je jedna od kinematičkih veličina konstantna. Jednoliko gibanje po pravcu definirano je konstantnom brzinom ($\vec{v} = konst.$), dok je kod jednoliko ubrzanog gibanja konstantna akceleracija ($\vec{a} = konst.$).

Po analogiji s gibanjem po pravcu, možemo sada istaknuti dvije posebne vrste kružnog gibanja. Za njih je karakteristično da je jedna od *kutnih* kinematičkih veličina konstantna.

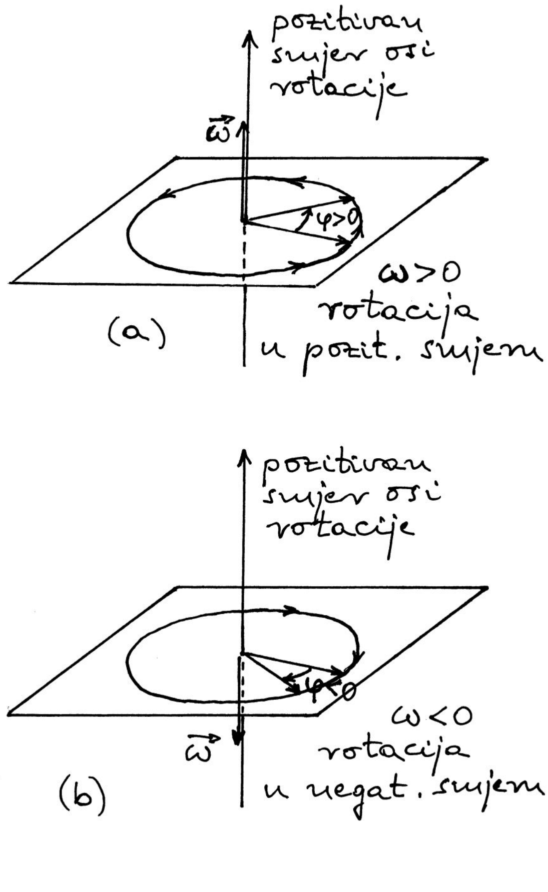
Jednoliko gibanje po kružnici

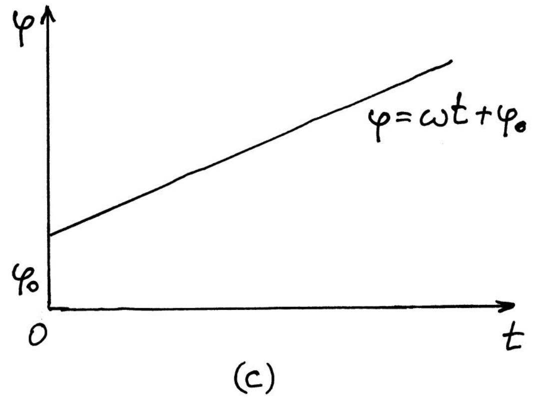
Kružno gibanje koje se odvija uz konstantnu kutnu brzinu ($\vec{\omega} = konst.$) naziva se *jednoliko gibanje po kružnici.* U takvu gibanju, kutna akceleracija iščezava ($\vec{\alpha} = 0$), jer nema promjene kutne brzine. Iz toga slijedi da jednoliko gibanje po kružnici možemo vrlo lako odrediti pomoću kutnih kinetičkih veličina.

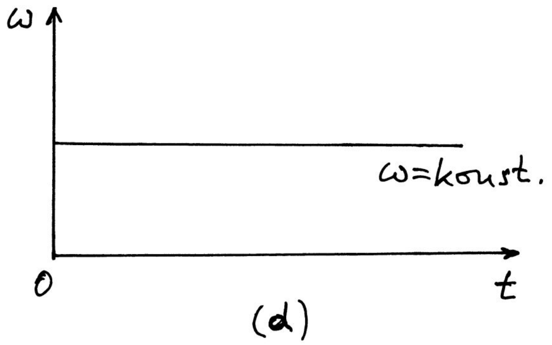
Ako pak krenemo analizirati ovo gibanje pomoću obodnih kinematičkih veličina, nalazimo da se iznos brzine $|\vec{v}|$ ne mijenja, ali se mijenja smjer vektora $\vec{v}$ tijekom vremena. Što se tiče akceleracije, tangencijalna komponenta $\vec{a}_t$ iščezava jer se iznos brzine ne mijenja, no postoji centripetalna akceleracija. Ona je stalna po iznosu, ali joj se mijenja smjer kako vektor $\vec{r}$ rotira tijekom vremena.

Ova usporedba dviju vrsta kinematičkih veličina, kojima se može opisati jednoliko gibanje po kružnici, jasno pokazuje da je jednostavnost na strani kutnih kinematičkih veličina. Stoga ćemo pomoću njih nastaviti analizu ovoga gibanja. Slike 1.31a i b prikazuju kružna gibanja s time da je na osi rotacije proizvoljno odabran jedan smjer kao pozitivan. Tada je moguće kut zakreta φ smatrati algebarskom veličinom, koja može biti pozitivna ($\varphi > 0$), ili negativna ($\varphi < 0$). Za rotaciju koja je sukladna s pravilom desne ruke (savijeni prsti pokazuju smjer zakretanja, a ispruženi palac pozitivan smjer osi rotacije) kažemo da se odvija u *pozitivnom smjeru.* Kako se vidi iz slike 1.31a, kod rotacije u pozitivnom smjeru vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ ima smjer pozitivne osi rotacije. Zgodno je smatrati i kutnu brzinu ω algebarskom veličinom, koja je u tome primjeru pozitivna ($\omega > 0$). Slika 1.31b prikazuje rotaciju u negativnom smjeru s $\varphi < 0$ i $\omega < 0$.

Neka je u trenutku $t_0 = 0$ tijelo imalo položaj kojemu odgovara kut φ_0, računajući od nekog proizvoljno odabranog smjera kao referentnog. Postavlja se pitanje koliki će biti kut φ u nekom trenutku t, tj. kako glasi funkcija $\varphi = \varphi(t)$. Poslužimo se







Slika 1.31: (a) Na osi rotacije odabran je jedan od smjerova kao pozitivan. Za rotaciju prikazanu na slici kažemo da se odvija u pozitivnom smjeru jer je algebarska veličina $\omega > 0$. (b) Prikaz rotacije u negativnom smjeru uz $\omega < 0$. (c) Vremenska ovisnost prebrisanog kuta kod jednolikog gibanja po kružnici. (d) Grafički prikaz vremenske ovisnosti kutne brzine.

općim pravilom o odnosu derivacije i integrala (jednadžba (1.46)) pa možemo pisati

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \omega \quad \Longrightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt \qquad (1.93)$$

Budući da je ω konstantna veličina, integral je jednostavan, te dobivamo

$$\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0) \qquad (1.94)$$

Ovdje smo pisali $t - t_0$ za vremenski interval, no ako je $t_0 = 0$, onda pišemo samo t, ali taj simbol ima značenje vremenskog intervala koji protekne od trenutka koji smo odabrali za $t = 0$. U tom slučaju možemo pisati

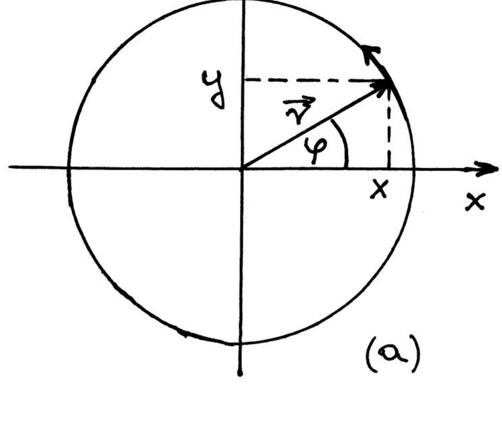
$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \qquad (1.95)$$

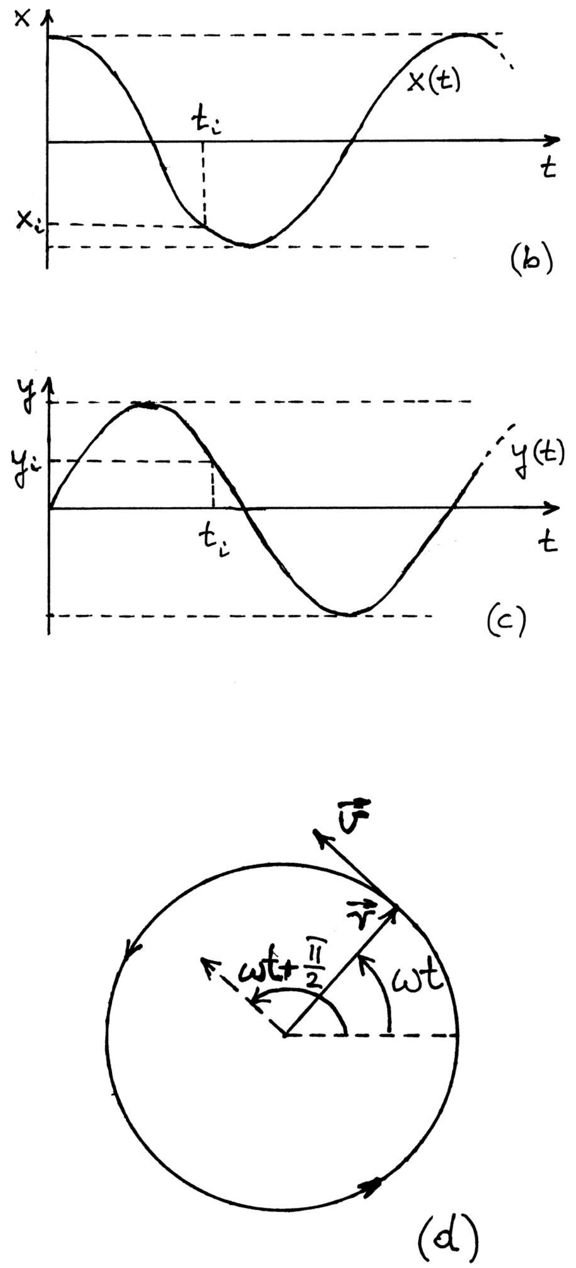
Dobili smo rezultat koji je potpuno analogan onome u jednadžbi (1.44) za jednoliko gibanje po pravcu. Kut φ je ovdje analogan prevaljenom putu s, a konstantna kutna brzina ω analogna je brzini v kojom se tijelo giba po pravcu. Grafičke prikaze donose slike 1.31c i d.

Rastavljanje jednolikog gibanja po kružnici na komponente

Gibanje po kružnici poseban je slučaj gibanja u ravnini. Stoga je moguće promatrati ga kao rastavljenog u dvije dimenzije, tj. duž dviju međusobno okomitih osi u ravnini rotacije. Postavimo u tu svrhu desni koordinatni sustav kao na slici 1.31a. Ishodište O stavljeno je u središte kružnice po kojoj se giba tijelo, a osi x i y su postavljene u ravninu rotacije. Os z nije prikazana, ali njen pozitivan smjer izlazi iz ravnine crtnje i usmjeren je prema nama.

Postupajući onako kako smo naučili u odjeljku 1.4, rastavimo vektor položaja na komponente $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$, gdje su, prema slici 1.32a, komponente $x = r\cos\varphi$, a $y = r\sin\varphi$. No, kod jednolikog gibanja po kružnici, kut φ mijenja se u vremenu prema jednadžbi (1.95). Radi jednostavnosti uzmimo da je $\varphi_0 = 0$, tj. da se u $t = 0$ vektor položaja nalazio duž pozitivnog smjera osi x, pa funkcija $\vec{r}(t)$ postaje





Slika 1.32: (a) Rastavljanje vektora položaja čestice u kružnom gibanju na komponente duž osi x i y. (b) Vremenska ovisnost pomaka čestice duž osi x kod jednolikog gibanja po kružnici. (c) U tome gibanju, čestica se istodobno pomiče i duž osi y. (d) Zorni prikaz vektora brzine $\vec{v}$ koji je uvijek fazno pomaknut za $\pi/2$ ispred trenutnog vektora položaja $\vec{r}$.

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} \qquad (1.96)$$

Putanju kružnog gibanja tijela opisuje vrh vektora $\vec{r}$ koji rotira kutnom brzinom ω. To je, pak, ekvivalentno kao da tijelo izvodi *istodobno* dva gibanja, jedno duž osi x prema funkciji $x(t) = r\cos(\omega t)$, te drugo duž osi y prema funkciji $y(t) = r\sin(\omega t)$. Stoga grafički prikaz vremenske ovisnosti gibanja tijela po putanji možemo ostvariti pomoću dva grafa kao na slikama 1.3b i c. Njih moramo promatrati kao jednu cjelinu. Npr. u nekom trenutku t_i možemo iz jednog grafa očitati odgovarajuću vrijednost x_i, a iz drugog grafa y_i. Zajedno, par vrijednosti (x_i, y_i) predstavlja koordinate položaja tijela u trenutku t_i. Podsjetimo se da smo sličnu analizu već radili na slici 1.20c za neko općenito dvodimenzionalno gibanje.

Kako možemo izraziti vektor brzine $\vec{v}$?

Vektor brzine možemo također rastaviti na komponente $\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath}$. Prema općim pravilima koje smo utvrdili u odjeljku 1.4 imamo

$$v_x = \frac{d}{dt}x(t) \qquad , \qquad v_y = \frac{d}{dt}y(t) \qquad (1.97)$$

Derivacije trigonometrijskih funkcija dobivaju se po općem pravilu zapisanom u jednadžbi (1.27). Ovdje ćemo samo navesti rezultat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sin(\omega t) &= \omega\cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\cos(\omega t) &= -\omega\sin(\omega t) \end{aligned} \qquad (1.98)$$

Prema tome, dobivamo za vektor brzine

$$\vec{v}(t) = -r\omega\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + r\omega\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} \qquad (1.99)$$

U ispravnost ovoga izraza za vektor $\vec{v}$, možemo se uvjeriti dodatnom analizom. Ponajprije, vidimo da vektor $\vec{v}$ ima iznos $r\omega$, što je u skladu s prijašnjim rezultatom u jednadžbi (1.82). Možemo još provjeriti da izraz u jednadžbi (1.99) sadrži ispravnu vremensku ovisnost za rotaciju vektora $\vec{v}$. Naime, znamo da vektor $\vec{v}$ rotira istom kutnom brzinom kao i vektor $\vec{r}$, ali uvijek za kut $\pi/2$ ispred njega. To je prikazano na slici 1.32d gdje je vektor brzine $\vec{v}$ formalno translatiran prema središtu kružnice da bi se mogao lakše uočiti fazni kut. Ako krenemo od izraza za vektor $\vec{r}$ i dodamo u argumentima trigonometrijskih funkcija kut $\pi/2$, te uvažimo poznate

trigonometrijske relacije $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$ i $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t)$, dobili smo upravo one vremenske funkcije koje stoje u izrazu za vektor $\vec{v}$.

Uzajamnu okomitost vektora $\vec{v}$ i $\vec{r}$ možemo provjeriti na još jedan matematički način. Prisjetimo se da skalarni produkt dvaju vektora iščezava ukoliko je kut među njima $\theta = \pi/2$. Krenimo, stoga, u izračunavanje skalarnog produkta vektora $\vec{r}$ i $\vec{v}$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \Big(r\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + r\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}\Big) \cdot \Big(-r\omega\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + r\omega\cos(\omega t)\,\hat{\jmath}\Big) \quad (1.100)$$

Znak skalarnog produkta (centrirana točka) nužno je upisan i između dviju zagrada tako da se zna koju vrstu množenja izvodimo. Po općim pravilima množenja, svaki član iz prve zagrade moramo pomnožiti sa svakim članom iz druge zagrade. Tom prilikom pojavljuju se skalarni produkti jediničnih vektora. Kada se jedinični vektor množi skalarno sa samim sobom, rezultat je jednak jedinici ($\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$), dok mješoviti produkti iščezavaju zbog okomitosti vektora ($\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0$). Konačan rezultat iznosi

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -\,r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \, + \,r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0 \quad (1.101)$$

Potvrdili smo, dakle, da izrazi u jednadžbama (1.96) i (1.99) predstavljaju uzajamno okomite vektore.

A što dobivamo za vektor akceleracije?

Izraz za $\vec{v}$ u jednadžbi (1.99) možemo dalje derivirati po vremenu uz korištenje pravila navedenih u jednadžbi (1.98). Tako dobivamo akceleraciju

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= -r\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{\imath} - r\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} \\ &= -\omega^2\vec{r}\end{aligned} \quad (1.102)$$

Ovo je očekivani rezultat. Vektor akceleracije kod jednolikog gibanja po kružnici uistinu nema tangencijalne komponente. Ranije smo to tvrdili na temelju fizikalnog razmatranja po kojemu ne može postojati tangencijalna akceleracija kada nema promjene iznosa brzine. Sada smo isto utvrdili matematičkim postupkom deriviranja. Akceleracija dobivena u jednadžbi (1.102) ima samo radijalnu komponentu i to usmjerenu prema središtu. Radi se zapravo o izrazu za centripetalnu akceleraciju, koji smo već prethodno izveli drugim postupkom (jednadžba (1.92)).

Jednoliko ubrzano gibanje po kružnici

Općenito se kružno gibanje tijela ne odvija sa stalnom kutnom brzinom. Od svih kružnih gibanja s promjenljivom kutnom brzinom, posebnu važnost ima gibanje kod kojega je kutna akceleracija konstantna $\vec{\alpha} = konst.$ Takvo se gibanje naziva *jednoliko ubrzanim* gibanjem po kružnci.

Postupimo kao kod razmatranja jednolikog gibanja po kružnici, te na osi rotacije odaberimo pozitivan smjer tako da kutnu brzinu i kutnu akceleraciju možemo razmatrati kao algebarske veličine. Jednoliko ubrzano gibanje po kružnici zadano je tada konstantnom akceleracijom

$$\alpha = konst. \quad (1.103)$$

Neka je u trenutku t_0 kutna brzina iznosila ω_0. Kutnu brzinu u ostalim trenucima možemo naći pomoću postupka integracije

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \alpha\,(t - t_0) \quad (1.104)$$

Ovaj je rezultat analogan onome za jednoliko ubrzano gibanje po pravcu u jednadžbi (1.48). Radi matematičke jednostavnosti, često se uzima da je $t_0 = 0$, pa dobivamo

$$\omega = \alpha\, t + \omega_0 \quad (1.105)$$

Napomena: Algebarska veličina α može biti pozitivna ili negativna. U ovisnosti o njenom predznaku, kutna bzina se povećava ili smanjuje tijekom vremena.

Kut φ kojim je određen trenutni položaj tijela možemo također odrediti putem integrala

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \omega \quad \Longrightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{0}^{t} \omega\, dt \quad (1.106)$$

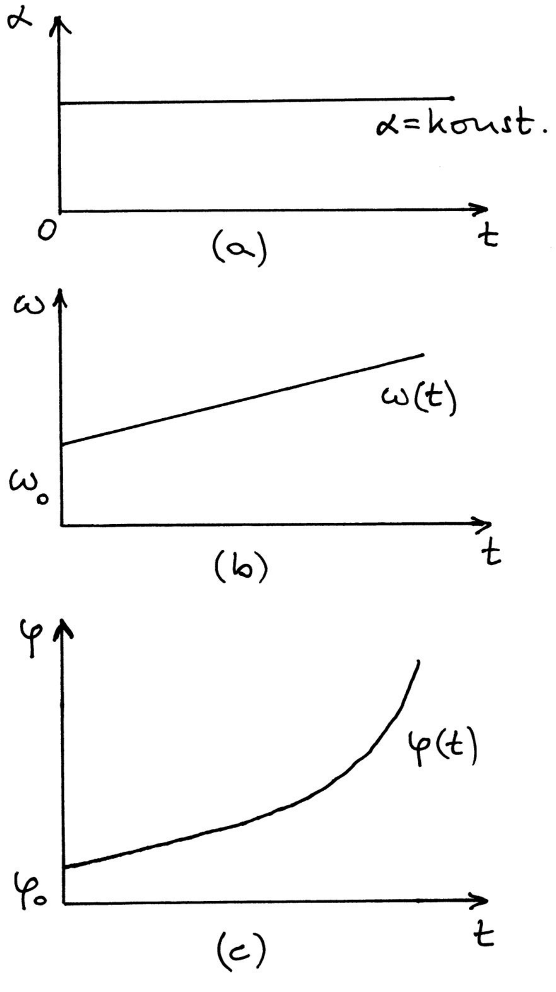
U ovome integralu ω nije konstantna veličina, nego vremenska funkcija dana jednadžbom (1.105).

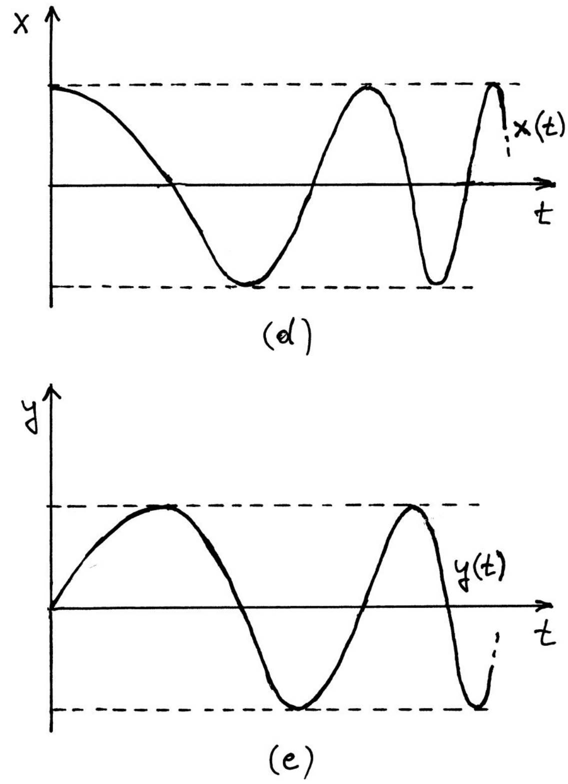
Također, za donju granicu integrala postavljeno je odmah $t_0 = 0$. Matematički je postupak isti kao kod traženja prevaljenog puta u jednoliko ubrzanom gibanju po pravcu, što smo postavili u jednadžbi (1.48). Stoga je rezultat

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0\, t + \varphi_0 \tag{1.107}$$

gdje kut φ_0 odgovara položaju čestice u trenutku $t = 0$. Vremenske ovisnosti kutnih kinematičkih veličina za jednoliko ubrzano gibanje po kružnici prikazane su na slikama 1.33a, b i c.

Jednoliko ubrzano gibanje po kružnici je također moguće promatrati kao rastavljeno duž osi x i y u ravnini rotacije. Trenutni vektor položaja uvijek možemo rastaviti na komponente $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$, tako da je $x = \cos\varphi$, a $y = \sin\varphi$. Trenutna vrijednost kuta φ dana je izrazom u jednadžbi (1.107). Očito, u ovome se slučaju kut φ ne mijenja linearno u vremenu kao kod jednolikog gibanja po kružnici, pa





Slika 1.33: (a) Grafički prikaz konstantne kutne akceleracije tijekom jednoliko ubrzanog gibanja po kružnici. (b) Linearni rast kutne brzine kod ovog gibanja. (c) Vremenska ovisnost kuta koji prebriše vektor položaja čestice u ovome gibanju. (d) i (e) Vremenske ovisnosti pomaka čestice duž osi x i y. Skraćivanje perioda titranja ukazuje na povećavanje kutne brzine rotacije.

ni funkcije $x(t)$ i $y(t)$ nisu naprosto sinusoide kao one na slici 1.32b i c. Njihov prikaz za jednoliko ubrzano gibanje nalazimo na slici 1.33d i e. Radi jednostavnosti je odabrana vrijednost $\varphi_0 = 0$, što znači da je u trenutku $t = 0$ položaj tijela bio na osi x. Iz slike se vidi da se period titranja skraćuje jer se gibanje po kružnici ubrzava.

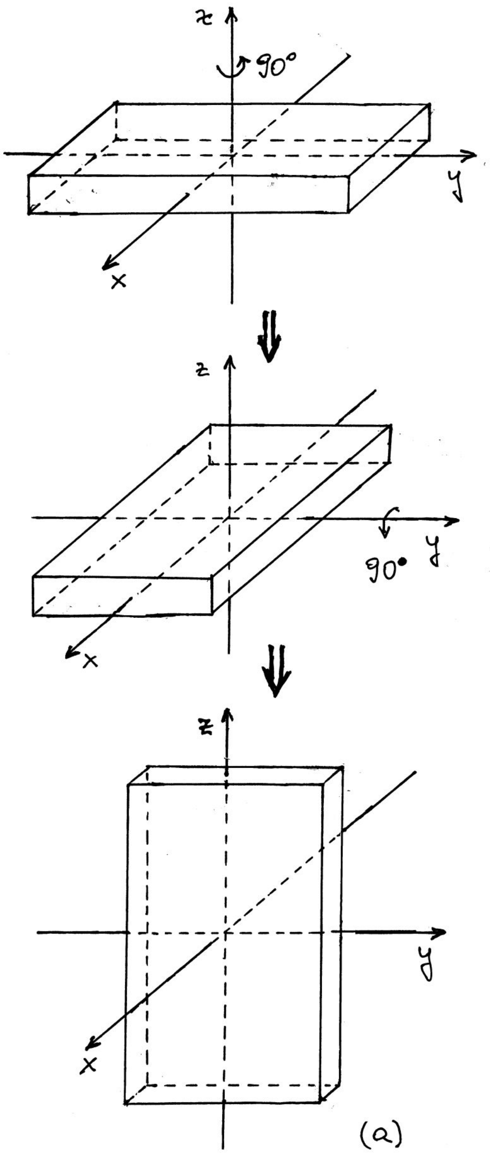
1.5.4 Matematička dopuna o rotacijama

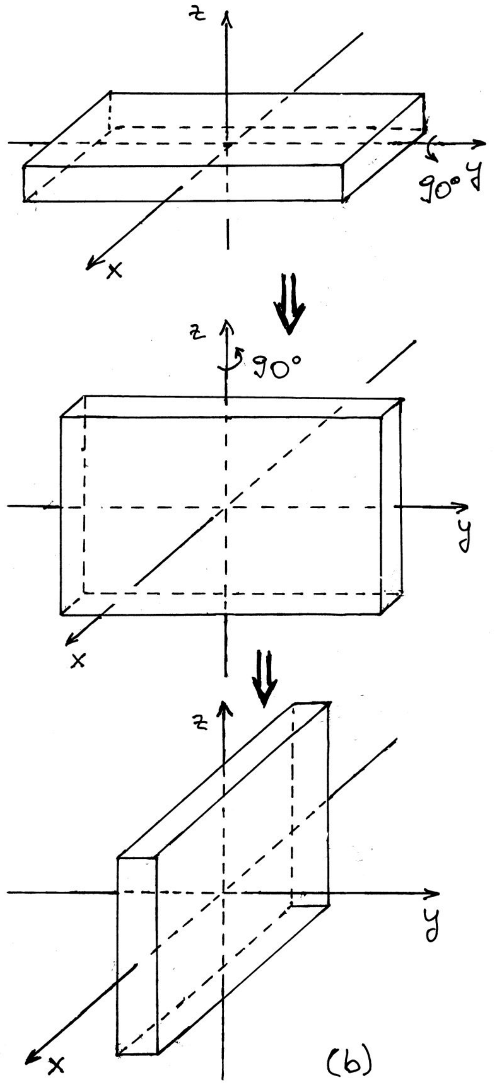
U prethodnom smo razmatranju pretpostavljali da se gibanje tijela odvija stalno po istoj kružnici. To znači da os rotacije ne mijenja orijentaciju u prostoru. Ovdje ćemo razmotriti rotacije oko različitih prostornih osi i utvrditi neka pravila koja pritom vrijede.

Uzastopni konačni zakreti tijela oko različitih prostornih osi

Kod zakretanja tijela oko različitih prostornih osi za konačne kutne iznose, nije svejedno kojim se redoslijedom obavljaju uzastopni zakreti. Na slici 1.34a prikazano je neko tijelo oblika paralelopipeda u koordinatnom sustavu $Oxyz$. Ako ga iz početnog položaja zakrenemo najprije oko osi z za kut 90°, a zatim oko osi y također za kut 90°, dobivamo konačni položaj paralelopipeda prokazan na dnu slike.

Međutim, ako promijenimo redoslijed zakretanja tako da najprije zakrenemo paralelopiped oko osi y za kut 90°, a zatim oko osi z za isti kut °90, kako prikazuje slika 1.34b, dobivamo sasvim drugačiji





Slika 1.34: (a) Promjene orijentacije paralelopipeda nakon uzastopnih rotacija za kut od 90° najprije oko osi z, a zatim oko osi y. (b) Uzastopne rotacije uz obrnuti radoslijed dovode do drugačije konačne orijentacije paralelopipeda.

konačni položaj parapelopipeda nego na slici 1.34a.

Općenito vrijedi da ishod uzastopnih rotacija za konačne kutove, npr. $\Delta\alpha$ i $\Delta\beta$ oko različitih osi ovisi o redoslijedu rotacija. Stoga konačnim rotacijama ne možemo pripisati vektore koji bi bili usmjereni duž osi rotacije, te imali iznose koji odgovaraju kutovima zakreta. Naime, da bismo neke veličine mogli smatrati vektorima, mora za njih vrijediti općenito pravilo komutacije kod zbrajanja (npr. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}=\vec{C}$), a to očito ne vrijedi za

konačne rotacije oko različitih osi.

Uzastopne infinitezimalne rotacije

Razmotrimo problem uzastopnih rotacija analitički. Slika 1.35a prikazuje točku P_0 na osi z u kojoj se nalazi neka čestica. Njene koordinate su $P_0(0,0,r)$. Nakon rotacije oko osi x za kut $\Delta\alpha$, tijelo dođe u točku P_1 kojoj su koordinate

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= -r\,\sin\Delta\alpha \\ z_1 &= r\,\cos\Delta\alpha \end{aligned} \tag{1.108}$$

Sljedećom rotacijom za kut $\Delta\beta$ oko osi y, čestica završi u točki P_2 s koordinatama

$$\begin{aligned} x_2 &= z_1\,\sin\Delta\beta = r\,\cos\Delta\alpha\,\sin\Delta\beta \\ y_2 &= y_1 = -r\,\sin\Delta\alpha \\ z_2 &= z_1\,\cos\Delta\beta = r\,\cos\Delta\alpha\,\cos\Delta\beta \end{aligned} \tag{1.109}$$

Ako pak napravimo najprije rotaciju oko osi y za kut $\Delta\beta$ (slika 1.35b), čestica se pomakne u točku $P_1^{'}$ s koordinatama

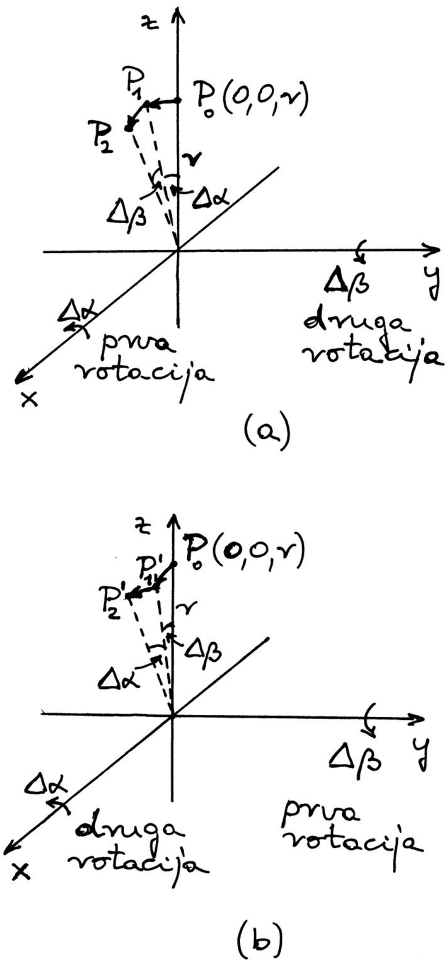
$$\begin{aligned} x_1^{'} &= r\,\sin\Delta\beta \\ y_1^{'} &= \\ z_1^{'} &= r\,\cos\Delta\beta \end{aligned} \tag{1.110}$$

U drugom koraku napravimo rotaciju oko osi x za kut $\Delta\alpha$, tako da čestica dođe u točku $P_2^{'}$ kojoj su koordinate

$$\begin{aligned} x_2^{'} &= x_1^{'} = r\,\sin\Delta\beta \\ y_2^{'} &= -z_1^{'}\,\sin\Delta\alpha = -r\,\cos\Delta\beta\,\sin\Delta\alpha \\ z_2^{'} &= z_1^{'}\,\cos\Delta\alpha = r\,\cos\Delta\beta\,\cos\Delta\alpha \end{aligned} \tag{1.111}$$

Vidimo da se koordinate točaka P_2 i $P_2^{'}$ poklapaju samo duž osi z, tj. imamo $z_2 = z_2^{'}$, dok se koordinate duž osi x i y razlikuju. Drugim riječima, čestica ne završava u istoj točki nakon dviju uzastopnih konačnih rotacija izvedenih različitim redoslijedom.

Međutim, ako odaberemo jako malene kutove zakreta, vrijede aproksimacije $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ i $\cos\Delta\alpha \approx 1$, te analogno $\sin\Delta\beta \approx \Delta\beta$ i $\cos\Delta\beta \approx 1$. Ove aproksimacije vrijede poglavito kada kutovi



Slika 1.35: (a) Čestica je početno u točki P_0. Rotacijom za kut $\Delta\alpha$ oko osi x pomakne se u točku P_1, a zatim nakon rotacije za kut $\Delta\beta$ oko osi y dospije u točku P_2. (b) Ako se obrne redoslijed izvođenja rotacija, čestica dospije u točku $P_2^{'}$.

zakreta postanu infinitezimalni, tj. $\Delta\alpha \to d\alpha$ i $\Delta\beta \to d\beta$, tako da se gornje jednadžbe svedu na

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^{'} = r\,d\beta \\ y_2 &= y_2^{'} = -r\,d\alpha \\ z_2 &= z_2^{'} = r \end{aligned} \tag{1.112}$$

Dokazali smo da za dvije uzastopne infinitezimalne rotacije oko različitih osi, ukupni rezultat ne ovisi o redoslijedu kojim su te rotacije izvedene.

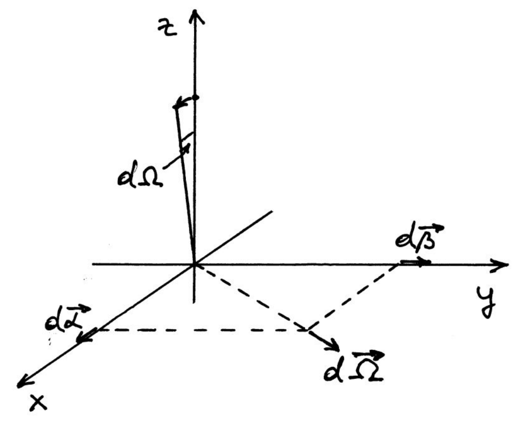
Vektori infinitezimalnih rotacija

Zaključak koji smo gore dokazali za infinitezimalne rotacije, otvara nam mogućnost da im pridružimo vektore koji imaju smjer osi rotacije, a iznos im je infinitezimalan kao i sam kut zakreta. U slučaju rotacija oko osi x i y bili bi to $d\vec{\alpha} = d\alpha\,\hat{\imath}$ i $d\vec{\beta} = d\beta\,\hat{\jmath}$. Za vektore infinitezimalnih rotacija primjenjujemo pravilo desne ruke, tj. ispruženi palac pokazuje smjer vektora, a savijeni prsti pokazuju smjer zakretanja.

Vektore infinitezimalnih rotacija uistinu smijemo zbrajati, jer za njih vrijedi pravilo komutacije kao i za sve druge vektore

$$d\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = d\vec{\beta} + d\vec{\alpha} = d\vec{\Omega} \tag{1.113}$$

Uzastopne rotacije za $d\vec{\alpha}$ i $d\vec{\beta}$, bez obzira na njihov redoslijed primjene, daju ukupan rezultat kao i jedna jedina rotacija određena vektorom $d\vec{\Omega}$. To prikazuje slika 1.36.



Slika 1.36: Uzastopne infinitezimalne rotacije predstavljene vektorima $d\vec{\alpha}$ i $d\vec{\beta}$, bez obzira na redoslijed njihova izvođenja, ekvivalentne su jednoj jedinoj rotaciji predstavljenoj vektorom $d\vec{\Omega}$.

Gornje razmatranje možemo povezati s mogućim rastavljanjem vektora kutne brzine na komponente. Ako se trenutno odvija rotacija koju predstavlja vektor $d\vec{\Omega}$, onda je trenutna kutna brzina

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y \tag{1.114}$$

Ovaj rezultat pokazuje da je kutna brzina uvijek vektor jer je povezana s vektorom infinitezimalne rotacije u intervalu vremena dt. Kutnu brzinu možemo rastaviti na komponente u nekom koordinatnom sustavu, što znači da je rotacija oko jedne osi, koja je položena duž vektora $\vec{\omega}$, ekvivalentna istodobnim rotacijama oko dvije (ili tri) koordinatne osi sukladno rastavljanju.

Provedeno razmatranje ima važnost i u slučajevima kada se rotacija ne odvija trajno u istoj ravnini, nego se ta ravnina zakreće tijekom vremena. To zapravo znači da se tijekom vremena mijenja smjer vektora infinitezimalne rotacije $d\vec{\Omega}$, pa time i smjer vektora kutne brzine $\vec{\omega}$. Ispravan rezultat za ukupno gibanje slijedi iz utvrđenog pravila po kojemu u sukcesivnim infinitezimalnim vremenskim intervalima dt smijemo zbrajati vektore infinitezimalne rotacije $d\vec{\Omega}$, bez obzira na to imaju li oni stalno isti smjer, ili ne.

Poglavlje 2

NEWTONOVI ZAKONI GIBANJA

Nakon što smo u prethodnome poglavlju upoznali metode opisivanja gibanja tijela i neke vrste jednostavnih gibanja, možemo pristupiti razmatranju njihovih uzroka. Pitanje o uzroku gibanja zaokupljalo je ljude od davnina. Antički filozof Aristotel postavio je nekoliko pravila o uzrocima gibanja tijela i na njima je izgradio cjelovitu teoriju gibanja. U kasnijim su stoljećima pojedine tvrdnje Aristotelove fizike bile dovedene u sumnju, a poneke i zamijenjene novim postavkama, ali glavne su odrednice teorije opstale kroz gotovo dva tisućljeća. Tek je Isaac Newton u drugoj polovici 17. stoljeća izgradio potpuno novu cjelovitu teoriju o uzrocima gibanja.

U ovome ćemo poglavlju izložiti tri Newtonova zakona gibanja na kojima se temelji cjelokupna mehanika. U njima se kao središnji pojmovi pojavljuju sila i masa tijela. Upoznat ćemo kako Newtonovi zakoni predviđaju vremenski tijek gibanja tijela pod utjecajem zadanih sila. Takva se razmatranja u mehanici nazivaju *dinamikom* (grč. *dynamis - sila*). Nadalje ćemo raščlaniti utjecaj sila, koje se javljaju unutar nekog sustava tijela, od utjecaja vanjskih sila. U cijeloj raspravi, nizat će se razni primjeri gibanja koja mogu nastati pod utjecajem sila. Pri svemu tome, ne ćemo ulaziti u samu prirodu pojedinih sila. To ostavljamo za sljedeće poglavlje.

2.1 Razvoj ideja o uzroku gibanja

Dok su pojmovi putanje i vremena, na kojima se temelji kinematika, jednostavni za čovjekovo shvaćanje, uzrok gibanja nije tako očit. Štoviše, nije čak jasno mora li neko gibanje imati uzroka, ili se ono odvija samo po sebi. Gledajući neposredno oko sebe, pa i dalje sve do nebeskih tijela, čovjek opaža vrlo raznolika gibanja. Ljudi skloni dubokom razmišljanju težili su svesti sva opažena gibanja na nekoliko vrsta i odrediti pravila po kojima nastaje određeno gibanje. Ako se uspiju utvrditi neka pravila, morala bi ona vrijediti na svakome mjestu i u svako doba, ukoliko su ostvareni isti uvjeti. Iz toga bi slijedilo da nam pravila mogu poslužiti i za predviđanje gibanja uz zadane uvjete.

Pravila nisu dana u samim pojavama, nego ih čovjek utvrđuje svojim umom. Pritom nastoji napraviti sustav povezanih uzroka i posljedica koji bi bio što jednostavniji, ali opet takav da se njime može obuhvatiti široka skupina pojava. Tako nastaje određena teorija. Ona se može smatrati ispravnom ako uspijeva dati točna predviđanja za sve pojave u zadanim uvjetima. Međutim, takva teorija ne mora biti jedina moguća. Ako netko uspije naći jednostavniji skup pravila, ili pravila pomoću kojih se na jednostavniji način dolazi do točnih predviđanja za razne pojave, ili pak pravila koja mogu predvidjeti više detalja u pojavama, načinio je uspješniju teoriju.

2.1.1 Aristotelovo učenje o gibanju

Glasoviti antički filozof Aristotel (4. stoljeće pr. Kr.) obuhvatio je u svojim razmišljanjima i fiziku (grč. *fisis - priroda, narav*). Kao i njegovi prethodnici, prihvaćao je stajalište da je Zemlja središte Svijeta, te da ona miruje. O njegovim razmišljanjima i argumentima za takvo stajalište bit će više riječi u desetom poglavlju ove knjige, a u ovome ćemo poglavlju razmotriti samo njegovu teoriju o uzrocima gibanja tijela.

Valja naglasiti da je Aristotel bio veliki zagovornik metode opažanja pojava i stvaranja zaključaka utemeljenih na činjenicama, onakvima kakve nam se one prikazuju u prirodi. Vođen takvim pristu-

pom, Aristotel je usvojio pojam sile koji nastaje iz svakodnevnog čovjekova iskustva, a svodi se na djelovanje nekog pokretljivog čimbenika koji može gurati ili vući drugo tijelo. Pokretljivi čimbenik je najčešće čovjek, ili životinja koja svoje djelovanje izvodi pomoću mišića. No, među pokretljive čimbenike može se uvrstiti i vjetar koji potiskuje brodsko jedro, ili pak odnosi lišće. Isto se može reći i za vodu koja teče rijekom i nosi granje. Aristotelu je bilo ključno da se pri guranju ili vuči *nužno* ostvaruje dodir između tijela i pokretljivog čimbenika. Stoga je zaključivao da u slučajevima kada je tijelo slobodno od svakog dodira, ne može postojati ni sila na to tijelo.

Promatrajući svijet oko sebe, čovjek može uočiti mnoštvo veoma različitih gibanja, te se čini da tu nema osobitih pravilnosti. Aristotel je ipak svojom oštroumnom analizom uspio izdvojiti neke osobine gibanja, na temelju kojih je napravio veliku podjelu svih gibanja u dvije vrste. U prvu je vrstu ubrojio sva ona gibanja kod kojih nema guranja ili vuče nekog tijela, dakle ona kod kojih, po njegovu kriteriju, na tijelo ne djeluje nikakva sila, a tijelo se ipak giba. Aristotel ih je nazvao *prirodnim gibanjima*. U drugu je vrstu ubrojio sva ostala gibanja koja se odvijaju jedino uz djelovanje nekog pokretljivog čimbenika koji ostvaruje guranje ili vuču tijela. Njih je nazvao *nasilnim gibanjima*. Potrebno je malo detaljnije obraditi ove dvije vrste gibanja.

Prirodna gibanja

Pažljivim motrenjem gibanja, Aristotel je ustanovio da se sva slobodna (prirodna) gibanja mogu dalje razvrstati u tri podvrste. U prvu podvrstu prirodnih gibanja ubrojio je sva slobodna padanja teških tijela prema Zemlji. Kod tog gibanja, tijelo je slobodno u smislu da nema dodira s nekim pokretljivim čimbenikom, pa ne može postojati neko guranje ili vuča tijela prema dolje. Drugim riječima, slobodan pad bilo kojeg tijela odvija se, po Aristotelovu shvaćanju, bez djelovanja sile na to tijelo, pa stoga zadovoljava kriterij za uvrštavanje u prirodna gibanja.

Napomena: Danas smatramo da na tijelo djeluje Zemlja tako da ga privlači čak i kada nema dodira između tijela i Zemlje. Aristotel i njegovi sljedbenici smatrali su da nije moguće neko djelovanje na daljinu bez izravnog kontakta. Tek je Newton uveo ideju gravitacije.

U drugu podvrstu prirodnih gibanja, Aristotel je ubrojio dizanje laganih tijela uvis. Tu se radi npr. o dimu, vatri i općenito o toplom zraku. Ni u tim se slučajevima nije mogao uočiti dodir s nekim pokretljivim čimbenikom, pa je Aristotel smatrao da nema ni djelovanja sile.

I konačno, promatranjem neba uočeno je kružno gibanje nebeskih tijela, pri čemu se također ne opaža postojanje dodira s bilo kojim pokretljivim čimbenikom. Stoga se po Aristotelu i ta gibanja odvijaju bez djelovanja sile i čine treću podvrstu prirodnih gibanja.

Gdje po Aristotelu leži uzrok prirodnih gibanja?

O mogućem uzroku prirodnih gibanja Aristotel je imao sljedeće razmišljanje. Navedene tri podvrste prirodnih gibanja međusobno su potpuno različite, a sva se odvijaju u istome Svemiru kojemu je središte Zemlja. Stoga se činilo logičnim pripisati uzroke tih gibanja *svojstvima samih tijela*, koja mogu biti različita, a ne okolnom Svijetu koji je za svih isti. Svako tijelo, ukoliko ga se pusti da bude slobodno, počne izvoditi određeno prirodno gibanje kao posljedicu svojstva koje je *u samome tijelu*. Budući da je Aristotel podijelio sva prirodna gibanja na tri podvrste, morao je smisliti i tri odgovarajuća svojstva tijela.

Sva su zemaljska tijela po Aristotelu bila sastavljena od četiriju osnovnih elemenata: *zemlja, voda, zrak, vatra* (ne smije ih se dovoditi u vezu s današnjim pojmom kemijskih elemenata). Ti su elementi imali različita svojstva *težine*, te su sukladno tome svojstvu zauzimala svoje prirodno mjesto, bilo bliže, ili dalje od središta Svijeta (tj. Zemlje). Krutim tijelima, koja imaju najveći udio elementa zemlje, prirodno je mjesto bilo najbliže Zemlji, pa se ona tamo vraćaju ukoliko su bila izmještena. Voda (općenito tekućina) je nešto manje teška od zemlje (krute tvari) pa je njeno prirodno mjesto odmah iznad krute tvari. Ona se prirodno razlije u udubljenjima, pa tako nastaje npr. more i jezera. Zrak (plin) je relativno lakši, pa mu je prirodno mjesto iznad tla i površine vode. Topao zrak i dim sadrže vatru (toplinu) kojoj je prirodno mjesto u visini do nebeske sfere koja drži Mjesec. To su, dakle, lagana tijela koja se sukladno svome vlastitom svojstvu dižu sama od sebe uvis, ukoliko im je omogućeno slobodno gibanje.

Nebeska pak tijela imaju po Aristotelu sasvim drugačije svojstvo zato što su građena od posebnog elementa koji je nazvan *eter*, te iz njihova svojstva proizlazi vječno gibanje po kružnicama oko središta Svemira, tj. oko Zemlje. Naime, u antičko su doba kružnicu smatrali najsavršenijom krivuljom, pa se uz nebeska tijela veoma lako vezalo mišljenje o njihovoj uzvišenosti, kojoj pristaje vječno gibanje po kružnicama.

Nasilna gibanja

Prema Aristotelovoj je definiciji nasilno gibanje ono koje nastaje uslijed djelovanja sile na tijelo. U tom se gibanju tijelo udaljava od svog prirodnog mjesta. Kao primjer nasilnog gibanja može se navesti podizanje teškog tijela uvis, tj. suprotno od njegova prirodnog gibanja. Za takvo je gibanje tijela očito potrebno guranje ili vuča prema gore, a to pak može ostvariti samo neki pokretljivi čimbenik izravnim dodirom s tijelom.

Po navedenome kriteriju, u nasilna bi gibanja spadalo i svako uspinjanje po nekoj uzbrdici. S druge pak strane, kotrljanje tijela po nizbrdici može se ostvariti i bez guranja ili vuče, pa bi ono spadalo u prirodna gibanja. Između ta dva slučaja nalazi se gibanje tijela po horizontalnoj podlozi, koja zacijelo ne predstavlja ni uzbrdicu ni nizbrdicu. U određivanju prema ovome slučaju, Aristotel je ostao dosljedan svojim principima. Tijelo koje se nalazi na horizontalnoj podlozi ne može se više primaknuti središtu Zemlje, pa je prirodno da miruje. Stoga je Aristotel ustvrdio da i gibanje po horizontalnoj podlozi spada u kategoriju nasilnih gibanja. Pri tome je uzimao u obzir i iskustvenu činjenicu prema kojoj je za gibanje tijela po horizontalnoj podlozi uvijek potrebno guranje, ili vuča koju ostvaruje neki pokretljivi čimbenik. Čim to djelovanje prestane, iskustvo je pokazivalo da se tijelo zaustavi. Stoga je Aristotel stvorio općenit zaključak po kojemu bilo koje nasilno gibanje može trajati samo dotle dok na tijelo djeluje sila.

Može li po Aristotelu čvrsta horizontalna podloga djelovati na tijelo?

Aristotel je uočavao silu kojom neki pokretljivi čimbenik djeluje na tijelo putem dodira, a bio je svjestan i elementarne činjenice da tijelo ostvaruje dodir i s horizontalnom podlogom. No, po njegovu shvaćanju nije iz toga dodira mogla nastati sila na tijelo. Razlog je Aristotelu izgledao dosta jednostavan i iskustveno uvjerljiv. Naime, čvrsta podloga ne mijenja svoj oblik, tj. nije gibljiva, te stoga ne može sama po sebi gurati ili vući tijelo koje je na nju položeno. Ako postavimo tijelo na horizontalnu podlogu, ono se ne će pokrenuti. Jedino vanjski pokretljivi čimbenik poput čovjeka, životinje, ili nekog pokretnog stroja, može gurati ili vući tijelo po horizontalnoj podlozi.

Napomena: Aristotel je bio svjestan da kod gibanja tijela po nekoj podlozi postoji trenje, jer je ono iskustvena činjenica. Međutim, trenje nije odgovaralo njegovoj definiciji sile koju je zasnovao po uzoru na učinak mišića, pa stoga trenje nije smatrao silom. Tek je Newtonova općenitija definicija sile mogla obuhvatiti i trenje kao silu.

Aristotel nije obraćao posebnu pažnju na ubrzavanje i usporavanje gibanja. Po njemu je za svaku vrstu gibanja po horizontalnoj podlozi bila potrebna sila (guranje ili vuča) nekog pokretljivog čimbenika. Za gibanje tijela nekom stalnom brzinom, iskustvo je pokazivalo da čovjek mora upotrebljavati stalnu silu svojih mišića. Ako pak želi ubrzati gibanje tijela, čovjek mora povećati svoj napor. Da bi održavao brže gibanje tijela, čovjek mora ulagati veći napor. Aristotel nije razvio postupak mjerenja sile, pa nije mogao utvrditi kada je sila pokretljivog čimbenika npr. dva puta veća. Sve se svodilo samo na dojam o veličini sile. Iz iskustva o čovjekovu naporu poteklo je Aristotelovo shvaćanje da brže gibanje po horizontalnoj podlozi iziskuje veću silu. Ako čovjek smanji svoj napor, smanji se i brzina tijela. U slučaju da čovjek prestane djelovati silom, brzina tijela se svede na nulu, tj. tijelo se zaustavi.

Napomena: Ovo Aristotelovo shvaćanje ukorijenjeno je i danas kod većine ljudi koji od malenih nogu stječu spoznaje putem vlastitog iskustva i stvaraju intuitivnu sliku o uzrocima gibanja. Za njih je uvjerljivo da postoji proporcionalnost između sile i brzine gibanja jer pod pojmom sile podrazumijevaju samo djelovanje vlastitih mišića a ne i trenje tijela s podlogom. O tome će biti više riječi kasnije.

Tumačenje gibanja projektila

Veći se problem kod Aristotela pojavio kada je trebalo objasniti gibanje projektila (lat. *projicere - baciti*). Ako npr. bacimo kamen uvis, on se nastavi gibati i nakon što se odvoji od ruke koja ga je bacila. No, prema Aristotelovim pravilima, kamen spada u teška tijela koja se prirodno gibaju prema dolje, pa se gibanje kamena uvis može ostvariti samo nasilno. Tu nastaje problem jer je, opet prema Aristotelovim pravilima, za nasilno gibanje potrebno stalno djelovanje sile, a to znači da bi morao postojati stalan kontakt s nekim pokretljivim čimbenikom koji gura ili vuče tijelo.

Da bi očuvao konzistentnu primjenu principa svoje teorije, Aristotel je ulogu pokretača, koji ostaje u stalnom kontaktu s projektilom i djeluje na njega silom, pripisao zraku kroz koji se projektil giba. Zamislio je da se zrak kovitla oko bačenog tijela na način da iza projektila nastaje razrjeđenje u koje jurne okolni zrak i tako nastane potiskivanje tijela naprijed. Dakle, kada prestane kontakt projektila s bacateljem, ulogu pokretača gibanja preuzima medij kroz koji se projektil giba.

Aristotel je pretpostavljao da je djelovanje medija najsnažnije neposredno nakon što je tijelo bačeno. Stoga se kamen, koji je bačen uvis, giba u početku najvećom brzinom, no kovitlanje zraka oko njega pomalo slabi, te se brzina kamena smanjuje i konačno se on zaustavi na nekoj visini. Nakon toga slijedi slobodan pad kao prirodno gibanje teškog tijela.

I kod promatranja brodova na moru Aristotel je zapazio da se brod ne zaustavi neposredno nakon što veslači podignu vesla. Njegovo je objašnjenje bilo da se morska voda kovitla i potiskuje brod još neko vrijeme, ali sve slabije i slabije, pa se brod konačno ipak zaustavi. Pokretačko djelovanje je, dakle, pripisano mediju kroz koji se tijelo giba. Na taj je način Aristotel razriješio uzroke sviju gibanja, pa i ovih slučajeva koji su se isprva činili zagonetnima.

Ima li Aristotelovo učenje o uzrocima gibanja bilo kakvu vrijednost za današnju fiziku?

S današnje točke gledišta, niti jedno od triju gibanja, koja Aristotel navodi kao prirodna, ne nastaju sama po sebi, tj. bez nekog vanjskog djelovanja na tijelo. Time se odbacuju i sva tri navedena unutarnja svojstva tijela kao mogući uzroci njihovih prirodnih gibanja. Međutim, kao što ćemo vidjeti kasnije, polazna filozofska ideja da se gibanja podijele na prirodna i nasilna, ostala je valjana i odigrala važnu ulogu u razvoju fizike. Put do utvrđivanja novog kriterija za prirodno gibanje bilo kojeg tijela (*jednoliko gibanje po pravcu*) nije bio jednostavan i trajao je jako dugo. A kada je taj kriterij konačno utvrđen, uzrok prirodnom gibanju pripisan je jednom novom svojstvu (*inercija*) koje posjeduju sva tijela. Tako je i filozofska ideja, po kojoj se uzrok prirodnog gibanja nekog tijela nalazi u svojstvu samog tijela, ostala očuvana u suvremenoj misli.

Dva tisućljeća Aristotelova nauka

Aristotelova se teorija o uzrocima gibanja tijela nije bitno mijenjala kroz dva tisućljeća. Samo je u jednome elementu došlo do značajnije izmjene. Radilo se o gibanju bačenog tijela (projektila) kroz medij. Oko tisuću godina nakon Aristotela, kršćanski grčki filozof Filopon (6. st. poslije Kr.) ukazivao je na nelogičnost Aristotelova objašnjenja za gibanje projektila jer je očito da se kod bacanja tijela stvara zgušnjenje zraka ispred projektila pa zrak stvara otpor gibanju, a ne potiskivanje prema naprijed. Umjesto Aristotelova objašnjenja, Filopon je zamislio da onaj tko baca tijelo, prenese na to tijelo neku "pokretačku silu"[1] koja dalje održava projektil u gibanju. Bila je to modifikacija Aristotelove teorije gibanja, a ne njeno potpuno odbacivanje. Naime, Filopon je zadržao Aristotelovo shvaćanje po kojemu je za gibanje projektila potrebna stalno prisutna "sila", ali nju nije vidio u mediju oko projektila, nego nekako utisnutu u sam projektil.

U 14. stoljeću, francuski je znanstvenik Jean Buridan, rektor Pariškog sveučilišta, uveo u Europi staru Filoponovu ideju po kojoj se prilikom bacanja projektila u njega utisne "nešto", ali je tu veličinu odvojio od pojma i naziva sile. Buridan i njegovi sljedbenici u Parizu dali su toj veličini naziv *impetus* (lat. *impetus - nasrtaj, polet*). Oni su pokušali uvesti i kvantitativnu analizu impetusa. Tako su tvrdili da se iznos impetusa, koji tijelo dobije kod bacanja, može naknadno spoznati iz veličine tijela i njegove brzine. Ako projektil ima veću brzinu,

[1] Izraz "pokretačka sila" u Filoponovoj uporabi ne predstavlja neki dobro definiran pojam, nego označava neku nejasnu "moć" koju tijelo stekne.

značilo bi da je bacatelj unio u to tijelo veći impetus. Također se pretpostavljalo da je većem projektilu potrebno unijeti veći impetus da bi postigao određenu brzinu.

No, velika zabluda teorije impetusa bila je tvrdnja da bacatelj projektila može utisnuti tijelu takav impetus koji ga potom tjera na kružno gibanje. Ovu tvrdnju zagovornici impetusa nisu nikada eksperimentalno provjeravali.

Napomena: U to doba nije bio razvijen matematički opis gibanja, a pogotovo se nije baratalo vektorima. Tako se ni brzina nije shvaćala kao vektorska veličina, nego se samo gledalo na njen iznos.

Buridan je otišao još korak dalje i ustvrdio da se nebeska tijela gibaju po kružnici zato jer su dobila impetus pri stvaranju svijeta, a on se još nije istrošio, ili se možda nikada neće istrošiti. Iako sasvim pogrešna, ova tvrdnja nije bila tako beznačajna, kako se na prvi pogled čini. Naime, Buridan je poljuljao puno važniju Aristotelovu postavku, onu o podjeli na nebeska i zemaljska tijela s različitim svojstvima u gibanju. Prema Buridanu, ista bi fizika mogla vrijediti za nebeska tijela kao i za ona na Zemlji.

U ostalim elementima, teorija impetusa nije promijenila Aristotelovu fiziku. Posebno se to odnosi na tvrdnju da je za gibanje tijela po horizontalnoj podlozi potrebna sila, čak i kada se radi o gibanju stalnom brzinom.

2.1.2 Galileijevi pokusi s gibanjem na kosini

Galileo Galilei je danas poznat u široj javnosti prvenstveno po svome zastupanju Kopernikova heliocentričnog sustava. O njegovu doprinosu astronomiji bit će opširnije riječi u poglavlju 10, a u ovome ćemo odjeljku izložiti njegov izuzetno važan doprinos u stvaranju novovjekog učenja o gibanju tijela. Taj je napredak ostvaren u prvoj polovici 17. stoljeća.[2]

Galilei je vrlo detaljno pristupio proučavanju gibanja kuglica niz kosinu. To je gibanje smatrao srodnim slobodnome padu, ali sporijim, tako da je mogao točnije mjeriti prevaljene putove i odgovarajuće vremenske intervale.[3] Analizirajući dobivene podatke, spoznao je pravilnost jednoliko ubrzanog gibanja.

U pitanju samog *uzroka* slobodnog pada tijela, Galilei nije odstupao od Aristotelove fizike. Naime, ni Galilei nije pomišljao da na tijelo koje slobodno pada djeluje neka sila, pa je prihvaćao Aristotelovu tvrdnju da se uzrok padanja tijela nalazi u svojstvu samog tijela. Tako je Galilei tumačio i gibanje niz kosinu kao prirodno (tj. bez djelovanja sile) gibanje tijela po kojemu se ono približava središtu Zemlje.

Pored gibanja *niz* kosinu, Galilei je obratio pažnju i na gibanje kuglica koje se *uspinju* po kosini. Slika 2.1 prikazuje shematski njegove pokuse. Kuglica se pusti niz početnu padinu tako da stekne neku brzinu, te s tom brzinom stupi na kosinu. Ako se put po kosini uzdiže, kuglica se stalno usporava i zaustavlja na nekoj točki od koje se zatim vraća. Što je nagib kosine manji, to je manje izraženo usporavanje i kuglica se zaustavlja sve dalje. Ako je, pak, kosina nagnuta prema dolje, kuglica se ubrzava, s time da je kod jako malenog nagiba ubrzavanje jedva zamjetljivo, dok je kod većeg nagiba sve izraženije.

Kao što smo ranije isticali, pitanje ubrzavanja nije Aristotelu bilo posebno važno, dok je Galilei obratio pažnju upravo na pojavu ubrzanja u nekom gibanju. Ta ga je zaokupljenost navela da postavi kritično pitanje:

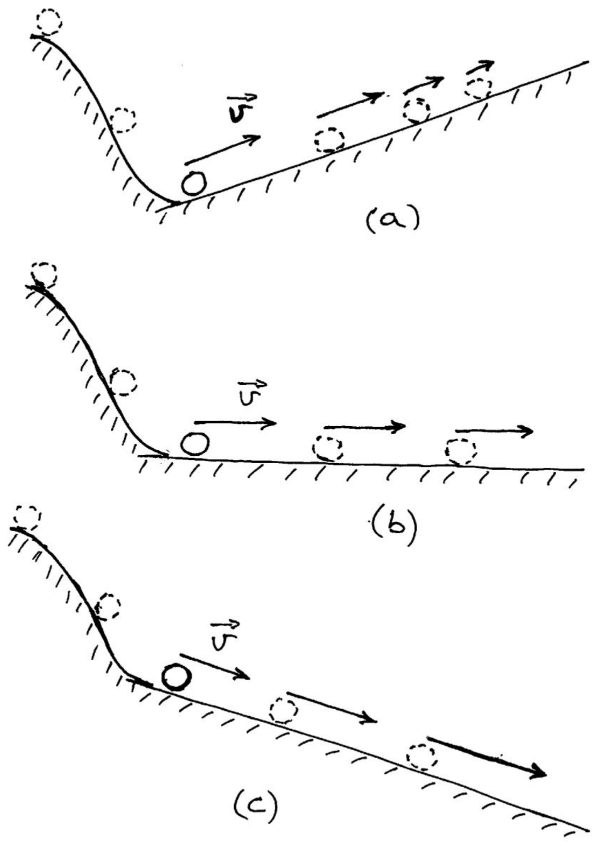
Što bi se dogodilo kada bi kuglica naletjela na horizontalnu plohu?

Tada, naime, ne bi bilo nagnutosti koja bi dovodila do ubrzavanja, ali ni do usporavanja kuglice, pa je Galilei sasvim uvjereno zaključio da bi brzina kuglice morala ostati konstantna.

U praksi se kuglica ipak zaustavi, kao što je to predviđala Aristotelova fizika. Međutim, Galilei je

[2] Galilei je svoja istraživanja iz mehanike objavio 1638. godine u knjizi: *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze, attenenti alla Mecanica e i Movimenti Locali.* (Rasprave i matematički prikazi dviju novih znanstvenih disciplina, koje pripadaju mehanici i lokalnim gibanjima.) U poglavlju *De motu locali* (O lokalnim gibanjima), napisanom na latinskom jeziku koji je tada bio univerzalni jezik znanosti, iznesene su sustavno sve definicije, teoremi i matematički dokazi koji se tiču jednolikog i jednoliko ubrzanog gibanja po pravcu.

[3] U to doba nisu postojali satovi kojima bi se mogli točno mjeriti maleni intervali vremena, pa se Galilei koristio istjecanjem vode iz posude kroz malenu rupu i zatim vaganjem sakupljene vode.



Slika 2.1: Galileijevi pokusi na kosini. Početnim spuštanjem niz padinu kuglica stekne neku brzinu a nakon toga se giba po ravnoj plohi.(a) Na uzdignutoj kosini kuglica se zaustavlja. (b) Prikaz gibanja po horizontalnoj plohi. (c) Ubrzavanje kuglice na kosini nagnutoj prema dolje.

napravio novi važan zaključak po kojemu uzrok zaustavljanja kuglice ne leži u samoj prirodi kuglice kao što bi to zamišljao Aristotel, nego bi uzrok valjalo potražiti u trenju s podlogom, tj. u djelovanju podloge na tijelo. Shvativši važnost djelovanja podloge na tijelo, Galilei je u daljnjem slijedu misli mogao zamišljati sve glađe i glađe plohe koje bi imale sve manji utjecaj na zaustavljanje kuglice. Konačno je u svojoj idealizaciji mogao zamisliti idealno glatku horizontalu plohu i zaključio da se tada kuglica ne bi imala zbog čega zaustavljati. Ovaj naizgled jednostavan zaključak izvršio je ogroman preokret u daljnjem razvoju fizike. U idealiziranim uvjetima, kuglica bi se mogla vječno gibati.

Kako je Galilei zamišljao vječno gibanje kuglice?

Kao što je već gore naglašeno, Galilei nije napustio Aristotelovo shvaćanje slobodnog pada kao prirodnog gibanja tijela u kojemu se ono, samo od sebe, nastoji primaknuti središtu Zemlje. Stoga se zamišljena idealno glatka ploha nije smjela približavati središtu Zemlje, jer bi se tada kuglica na njoj prirodno ubrzavala, ali se nije smjela niti udaljavati od središta Zemlje, jer bi u tome slučaju došlo do usporavanja kuglice. Galileijev zaključak je bio da bi zamišljena glatka ploha morala biti sfera koja obavija Zemlju. Po njegovim riječima, takva bi se zamišljena ploha dobila kada bi se npr. površina zemaljske kugle dala savršeno izgladiti. Kuglica bi se po njoj mogla stalno gibati na jednakoj udaljenosti od središta Zemlje, te joj se brzina ne bi mijenjala.

Napomena: Galilei je uvelike razvio matematički opis jednolikog i jednoliko ubrzanog gibanja po pravcu, ali nije uveo vektorski prikaz kinematičkih veličina. Stoga nije mogao spoznati da se akceleracija javlja i kod promjene smjera brzine, a ne samo kod promjene njenog iznosa.

Na Galileijevim temeljima

Najznačajniju je inovaciju Galilei postigao time što je pažnju usmjerio na *ubrzanje*, a ne na samo gibanje. Tako je došao do zaključka da mora postojati uzrok za ubrzanje gibanja, ali nije otišao korak dalje i povezao uzrok ubrzanja s pojmom sile[4], što je tek kasnije učinio Newton.

Što se tiče originalne Galileijeve spoznaje o mogućem vječnom gibanju kuglice po savršeno glatkoj sfernoj plohi, ona mu je poslužila kao dokaz da je moguće vječno gibanje planeta oko Sunca, a to mu je bilo važno u polemičkoj raspravi u kojoj je davao potporu Kopernikovu heliocentričnom sustavu. Međutim, Galilei nije poznavao centripetalnu akceleraciju, pa ni silu koja je potrebna za kružno gibanje.

Veliki francuski filozof René Descartes zamislio je odvijanje prirodnih procesa kao neprekidan niz srazova tijela (čestica). Prema njegovoj teoriji, do promjene gibanja dolazi tek u srazu, dok se između dva

[4]Galilei nije imao jasno definiran pojam sile, niti ustaljenu terminologiju, pa je kao sinonime upotrebljavao izraze *forza*, *potenza*, *virtù*, *efficia*, *facolta*.

sraza zadržava jednoliko gibanje po pravcu. Uz to je pretpostavljao da pojedine skupine sitnih čestica u svemiru tvore vrtloge i tako održavaju na okupu i veća nebeska tijela. Takva teorija nije mogla biti plodonosna u daljnjem razvoju fizike.

2.2 Newtonova aksiomatska cjelina

U drugoj polovici 17. stoljeća, veliki engleski matematičar i fizičar Isaac Newton uspio je načiniti sintezu dotadašnjih spoznaja o gibanjima i osmislio potpuno nov pogled na uzroke gibanja, te sve povezao u jednu usklađenu cjelinu koja je potpuno potisnula Aristotelovu fiziku.

Newton je na svojoj sveobuhvatnoj teoriji radio preko dva desetljeća i objavio je 1687. godine u monumentalnom djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematički principi prirodne filozofije), koja se često navodi skraćeno kao *Principia*. U njoj nije izložen put kojim se korak po korak dograđuju spoznaje, kako bi se na kraju došlo do sinteze u obliku nekih zakona. Principia je napisana kao prikaz već gotove, zaokružene teorije. Ona počinje s definicijama nekih fizikalnih veličina i postavljanjem triju zakona koji su nužni i dovoljni za tumačenje svih gibanja i njihovih uzroka. Newton je te zakone nazvao *aksiomima* (grč. *axioo - cijenim, usvajam*), što znači tvrdnjama koje se prihvaća bez dokaza jer ih se smatra očitima.[5]

Postavljanje aksioma ipak nije proizvoljan postupak, iako bismo u prvi mah mogli tako pomisliti. Newton je poklanjao veliku pažnju eksperimentima i svoje je aksiome uskladio s opažanjima. Postavljeni aksiomi se ne mogu izravno eksperimentalno dokazati, no njihove su posljedice brojne i podložne su eksperimentalnim provjerama. Na taj se način opravdanost aksioma može provjeravati naknadno (*à posteriori*).

Newton je svojim aksiomima dao i alternativni naziv *zakoni gibanja*, pa se oni tako najčešće nazivaju u suvremenoj literaturi, ali treba imati na umu da su to aksiomatski, a ne izvedeni zakoni.

Iako se nije izravno opterećivao pojedinim tvrdnjama Aristotelove fizike, Newton je naslijedio duh razmišljanja u kojemu pojam sile ima središnju ulogu jer služi za podjelu na prirodna i nasilna gibanja. Slijedom toga, bilo je logično da prvim zakonom utvrdi što je prirodno gibanje (ili prirodno stanje) tijela, tj. ono koje se odvija bez ikakva vanjskog djelovanja na tijelo. Drugi je zakon posvetio nasilnom gibanju, tj. onome koje se odvija uz djelovanje sile. Newton je uočio potrebu i za trećim zakonom koji bi se bavio pitanjem uzajamnosti djelovanja.

2.2.1 Prvi Newtonov zakon

Da bi se moglo utvrditi u kakvom se stanju nalazi tijelo kada je prepušteno samome sebi, odnosno kada nema vanjskog djelovanja, potrebno je ponajprije definirati što se smatra vanjskim djelovanjem. Na prvi se pogled ovo pitanje može činiti izlišnim, no ono nije nimalo naivno. Sigurno je da svako guranje ili vuču tijela možemo identificirati kao vanjsko djelovanje na tijelo. Međutim, kada podignemo neki kamen i zatim ga pustimo, kamen više nije izložen nikakvu guranju, niti vuči, pa nema vidljivog dokaza da na njega nešto djeluje. Upravo je tako razmišljao Aristotel. Ni Galilei nije smatrao da postoji djelovanje Zemlje na kamen koji pada, nego da se kamen tako giba zbog svojstva koje je u njemu samome.

Newtonov pojam sile. Newton je prvi došao na ideju da pojam sile ne bi trebalo vezivati samo uz guranje ili vuču tijela, nego ga primijeniti općenito na bilo koji slučaj u kojemu dolazi do promjene u gibanju tijela, bez obzira na to na koji se način ostvaruje promjena gibanja. Njegova definicija sile glasi[6]:

> *Sila je vanjsko djelovanje na tijelo, kojim se može promijeniti njegovo stanje, bilo mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu.*

Definicija samo opisuje neki pojam, ali ne daje kvantitativne odnose za danu veličinu. O njima će biti riječi kasnije u raspravi o Newtonovim zakonima.

Važno je imati na umu da se u svakodnevnome govoru riječ sila rabi slobodnije u daleko širem

[5] Razumljivo je da se aksiomi ne mogu dokazivati jer ne postoje još temeljniji zakoni iz kojih bi se aksiomi mogli izvesti kao njihova posljedica. Aksiomi su, dakle, tvrdnje od kojih se *polazi* u izgradnji neke teorije.

[6] Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum eius statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

smislu. Tako se može govoriti o sili mišića, ili nekog pogonskog stroja, ali i o rješenju po sili zakona, te o vojnoj sili, svjetskim političkim silama, ili pak o športskim i drugim silama.[7] Na pitanje što je zapravo sila u fizici, možemo odgovoriti da je sila ono što se mi dogovorimo da tim imenom nazovemo. Aristotel je silom smatrao samo guranje ili vuču, dok je Newton silom nazvao svako djelovanje na tijelo koje može promijeniti njegovu brzinu. Vidjet ćemo da se Newtonova definicija pokazala daleko plodonosnijom u izgradnji fizike.

Prvi Newtonov zakon. Za tijela koja su prepuštena sama sebi, tj. koja se nalaze u prirodnom stanju, Newton je na svoj način napisao[8]:

> ***Svako tijelo ustraje u svome stanju, bilo mirovanja ili jednolikoga gibanja po pravcu, dok i ukoliko na njega ne djeluju sile koje ga prinude da to stanje promijeni.***

Moramo uočiti da je glavno pravilo izrečeno u prvome dijelu zakona, a nastavak (nakon zareza) služi samo zato da se utvrdi ograničenje na primjenu glavnog pravila, odnosno da se navedu okolnosti u kojima to pravilo ne vrijedi.

Prvi Newtonov zakon izrastao je na Galileijevoj ideji o jednolikom gibanju kuglice po savršeno glatkoj horizontalnoj plohi, ali nije tek puko prenošenje te ideje. Newton je generalizirao vječno gibanje na slučajeve u kojima odnos putanje tijela prema Zemlji nije važan. Ono se odvija u idealiziranim uvjetima koje ne možemo eksperimentalno ostvariti, pa stoga prvi zakon ne možemo ni dokazati, ali prihvaćamo aksiomatski njegovu valjanost.

[7]U latinskome jeziku riječ *vis* upotrebljavala se, ovisno o kontekstu, za ukazivanje na neku silu, jakost, snagu, moć, utjecaj, ili pak značajno svojstvo, odnosno narav koju može neki subjekt posjedovati. U svrhu potpune određenosti, Newton je za označavanje svog pojma sile u izričito fizikalnom značenju uveo kovanicu *vis impressa* kao poseban stručni termin (terminus technicus) i dosljedno ga kasnije upotrebljavao.
U prijevodima na suvremene jezike izostao je poseban stručni termin, pa se i za označavanje strogo fizikalnog pojma upotrebljava obična govorna riječ *sila.*

[8]*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi unformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
Možemo uočiti da je i ovdje Newton upotrijebio svoj prethodno definirani stručni termin *vis impressa*, a ne tek neodređeni izraz *vis.*

Pojam inercije. Prvi Newtonov zakon je potpuno nadomjestio raniju Aristotelovu tvrdnju da postoje tri prirodna gibanja za tri vrste tijela. Njime se uvodi mirovanje ili jednoliko gibanje po pravcu kao novo prirodno stanje za sva tijela. No, filozofski način razmišljanja, po kojemu i prirodno stanje tijela mora imati svoj uzrok, održao se i kod Newtona, te sve do naših dana. U posebnoj definiciji Newton je naveo[9]:

> *Materiji je urođeno svojstvo odupiranja, koje predstavlja veličinu samu po sebi, te čini da svako tijelo ustraje u svome stanju, bilo mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu.*

To se svojstvo tijela može nazivati *inercijom.* Ako tijelo miruje, ono će zbog inercije nastaviti mirovati sve dok ga neka sila ne pokrene. U slučaju da je tijelo na neki način već steklo određenu brzinu, a na njega više ne djeluje sila, ono će se zbog inercije nastaviti gibati istom brzinom.

Newton je u komentaru nakon definicije sile naglasio da se *sila sastoji u samome djelovanju, te da, nakon djelovanja, sila ne ostaje u tijelu.* Tijelo se nastavi gibati samo zbog svoje inercije. To su bile važne napomene jer je u ono doba bila široko prihvaćena Buridanova ideja o impetusu, koji bi, po njegovu shvaćanju, ušao u tijelo i u njemu ostao i nakon prestanka vanjskog djelovanja na tijelo. Stoga je Newton morao sasvim jasno dati do znanja da je njegov pojam sile sasvim drugačiji od impetusa.

2.2.2 Drugi Newtonov zakon

U pogledu učinka sile, prvi Newtonov zakon navodi samo to da sila može *prekinuti* stanje mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. Ništa se u prvome zakonu ne govori o osobinama gibanja koje nastane nakon što sila počne djelovati. To se utvrđuje tek u drugome Newtonovu zakonu. Ako se poslužimo Aristotelovom terminologijom, mogli bismo reći da drugi Newtonov zakon utvrđuje pravila nasilnog gibanja.

[9]*Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*
Možemo primijetiti da se ovdje pojavljuje izraz *vis insita* koji bi bilo pogrešno prevoditi kao *urođena sila.* Riječ *vis* ovdje ima značenje svojstva, pa navedeni izraz *vis insita* prevodimo kao *urođeno svojstvo.*

Prije izricanja drugoga Newtonova zakona, moramo definirati pojmove dviju fizikalnih veličina koje se u zakonu pojavljuju. To su *masa* i *količina gibanja.*

Definicija mase. Svako tijelo posjeduje svojstvo inercije koje je gore definirano. Naime, svako će se tijelo nastaviti gibati jednoliko po pravcu, ukoliko na njega više ne djeluje vanjska sila. To ponašanje ne ovisi o količini tvari koju tijelo sadrži, tj. i sićušno zrno i ogromno tijelo nastavit će svoje jednoliko gibanje po pravcu. Međutim, u trenutku kada nastupi djelovanje sile koja nastoji promijeniti jednoliko gibanje tijela po pravcu, tijelo pruža otpor koji nije jednak za sićušno zrno i za ogromno tijelo. Za kvantitativna razmatranja potrebno je imati definiranu fizikalnu veličinu koja odražava intenzitet tog svojstva za svako pojedino tijelo. Ta veličina je po definiciji masa tijela:

> *Masa tijela je mjera njegove inercije, tj. njegova svojstva da se odupire promjeni brzine koju trenutno ima.*

Odmah moramo postaviti važno pitanje je li masa nekog određenog tijela uvijek ista, ili može imati različite vrijednosti u ovisnosti o okolnostima. Drugim riječima, pitanje je pruža li to tijelo u svim prilikama isti otpor promjeni svoje brzine. Na ovo ćemo se pitanje još navraćati, a za sada samo navedimo da je u Newtonovoj mehanici postulirano da je masa nekog tijela njegovo *trajno, neotuđivo i nepromjenjivo* svojstvo.

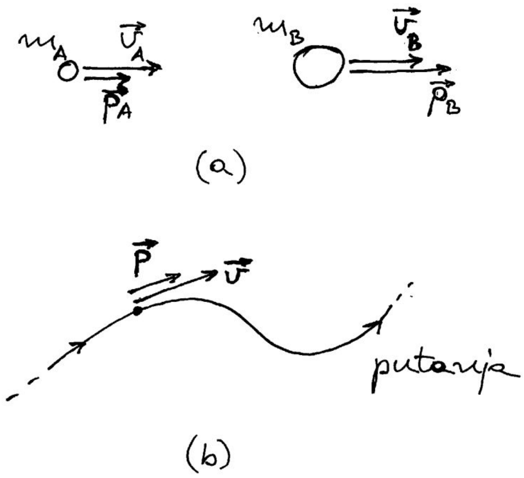
Svako tijelo ima, dakle, neku masu, no ona nije jednaka za sva tijela. Postojanje mase tijela sasvim je u skladu sa svakodnevnim iskustvom. Ne osjećamo jednak otpor želimo li baciti laganu lopticu ili neku tešku kuglu. Također, lako nam je smanjivati brzinu nekih kolica, ali je vrlo teško zaustavljati npr. teretni vagon.

Masa m je očito skalarna veličina jer tijelo pokazuje jednako izraženo svojstvo odupiranja promjeni brzine u bilo kojem smjeru.

Definicija količine gibanja. Količina gibanja tijela je umnožak mase tijela i njegove brzine. Uvriježeni simbol za količinu gibanja je $\vec{p}$, pa se matematički piše

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

Količina gibanja je vektor koji ima smjer kao i brzina. Tijelo koje ima malenu masu, npr. neka kuglica, može imati veliku količinu gibanja ako se giba velikom brzinom. S druge strane, vagon, čak i u sporom gibanju, ima veliku količinu gibanja zbog svoje velike mase.[10]



Slika 2.2: (a) Tijela A i B imaju jednake brzine, ali su im mase različite, pa su različite i njihove količine gibanja. (b) Vektor trenutne količine gibanja uvijek je tangencijalan na putanju, baš kao i vektor trenutne brzine.

Ponekad prikazujemo trenutna stanja tijela u gibanju i crtamo njihove vektore brzina i količina gibanja kao na slici 2.2a. Možemo nacrtati tijela u različitim veličinama kako bismo simbolički ukazali na njihove različite mase. Tada pazimo da tijelo s pretpostavljenom većom masom ima veću količinu gibanja od tijela koje se giba istom brzinom, ali ima manju masu. Početne točke vektora koji predstavljaju brzinu i količinu gibanja tijela stavljaju se ili u središte tijela, ili dovoljno blizu dotičnog tijela,

[10] Newton je u samoj definiciji upotrijebio latinsku riječ *quantitas motus* (količina gibanja), a u daljnjem tekstu rabio je skraćeni izraz *motus.*
U starijoj se njemačkoj literaturi rabio izraz *Bewegungsgrösse*, koji doslovno znači *veličina gibanja*, ali je kasnije prevladao izraz *Impuls.* U običnom njemačkom govoru *Impuls* znači *poriv* i kao takav dobro dočarava smisao produkta $m\vec{v}$.
U suvremenoj engleskoj literaturi rabi se izraz *momentum*, koji u običnome engleskom govoru znači *poriv.* Izraz *poriv* bio bi zbog svoje jezgrovitosti prikladan i u hrvatskoj terminologiji, ali nije uobičajen.

tako da se zna na koje se tijelo te veličine odnose.

Ako se crta putanja nekog tijela kao na slici 2.2b, prikladnije je upotrijebiti čestični model za prikaz tijela, ne zaboravljajući ipak da i tako prikazano tijelo ima svoju cjelovitu masu. Kod crtanja vektora ne smijemo zaboraviti da vektor brzine, pa time i vektor količine gibanja, moraju uvijek biti tangencijalni na putanju tijela.

Nakon ovih objašnjenja može nam postati jasno zašto je Newton uveo količinu gibanja kao relevantnu fizikalnu veličinu. Naime, kada se vanjskim djelovanjem nastoji promijeniti brzina nekog tijela, nije svejedno kakvu masu ima to tijelo. Teže je ubrzavati, ili usporavati, ili skretati brzinu tijela koje ima veću masu, nego tijela kojemu je masa manja. Dakle, u relevantnu fizikalnu veličinu mora biti uključena masa tijela. Brzina također mora biti uključena jer se mora znati koliki je bio njen iznos i smjer prije početka djelovanja sile i kasnije. Količina gibanja je stoga definirana tako da uključuje obje veličine, masu i brzinu tijela.

Izvorni oblik drugoga Newtonova zakona

Newton je napisao drugi zakon gibanja u obliku[11]:

> ***Promjena količine gibanja proporcionalna je djelovanju sile u vremenu i zbiva se u smjeru te sile.***

Matematički se ovaj zakon zapisuje kao proporcionalnost

$$\Delta\vec{p} \propto \vec{F}\Delta t \tag{2.2}$$

Isticanje proporcionalnosti (oznaka $\propto$), a ne znaka jednakosti, ne treba nas čuditi. Fizikalni sadržaj zakona je u postojanju proporcionalnosti, što znači da će npr. dvostruka sila, koja djeluje u istome vremenskom intervalu, prouzročiti dvostruku promjenu količine gibanja tijela. Matematički je, pak, zgodnije imati jednadžbu, što se lako postiže jer proporcionalnost (2.2) možemo pisati i u formi jednakosti $\Delta\vec{p} = k\vec{F}\Delta t$, gdje je k neka konstanta. Proporcionalnost koju propisuje fizikalni zakon ostvarena je bilo kojim izborom konstante k. Odabir te konstante očito ne ovisi o samome fizikalnom zakonu, nego o dogovoru kod određivanja jedinica za mjerenje mase i sile. Kasnije ćemo detaljno objasniti kako je postignut takav dogovor, a sada samo navedimo da je po tome dogovoru $k = 1$, pa ćemo se toga ubuduće pridržavati.

Izraz (2.2) podrazumijeva da je sila konstantna u trajanju intervala Δt. U općenitijem slučaju, sila se može mijenjati u vremenu, pa uzimamo u razmatranje infinitezimalni vremenski interval dt, za vrijeme kojega se trenutna vrijednost sile nije promijenila. Stoga drugi Newtonov zakon možemo matematički napisati u obliku

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \tag{2.3}$$

Ovu ćemo matematičku formulaciju drugoga Newtonova zakona vrlo često rabiti jer se njeno fizikalno značenje lako i neposredno iščitava. Ona kaže da *promjena* količine gibanja $d\vec{p}$ nastaje kada na tijelo djeluje sila $\vec{F}$ u vremenskom intervalu dt. Produkt sile i intervala vremena u kojemu je sila djelovala često se u suvremenoj literaturi naziva *impuls sile*[12], pa bi se uz tu terminologiju moglo reći da promjena količine gibanja nastaje zbog impulsa sile.

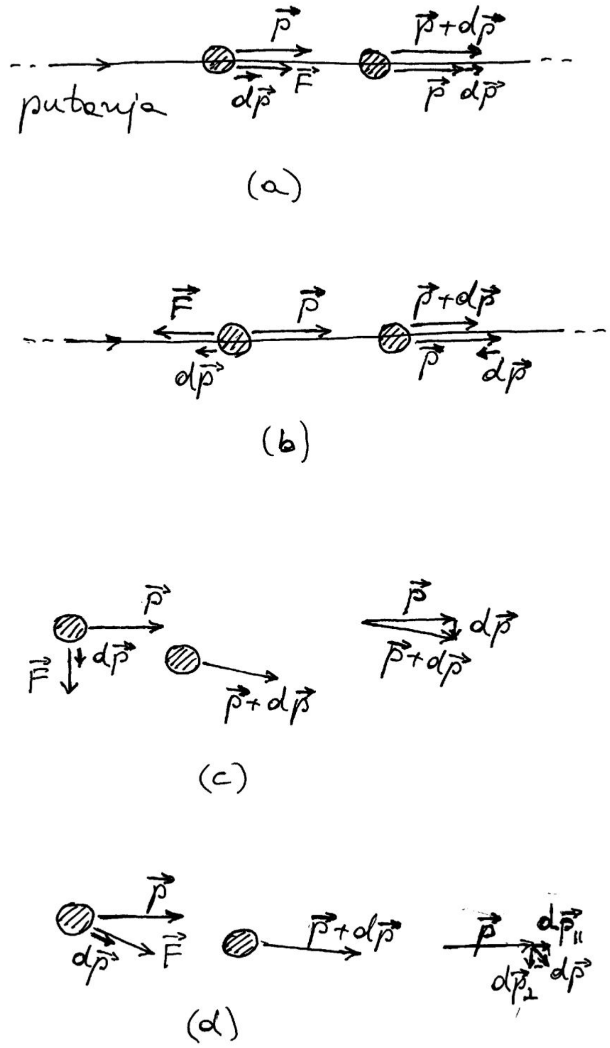
Napomena: Jednadžba (2.3) napisana je u formi odnosa između uzroka i posljedice. Takvu smo formu već upotrebljavali u odjeljku 1.2. S lijeve strane znaka jednakosti zapisana je posljedica koja nastaje zbog uzroka koji se očituju s desne strane znaka jednakosti.

Slika 2.3 prikazuje u čestičnom modelu tijelo koje u nekom trenutku ima količinu gibanja $\vec{p}$. U sljedećem vremenskom intervalu dt, na to tijelo djeluje sila $\vec{F}$, tako da prouzroči promjenu količine gibanja $d\vec{p}$. Nakon isteka vremenskog intervala dt, količina gibanja tijela iznosi $\vec{p} + d\vec{p}$, što znači da se na prvotnu količinu gibanja $\vec{p}$ doda nastala promjena $d\vec{p}$. To je način primjene drugoga zakona koji je Newton opisao u nastavku teksta neposredno nakon formulacije samoga zakona.

Vektor sile $\vec{F}$ može imati različite smjerove u odnosu prema prvotnom vektoru količine gibanja $\vec{p}$. Na slici 2.3a sila $\vec{F}$ ima isti smjer kao i $\vec{p}$. To znači da sila djeluje u smjeru u kojem se tijelo već giba nekom brzinom. Prema drugome Newtonovu zakonu,

[11] *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresse et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
Newton je uveo novi stručni termin *vis motrix impressa* kako bi označio djelovanje sile u vremenu, tj. produkt sile i intervala vremena u kojemu ona djeluje.

[12] U tome bi slučaju Newtonov latinski izraz *vis motrix impressa* trebalo prevoditi kao *impuls sile.*



Slika 2.3: (a) Tijelo ima prethodno stečenu količinu gibanja $\vec{p}$ i zatim na njega djeluje sila $\vec{F}$ u istome smjeru, pa dolazi do ubrzavanja gibanja po pravcu. (b) Djelovanje sile $\vec{F}$ suprotno od $\vec{p}$ dovodi do usporavanja gibanja po pravcu. (c) Kada sila $\vec{F}$ djeluje okomito na $\vec{p}$ dolazi samo do zakretanja putanje, bez promjene iznosa brzine. (d) U općenitom slučaju promjena $d\vec{p}$ ima tangencijalnu i radijalnu omponentu.

vektor promjene količine gibanja $d\vec{p}$ ima smjer sile $\vec{F}$, što je također prikazano na slici 2.3a. Zbog paralelnosti $\vec{p}$ i $d\vec{p}$, njihov zbroj $\vec{p} + d\vec{p}$ ima opet isti smjer. Iz ovog zapažanja slijedi zaključak da se u vremenskom intervalu dt putanja tijela nastavila po istome pravcu. Jedina promjena odnosi se na povećanje iznosa količine gibanja, odnosno brzine tijela. Ovakav rezultat mogli smo predvidjeti i temeljem običnog iskustva. Ako sila djeluje na tijelo u smjeru u kojem se tijelo već giba nekom brzinom, tijelo ne će promijeniti smjer brzine, nego će se samo iznos brzine povećati.

U slučaju kada sila $\vec{F}$ djeluje u suprotnom smjeru od količine gibanja $\vec{p}$, kao što je prikazano na slici 2.3b, promjena količine gibanja $d\vec{p}$ ima suprotan smjer od $\vec{p}$. Nakon vremenskog intervala dt, količina gibanja $\vec{p} + d\vec{p}$ je opet na istome pravcu. No, u ovome slučaju je iznos vektora $\vec{p} + d\vec{p}$ manji od iznosa vektora $\vec{p}$, što znači da se brzina smanjuje. To je također u skladu s iskustvenim predviđanjem. Kada sila djeluje u suprotnom smjeru od onoga u kojem se tijelo već giba nekom brzinom, nema promjene smjera brzine, a iznos brzine se smanjuje jer sila zaustavlja gibanje tijela.

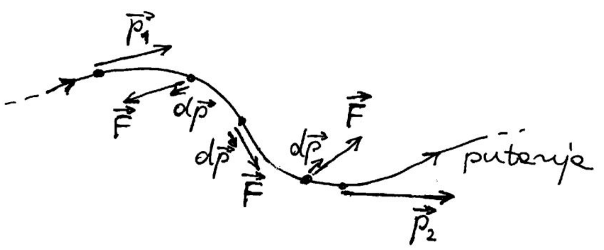
Razmotrimo sada slučaj prikazan na slici 2.3c u kojemu sila $\vec{F}$ djeluje okomito na smjer trenutne količine gibanja $\vec{p}$. Promjena količine gibanja $d\vec{p}$ je sada okomita na $\vec{p}$. Njihov zbroj $\vec{p} + d\vec{p}$ je vektor istog iznosa kao i $\vec{p}$, ali zakrenut za malen kut. Zaključujemo da sila, koja djeluje okomito na smjer gibanja tijela, ne mijenja iznos brzine tijela, nego samo zakreće njegovu putanju. Smjer zakretanja putanje ovisi o smjeru sile.

Napomena: Vektor $d\vec{p}$ je infinitezimalna veličina, no na slikama ga moramo nacrtati u nekakvoj konačnoj veličini. Stoga na slici 2.3c izgleda kao da bi zbroj $\vec{p} + d\vec{p}$ morao imati nešto veći iznos od $\vec{p}$. Međutim, ako zamislimo grafičko smanjivanje vektora koji predstavlja $d\vec{p}$, uviđamo da zbroj $\vec{p} + d\vec{p}$ poprima isti iznos kao i $\vec{p}$, te je samo zakrenut za malen kut.

Svi ostali slučajevi odnosa sile prema trenutnoj brzini tijela mogu se lako svesti na ove prethodno obrađene. Tako npr. na slici 2.3d imamo silu $\vec{F}$ koja čini neki kut prema trenutnoj količini gibanja $\vec{p}$. Promjena količine gibanja $d\vec{p}$ je u smjeru sile, no možemo je rastaviti na dvije komponente, paralelnu $d\vec{p}_{\parallel}$ i okomitu $d\vec{p}_{\perp}$ na smjer vektora $\vec{p}$. Paralelna komponenta mijenja iznos brzine, a okomita zakreće smjer brzine, odnosno savija putanju tijela. Oba se procesa odvijaju istodobno, tj. u vremenskom intervalu dt.

Ukupna promjena količine gibanja

Sila se može u vremenu mijenjati po iznosu i po smjeru. Slika 2.4 prikazuje tijelo koje u trenutku t_1 ima količinu gibanja $\vec{p}_1$. Ako tada djeluje na tijelo neka sila $\vec{F}$, nastat će promjena količine gibanja $d\vec{p}$ u vremenskom intervalu dt. Tijelo se malo pomakne i ima novu količinu gibanja. U svakome uzastopnom vremenskom intervalu računamo sa silom koja tada djeluje (slika 2.4) i dobivamo odgovarajuću promjenu količine gibanja. Ona se uvijek zbraja na prethodnu vrijednost količine gibanja. Tako se tijelo pomiče stvarajući svoju putanju, a mijenja mu se i količina gibanja.



Slika 2.4: Od trenutka t_1 kada tijelo ima količinu gibanja $\vec{p}_1$ pridodaju se promjene $d\vec{p}$ koje odgovaraju djelovanju (promjenljive) sile u uzastopnim intervalima dt. Tako se dođe do količine gibanja $\vec{p}_2$ u trenutku t_2.

Ako zbrojimo sve promjene $d\vec{p}$ u vremenskom intervalu od t_1 do t_2 dobivamo ukupnu promjenu

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \qquad (2.4)$$

Slika 2.4 prikazuje vektore $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ pa se može uočiti ukupna promjena količine gibanja u vremenskom intervalu od t_1 do t_2.

Moramo naglasiti da djelovanje sile oblikuje putanju tijela. Putanja na slici 2.4 ima takav oblik upravo zbog iznosa i smjerova sile u pojedinim trenucima od t_1 do t_2. Ukoliko djelovanje sile prestane, tijelo se nastavi gibati po pravcu onom brzinom koju je imalo u trenutku prestanka djelovanja sile.

Alternativan matematički oblik drugoga Newtonova zakona

Drugi Newtonov zakon možemo postaviti u alternativan matematički oblik. Uvažimo definiciju količine gibanja $\vec{p} = m\vec{v}$ i napišimo njenu promjenu $d\vec{p} = md\vec{v}$. Pri tome smo se držali dogovora o definiciji mase kao konstantne veličine za dano tijelo. Uvrštavanjem ovog izraza za promjenu količine gibanja u jednadžbu (2.3), dobiva se najprije $md\vec{v} = \vec{F}dt$, a dijeljenjem obje strane jednadžbe s dt i uvažavanjem da je po definiciji akceleracija $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, možemo konačni izraz napisati u obliku

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.5)$$

Ova jednadžba je također napisana kao odnos uzroka i posljedice. Akceleracija tijela nastaje kao posljedica djelovanja sile na tijelo koje ima određenu masu. Uočimo da akceleracija tijela ovisi o jednom vanjskom uzroku (sila) i jednom unutarnjem svojstvu tijela (masa).

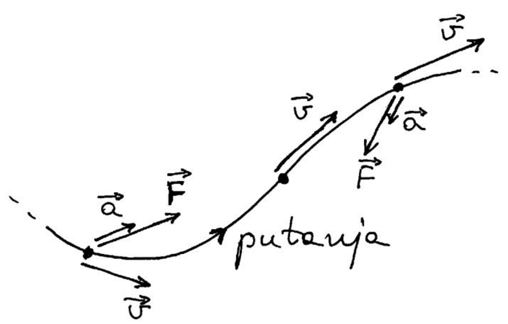
Napomena: Matematički bi bilo sasvim ispravno kada bi se jednadžba (2.5) pisala i u drugačijim oblicima, kao npr. $m\vec{a} = \vec{F}$. Međutim, tada se gubi jasno isticanje uzroka i posljedice. Ako kažemo da je produkt mase i akceleracije posljedica djelovanja sile, stopili smo u posljedici dvije veličine od kojih je samo jedna uistinu promjenljiva i ovisna o sili, a druga je konstanta i neovisna o sili. Često se u literaturi navodi i oblik $\vec{F} = m\vec{a}$, koji je također matematički ispravan, no može navesti na pogrešan dojam da je sila posljedica koja se javlja kada tijelo ima akceleraciju.

Iako su oba oblika u kojima smo zapisali drugi Newtonov zakon ekvivalentni, korisno je rasvijetliti jednu njihovu razliku. Oblik jednadžbe (2.3) ističe *promjenu* koja nastaje pod djelovanjem sile. Za razliku od toga, jednadžba (2.5) sadrži samo *trenutne* veličine.[13] Ona kaže da će tijelo imati ak-

[13] Takvu jednadžbu formulirao je njemački matematičar i fizičar L. Euler sredinom 18. stoljeća, ne navodeći pritom da ona proizlazi iz izvornog zapisa Newtonova zakona. Nerazumijevanje povezanosti između derivacije brzine i malenih promjena brzine imalo je paralelu u matematičkom problemu odnosa glatke krivulje i upisanog poligona, koji je tek krajem 18. stoljeća konačno zaključen potpunim prihvaćanjem pojma granične vrijednosti.

celeraciju $\vec{a}$ u nekom trenutku ako u tome istom trenutku djeluje na njega sila $\vec{F}$.

Napomena: Valja dobro naglasiti da akceleracija koju tijelo ima u nekome trenutku nema nikakve veze s eventualnim djelovanjem sile u prethodnim trenucima. Akceleracija nije veličina koja se nekako akumulira tijekom vremena. Naprotiv, akceleracija je vezana isključivo uz mijenjanje brzine tijela u tome trenutku.



Slika 2.5: U pojedinim trenucima prikazani su vektori brzine, sile i akceleracije. U središnjoj točki ne djeluje sila, pa nema ni trenutne akceleracije. U drugim dvjema točkama može se predvidjeti na koju će stranu sila zakrenuti putanju, a uz to može povećati (ili smanjiti) iznos brzine do sljedeće vrlo bliske točke.

Kada crtežom prikazujemo primjenu jednadžbe (2.5) na gibanje tijela, mogu se nacrtati vektori sila i akceleracija u raznim trenucima kao na slici 2.5. U svakom od tih trenutaka tijelo ima neku brzinu koja je nužno tangencijalna na putanju tijela. No, akceleracija tijela u tome trenutku nije ni u kakvoj vezi s trenutnom brzinom. Ona ovisi isključivo o tome djeluje li u tome trenutku sila na tijelo, ili ne. Ako sila ne djeluje, nema ni akceleracije. To znači da se brzina ne mijenja, a putanja tijela se nastavlja u smjeru brzine. Ako pak sila djeluje, onda tijelo ima akceleraciju u tom istom smjeru, te će mu se brzina promijeniti.

Na slici 2.4 smo pokazali kako se primjenom drugoga Newtonova zakona u obliku jednadžbe (2.3) može postupno utvrđivati putanja tijela. To je lako izvedivo jer jednadžba (2.3) izravno daje promjenu relevantne veličine. S druge strane, alternativni zapis drugoga Newtonova zakona u obliku jednadžbe (2.5) sadrži samo trenutne vrijednosti, te se ne može izravno primijeniti za određivanje putanje. Problem određivanja putanje može se riješiti tako da se najprije izračuna promjena brzine tijela putem poznatog izraza $d\vec{v} = \vec{a}dt$ u kojemu još treba uvažiti da je akceleracija $\vec{a}$ određena jednadžbom (2.5). Rezultirajuću promjenu brzine $d\vec{v} = (\vec{F}/m)dt$ valja zbrojiti na trenutnu brzinu $\vec{v}$ da bi se dobila nova brzina $\vec{v} + d\vec{v}$ na kraju vremenskog intervala dt. Očito je to način kojim se vraćamo na već opisani postupak na slici 2.4, pa ga nema potrebe ponavljati.

Zaključimo ovaj uvodni prikaz drugoga Newtonova zakona podsjećanjem na to da se radi o aksiomu, tj. tvrdnji koju prihvaćamo jer nam se čini očitom, te ne tražimo dokaza. Uistinu, drugi Newtonov zakon ne možemo eksperimentalno dokazati, odnosno provjeriti njegovu valjanost, jer nema načina kako bismo neovisno izmjerili silu i masu tijela. O tome će još biti riječi u raspravi o međuovisnosti Newtonovih zakona.

2.2.3 Treći Newtonov zakon

Treći Newtonov zakon gibanja u izvornome obliku glasi[14]:

> ***Akciji se uvijek suprotstavlja jednaka reakcija; ili, djelovanja dvaju tijela jedno na drugo uvijek su jednaka po iznosu i usmjerena na suprotne strane.***

Matematički se ovaj zakon može napisati u obliku

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{2.6}$$

gdje dogovorno uzimamo da $\vec{F}_{AB}$ (skraćeno od $\vec{F}_{A\,na\,B}$) označava silu kojom tijelo A djeluje na tijelo B, a $\vec{F}_{BA}$ (skraćeno od $\vec{F}_{B\,na\,A}$) predstavlja silu kojom tijelo B djeluje na A.

Napomena: Moguć je i dogovor s obrnutim redoslijedom indeksa, te se i takav susreće u literaturi. Tada se npr. sila kojom A djeluje na B piše kao $\vec{F}_{BA}$ (skraćeno od $\vec{F}_{na\,B\,od\,A}$). Mi ćemo se držati prethodno navedenog dogovora po kojemu se u indeksima najprije obilježava

[14] Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equales et in partes contrarias dirigi.

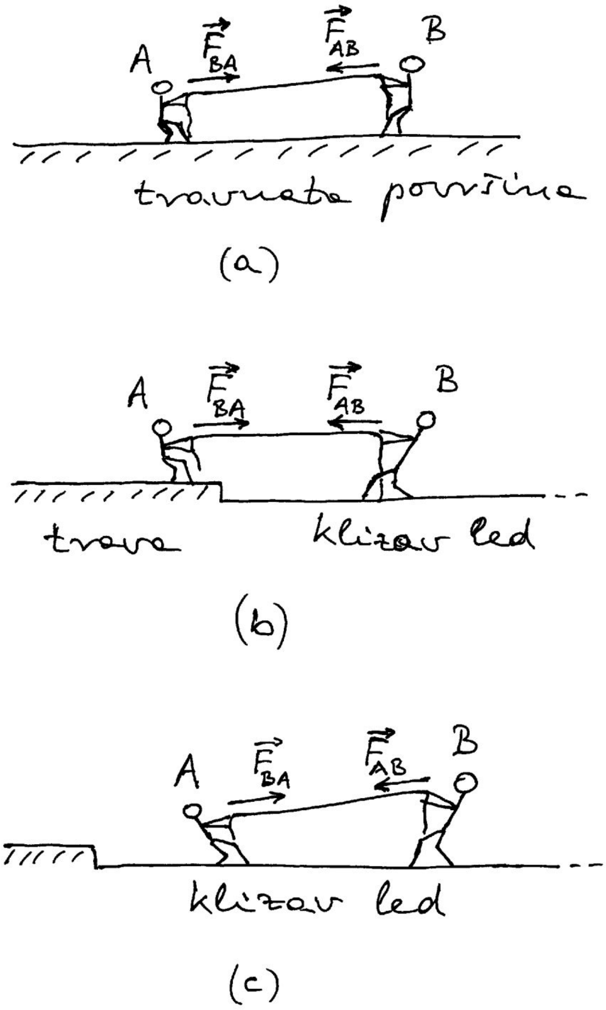
> tijelo koje djeluje silom, a zatim ono na koje ta sila djeluje jer se tim slijedom obično usmeno izražavamo, pa se lako pamti.

Ovaj je zakon u prvome redu važan po tome što utvrđuje da se sila uvijek pojavljuje kao međudjelovanje dvaju tijela. Ako se pažljivo osvrnemo unatrag, možemo uočiti da se do sada govorilo o sili kao vanjskom djelovanju na tijelo, no nigdje nije bilo rečeno otkud to djelovanje može doći. Trećim Newtonovim zakonom se utvrđuje da djelovanje na neko tijelo ne može postojati samo po sebi, tj. ne može dolaziti ni iz čega, nego mora postojati i drugo tijelo.

Nadalje, treći Newtonov zakon utvrđuje postojanje simetrije u međudjelovanju. Veoma je zanimljivo malo dublje razmotriti problem međudjelovanja dvaju tijela. Ako je za djelovanje na neko tijelo nužno postojanje drugog tijela, onda je logično očekivati da postoji i neko uzvratno djelovanje prvog tijela na to drugo. No, pitamo se mora li ono biti simetrično. Tu će nas svakidašnje iskustvo često navesti na krivi zaključak.

Temeljem iskustva, rekli bismo npr. da jači čovjek može djelovati većom silom na slabijega, nego što slabiji može na jačega. Recimo da se nadmetanje vodi u obostranom natezanju konopca kao što je prikazano na slici 2.6a, gdje obojica stoje na travnatoj površini. Očekujemo da će jači čovjek nadvladati i potegnuti k sebi i konopac i slabijeg čovjeka s njim. Iz toga bi većina ljudi zaključila da je jači čovjek djelovao većom silom na slabijega.

Međutim, ako se nadmetanje izvede tako da jači čovjek stoji na glatkoj i veoma klizavoj površini zaleđenog jezerca, dok slabiji stoji na travnatoj površini blizu ruba jezerca (slika 2.6b), rezultat će biti sasvim drugačiji nego prije. Kolikogod se jaki čovjek trudio i povlačio konopac, njegovo će se tijelo klizati prema rubu jezerca gdje stoji slabiji čovjek. Što se slabijeg čovjeka tiče, on se ne će ni pomaknuti s mjesta, a može čak i koračati unatrag povlačeći i konopac i jačeg čovjeka. Ovdje nam se brzo srušila teorija o tome kako jači uvijek nadvlada slabijega. Očito je da osim sila kojima obojica potežu konopac, moramo uzeti u obzir i trenje s podlogom. O tome će još biti rasprave kasnije, a za sada možemo samo konstatirati da ni nakon ovog pokusa ne možemo reći koji je od njih dvojice povlačio konopac većom silom.



Slika 2.6: Nadmetanje u povlačenju konopca između slabijeg čovjeka A i jačeg čovjeka B. (a) Obojica stoje na travnatoj površini gdje trenje igra veliku ulogu. (b) Jači čovjek stoji na klizavoj ledenoj površini. (c) Obojica su na klizavoj ledenoj površini gdje je trenje gotovo zanemarivo.

Da bismo konačno ustanovili pravi odnos među silama dvojice ljudi, uklonimo vanjske utjecaje kao što je trenje tako da obojicu postavimo na glatku zaleđenu površinu kao na slici 2.6c. Kada oni počnu povlačiti konopac, opaža se da se obojica pomiču (klize) jedan prema drugome. Štoviše, moguće je ponavljati pokus tako da samo jedan od njih povlači konopac, a drugi ga npr. veže sebi oko pojasa. Rezultat pokazuje da se u svakome slučaju obojica pomiču (klize) jedan prema drugome. Većina ljudi

ima neko iskustvo s klizavim površinama, te ih ovakav ishod pokusa ne iznenađuje. Možemo zaključiti da u svakome slučaju postoji i jedna i druga sila jer bi inače jedan od dvojice ljudi mirovao. No, to nam još uvijek ne daje eksperimentalni odgovor na pitanje o odnosu sila dvojice ljudi.

Treći Newtonov zakon je također aksiom, tj. tvrdnja koju prihvaćamo bez dokaza, a to znači i bez mogućnosti eksperimentalne provjere njegove istinitosti. Prihvatimo, dakle, da su dvije sile jednake po iznosu, a u sljedećoj ćemo raspravi pokazati da taj aksiom ipak nije proizvoljan, a još manje besmislen.

2.2.4 Rasprava o uzajamnoj ovisnosti Newtonovih zakona

Prema prvome Newtonovu zakonu, stanje mirovanja tijela, ili stanje jednolikog gibanja po pravcu, nužno opstaju ukoliko nema djelovanja vanjskih sila. No, pitamo se kako možemo biti sigurni da u danim okolnostima uistinu ne djeluju sile na promatrano tijelo.

Pokušajmo razriješiti ovaj problem pozivanjem na treći Newtonov zakon. Naime, po tome zakonu, sila predstavlja međudjelovanje dvaju tijela. Odmah možemo doći na zamisao da bismo uvjete, u kojima nema vanjskog djelovanja na neko tijelo, mogli ostvariti ukoliko drugih tijela ne bi ni bilo, pa bi promatrano tijelo bilo jedino u svemiru. Kada bismo još mogli u toj zamišljenoj situaciji eksperimentalno ustanoviti da tijelo trajno miruje, ili se giba jednoliko po pravcu, imali bismo dokaz za valjanost prvoga Newtonova zakona.

Međutim, postavlja se pitanje kako bismo mjerili gibanje tog tijela kada bi ono bilo jedino u svemiru. Ako ne možemo ukazati na nešto određeno naprama čemu se tijelo giba, onda postaje sasvim neodređeno giba li se tijelo ili ne. U formalnom smislu, položaj tijela uvijek određujemo u odnosu prema odabranom ishodištu O. No, ako nema barem još jednog tijela, ne znamo kako odrediti gdje je ishodište O, te miruje li ono za vrijeme mjerenja. Tu zamisao moramo, dakle, odbaciti kao neuspješnu.

Čim imamo sustav od više tijela, nemamo apsolutnu sigurnost da na promatrano tijelo ne djeluju neke vanjske sile. S druge pak strane, ako ponovo razmislimo o Galileijevim pokusima s gibanjem kuglice na glatkoj horizontalnoj podlozi, čini nam se razumnim ako kažemo da su vanjske sile kompenzirane tako da nema rezultantne sile na kuglicu. To ne možemo dokazati, ali nam se ipak čini razumnim. S tim mislima, prihvaćamo prvi Newtonov aksiom kao tvrdnju koju ne možemo dokazati, ali je proglašavamo istinitom jer nam to razum nalaže.

Kratko o inercijalnim i neinercijalnim referentnim sustavima

Postoji još jedan važan problem u primjeni prvoga Newtonova zakona. Postavimo horizontalnu ravnu ploču u prostrani vagon koji se giba po ravnoj pruzi i pratimo moguće gibanje kuglice na toj ploči. U tu svrhu odredimo neku točku na ploči kao ishodište O koordinatnog sustava. Istodobno zamislimo jedno drugo ishodište O' na Zemlji pokraj pruge.

Ako vlak putuje stalnom brzinom u odnosu prema površini Zemlje, pokusi će pokazati da kuglica, koju postavimo na horizontalnu ploču na nekom mjestu u odnosu prema ishodištu O, te ju pustimo slobodnu, nastavlja mirovati na tome mjestu sve dok neko vanjsko djelovanje to stanje ne promijeni. Ista kuglica će ustrajati u jednolikom gibanju po pravcu (brzinom gibanja vlaka) ako se gleda iz pozicije ishodišta O' na Zemlji pokraj pruge. Očito je da ovi pokusi pokazuju suglasnost s prvim Newtonovim zakonom. On se, dakle, može primjenjivati bilo tako da gibanje kuglice mjerimo u odnosu prema ishodištu O' koje je čvrsto vezano uz površinu Zemlje, ili prema drugom ishodištu O koje se giba jednoliko po pravcu u odnosu prema ishodištu O'.

Sasvim drugačija situacija nastupa kada se vlak usporava. Kuglica koju postavimo na horizontalnu ploču i pustimo ju slobodnu, ne će ostati u stanju mirovanja u odnosu prema ishodištu O, nego će se sama od sebe pokrenuti prema prednjem dijelu vagona, tj. u smjeru trenutne brzine vlaka. Ako se vlak ubrzava, kuglica će se sama od sebe pokrenuti u suprotnom smjeru. Ovaj je rezultat dovoljan da utvrdimo kako se prvi Newtonov zakon *ne smije* primjenjivati u slučaju kada položaj tijela određujemo prema ishodištu O koje trenutno mijenja svoju brzinu gibanja u odnosu prema onome ishodištu O' koje miruje na Zemlji.

Navedena opažanja mogu se dopuniti još drugima i vode na opsežnu raspravu kojoj će biti posvećeno cijelo poglavlje 4. Ovdje ne želimo previše skretati s teme o međuovisnosti Newtonovih zakona, pa ćemo

samo navesti neka pravila. Svaki koordinatni sustav, u kojemu se opaža suglasnost s prvim Newtonovim zakonom, naziva se *inercijalni referentni sustav*. S druge strane, svaki koordinatni sustav u kojemu se opaža nesuglasje s prvim Newtonovim zakonom, naziva se *neinercijalnim referentnim sustavom*. Radi jasnoće, recimo da se pod opažanjem gibanja u nekom referentnom koordinatnom sustavu misli na mjerenje gibanja tijela u odnosu prema ishodištu toga koordinatnog sustava.

Referentni sustav kojemu je ishodište vezano uz površinu Zemlje predstavlja *približno* inercijalan sustav. To znači da je odstupanje od prvoga Newtonova zakona vrlo maleno i može se opaziti samo u iznimno preciznim mjerenjima. Isto vrijedi i za bilo koji referentni sustav kojemu se ishodište giba jednoliko po pravcu u odnosu prema nekoj točki na površini Zemlje. O izboru idealnoga inercijalnog sustava bit će riječi u poglavlju 4.

Neinercijalni referentni sustav je bilo koji koordinatni sustav za kojega možemo utvrditi da se njegovo ishodište pomiče nekom trenutnom akceleracijom u odnosu prema ishodištu nekog inercijalnog sustava. U tome slučaju, ishodište neinercijalnog sustava ima trenutnu akceleraciju i prema ishodištima svih drugih inercijalnih sustava.

O odnosu prvoga i drugoga Newtonova zakona

Dok smo uvodno raspravljali o prvome i drugome Newtonovu zakonu, imali smo na umu podjelu na prirodno i nasilno gibanje u Aristotelovom smislu riječi. Stoga nam se činilo nužnim da se svako od tih gibanja utvrdi posebnim zakonom. Međutim, kada već imamo napisan drugi zakon u matematičkom obliku (jednadžba (2.5)), odmah možemo uočiti da za $\vec{F} = 0$ dobivamo $\vec{a} = 0$, tj. brzina se ne mijenja ($\vec{v} = konst.$). Dakle, formalno se dobiva prvi Newtonov zakon kao poseban slučaj drugoga Newtonova zakona, pa se nameće pitanje jesu li ta dva zakona neovisna i jesu li nam oba potrebna kao aksiomi.

Problem je znatno složeniji nego što se na prvi pogled čini. Drugi Newtonov zakon smije se primjenjivati samo na gibanja koja promatramo u inercijalnom sustavu, tj. kada kinematičke veličine tijela mjerimo u odnosu prema ishodištu tog inercijalnog sustava. Uzmimo primjer gibanja kuglice niz vrlo blagu kosinu postavljenu unutar prostranog vagona vlaka koji se giba po ravnoj pruzi. Gibanje kuglice mjerimo u odnosu prema ishodištu O koje se nalazi npr. na vrhu kosine. Ako vlak miruje ili se giba konstantnom brzinom, izmjerena akceleracija kuglice imat će uvijek istu vrijednost. Tada smijemo primjenjivati drugi Newtonov zakon. Međutim, ako mjerenje obavljamo dok vlak koči, rezultat za akceleraciju će nam ispasti drugačiji. Štoviše, rezultati će ovisiti o naglosti kočenja vlaka. U takvim uvjetima drugi Newtonov zakon ne smijemo upotrebljavati.

O promatranju gibanja u neinercijalnom sustavu, gdje ne vrijedi drugi Newtonov zakon, raspravljat ćemo još potanko u poglavlju 4. Ovdje samo želimo istaknuti da su oba Newtonova zakona potrebna. Prvim Newtonovim zakonom određujemo je li neki referentni sustav inercijalan ili ne. Tek kada utvrdimo da je dotični referentni sustav inercijalan, možemo u njemu primjenjivati drugi Newtonov zakon.

Što se tiče trećega Newtonova zakona, njegova valjanost ne ovisi o izboru referentnog sustava u kojemu promatramo tijela i odnose među njima.

Povezanost drugoga i trećega Newtonova zakona

Vidjeli smo da drugi Newtonov zakon uključuje masu i silu, a značenje tih veličina opisano je u prethodnim definicijama. Međutim, da bismo ih mogli prihvatiti kao fizikalne veličine potrebno nam je utvrditi postupak njihova mjerenja i jedinice za mjerenje . Ono što u načelu znamo mjeriti jest akceleracija tijela. No, to je tek jedna od triju veličina u jednadžbi (2.5) koja izražava drugi Newtonov zakon. Sigurno je da se iz jedne jednadžbe ne mogu odrediti masa i sila kao dvije nepoznanice.

Problem možemo početi rješavati ako primijenimo istodobno drugi i treći Newtonov zakon. Zgodno nam je nastaviti razmatranje jakog i slabog čovjeka koji se uzajamno privlače na savršeno klizavom ledu kao na slici 2.6c. Pretpostavimo sada da su nam u takvim pokusima dostupni instrumenti za mjerenja položaja tijela i vremena, te da možemo eksperimentalno odrediti u danom trenutku akceleraciju $\vec{a}_A$ čovjeka A i trenutnu akceleraciju $\vec{a}_B$ čovjeka B. Napravimo omjer apsolutnih vrijednosti ovih akceleracija

$$a_A : a_B = \frac{F_{BA}}{m_A} : \frac{F_{AB}}{m_B} \qquad (2.7)$$

gdje smo primijenili drugi Newtonov zakon po kojemu akceleraciju $\vec{a}_A$ uzrokuje sila $\vec{F}_{BA}$ koja djeluje na tijelo mase m_A, te analogno za tijelo B.

Ako primijenimo sada i treći Newtonov zakon, otvara nam se mogućnost velikog napretka u rješavanju problema nepoznanica. Naime, uz jednakost iznosa sila $F_{BA} = F_{AB}$, jednadžba (2.7) daje

$$a_A : a_B = \frac{1}{m_A} : \frac{1}{m_B} \tag{2.8}$$

Ova nam jednadžba omogućuje da iz mjerenih akceleracija odredimo omjer masa dvaju tijela. Potrebno je još napraviti samo jedan korak da bismo konačno mogli određivati mase pojedinih tijela.

Prisjetimo se da smo za određivanje dužina i vremenskih intervala morali *dogovorno* odrediti jedinice za mjerenje. To isto vrijedi i za mjerenje mase. Masa, naime, nije izvedena fizikalna veličina, tj. ona se ne izvodi iz ranije utvrđenih temeljnih veličina dužine i vremena. Masa je kvalitativno potpuno nova fizikalna veličina, koja stoga spada također u *osnovne veličine*. Za nju dogovorno utvrđujemo dimenziju i jedinicu za mjerenje.

Dimenzija i jedinica za mjerenje mase. Oznaka za dimenziju mase je $[M]$. Jedinica za mjerenje mase u SI je *kilogram* (1kg). Na Generalnoj konferenciji za utege i mjere održanoj 1899. godine u Parizu, dogovorno je određeno da masu od 1kg ima valjak načinjen od legure platine i iridija, koji se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sévresu pokraj Pariza.

Napomena: Kada pomišljamo na uteg koji ima masu od 1kg, moramo znati da nam pri tome nije važna količina tvari tog tijela, nego njegovo svojstvo inercije. Masa od 1kg je mjera inercije koju taj uteg ima, odnosno mjera za njegovo svojstvo odupiranja promjeni brzine, kada i ukoliko se takav pokus radi.

Kada je jednom utvrđeno tijelo koje ima masu od 1kg, možemo u načelu zamisliti postupak mjerenja masa svih ostalih tijela. Izvođenjem pokusa nalik gore opisanome, s time da je jedno od tijela ono kojemu masa iznosi 1kg, dobivamo jednadžbu (2.8) s masom drugog tijela kao jedinom nepoznanicom, pa je možemo lako riješiti. Razumije se, kada jednom odredimo masu nekog tijela, možemo ga dalje upotrebljavati umjesto utega od 1kg u postupcima mjerenje masa drugih tijela.

Napomena: Često se čuje da je mase tijela moguće odrediti vaganjem. Kod vaganja se radi o gravitacijskom svojstvu tijela o čemu će biti govora u sljedećem poglavlju 3. Ovdje govorimo o masi kao o mjeri za tromost tijela pa moramo navesti pokuse u kojima se očituje upravo to svojstvo.

Postupak mjerenja sile

Vraćajući se još jednom na opisani pokus s jakim i slabim čovjekom na savršeno klizavom ledu, vidimo da je mjerenjem akceleracija moguće odrediti samo masu jednog od njih i to ukoliko je masa onog drugog već poznata. Početna zamisao da se utvrdi odnos sila kojima djeluju jaki, odnosno slabi čovjek, nije ostvariva. Jednakost iznosa tih sila morali smo prihvatiti bez dokaza, tj. kao aksiom. Međutim, kada jednom imamo određene mase obaju tijela, možemo se poslužiti drugim Newtonovim zakonom i odrediti sam iznos sile

$$F_{BA} = m_A a_A \tag{2.9}$$

Isto vrijedi i za drugog čovjeka B. Ako smo u nekom prethodnom postupku već izmjerili njegovu masu m_B, te ako u sadašnjem pokusu odredimo akceleraciju a_B, možemo pouzdano reći da je na njega djelovala sila $F_{AB} = m_B a_B$, prema analogiji s jednadžbom (2.9).

Napomena: Jednadžbu (2.9) ne smijemo shvatiti kao uzročno posljedičnu formu zapisa, tj. sila F_{BA} na tijelo A *nije* posljedica toga što tijelo A ima masu m_A i giba se akceleracijom a_A. Jednadžba (2.9) samo služi za *izračunavanje* sile ako je poznata masa tijela i izmjerena negova akceleracija.

Konačno smo došli do postupka mjerenja sila. Podsjetimo se, sila je definirana kao *bilo koje djelovanje* koje uzrokuje promjenu količine gibanja tijela. Time nije rečeno otkud potječe to djelovanje koje se naziva silom, niti mogu li postojati različite vrste sila, nego je samo utvrđena posljedica djelovanja sile na tijelo. Drugim riječima, ako ustanovimo da se promijenila količina gibanja tijela, uzimamo to kao dokaz da je na tijelo izvršeno neko djelovanje koje nazivamo silom. U svrhu kvantitativnog određivanja te sile, moramo poznavati masu tijela iz

nekog prethodnog mjerenja, te u aktualnome mjerenju odrediti akceleraciju tijela. Jednadžba $\vec{F} = m\vec{a}$ daje nam rezultat mjerenja sile.

Dimenzija i jedinica za silu. Sila je očito izvedena fizikalna veličina. Njena dimenzija se izvodi iz jednadžbe $\vec{F} = m\vec{a}$ koja daje $[F] = [MLT^{-2}$. Jedinca za mjerenje sile dobila je posebno ime 1 njutn (1N) u čast Isaaca Newtona. Kažemo da je sila od jednog njutna ona sila koja tijelu s masom od 1kg daje akceleraciju od 1ms^{-2}.

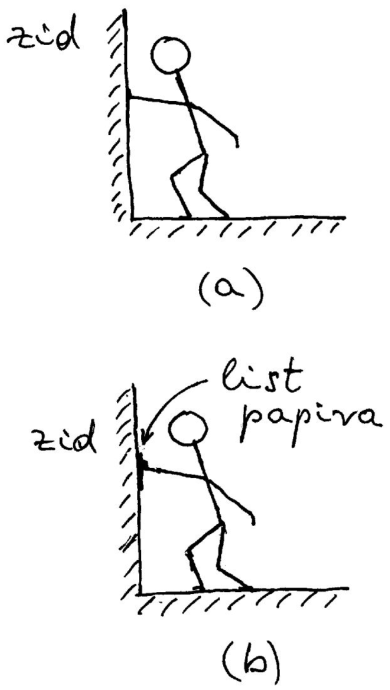
Napomena: Često se kaže da silu možemo izmjeriti dinamometrom. Kada bi to bio neovisan način mjerenja sila, mogli bismo zamisliti postupak u kojemu izmjerimo najprije masu m tijela, zatim u situaciji kada na to tijelo djeluje neka sila izmjerimo akceleraciju $\vec{a}$ koju to tijelo poprimi, a usput dinamometrom izmjerimo i silu $\vec{F}$ koja je djelovala na tijelo. Množenjem izmjerenih veličina m i $\vec{a}$ dobivamo vrijednost za silu $\vec{F}$ u skladu s drugim Newtonovim zakonom. No, imali bismo i neovisno mjerenje sile pomoću dinamometra, te bi nam cijeli postupak omogućio usporedbu rezultata za silu, a to bi značilo da je moguće *eksperimentalno provjeravanje* drugoga Newtonova zakona.

Iznesena zamisao nije nimalo utemeljena. Sila je, naime, izvorno definirana Newtonovim zakonima, a u njima nema ni spomena o dinamometru. Prema tome, silu možemo neovisno izmjeriti samo putem gore opisanog postupka mjerenja mase m tijela i akceleracije $\vec{a}$ koju tijelo dobiva. Tek tako određena sila može poslužiti da se baždari neki dinamometar. Bilo bi besmisleno tako baždareni dinamometar kasnije upotrijebiti za *provjeru valjanosti* drugoga Newtonova zakona kada je njegovo baždarenje izvedeno upravo na temelju već prihvaćene valjanosti tog istog zakona.

Uvjerljivost trećega Newtonova zakona

Mnogi su spremni prihvatiti na riječima treći Newtonov zakon, ali u njega intuitivno ne vjeruju. Radi se o aksiomu kojega bismo trebali prihvatiti bez dokaza, ali trebao bi nam ipak biti toliko očit da ga razum potpuno prihvati. Ovome problemu vrijedi posvetiti još pažnje.

Razmotrimo primjer u kojemu čovjek rukom upire u zid (slika 2.7a). Prema trećemu Newtonovu zakonu, morao bi i zid djelovati na čovjeka silom koja je jednaka po iznosu, ali suprotnog smjera od one prve. Uistinu, čovjek osjeća na svojim prstima pritisak zida i to je vlastiti doživljaj postojanja sile kojom zid djeluje na ruku. Međutim, iz tog se doživljaja ne može procijeniti je li sila kojom zid djeluje na čovjekovu ruku baš jednaka po iznosu onoj kojom čovjek djeluje na zid.



Slika 2.7: (a) Čovjek upire rukom izravno u zid. (b) List papira je umetnut tako da na njega djeluje s jedne strane čovjek svojom rukom a s druge strane djeluje zid.

Napomena: Što čovjek jače upire u zid, to je veća i sila kojom zid uzvratno djeluje na čovjekove prste. Čovjek je živo biće pa je intuitivno jasno da može mijenjati silu kojom djeluje na zid, no pitanje je kako neživi zid može stvarati promjenljivu silu na čovjeka. Na to ćemo odgovoriti u sljedećem poglavlju 3 gdje se razmatra priroda sila.

U jednakost sila između čovjeka i zida možemo se ipak uvjeriti ako se oslonimo na drugi Newtonov zakon koji nam se čini neprijepornim. Postavimo list

papira na zid i gurajmo opet rukom preko tog papira. Lako nam je zaključiti da je papir sada umetnuto tijelo (slika 2.7b). Na njega djeluje s jedne strane sila koju stvara čovjek, a s druge strane na papir djeluje zid. Kada te dvije sile ne bi bile potpuno jednake po iznosu, postojala bi rezultantna sila na list papira. Prema drugome Newtonovu zakonu, rezultantna bi sila morala dovesti do promjene stanja mirovanja papira, no to se ne događa, pa posredno zaključujemo da su navedene dvije sile potpuno jednake po iznosu i suprotnoga smjera, tj. da vrijedi treći Newtonov zakon.

Razmotrimo sada jedan primjer koji nije statički. Neka to bude slučaj s međudjelovanjem jakog i slabog čovjeka na savršeno glatkom ledu koji smo već ranije razmatrali. Na slici 2.8 nacrtan je još jednom taj isti prizor i označena je sila $\vec{F}_{Ak}$ kojom čovjek A djeluje na konopac k, te sila $\vec{F}_{Bk}$ kojom čovjek B djeluje također na konopac. Oba čovjeka se primiču jedan drugome ali njihove akceleracije nisu po iznosu jednake, ukoliko su im mase različite. U tome se slučaju i konopac pomiče tako da ima neku akceleraciju $\vec{a}$, koja bi trebala biti negdje između akceleracija dvaju tjela. Nju možemo odrediti primjenom drugoga Newtonova zakona na konopac kao tijelo koje ima masu m, a na njega djeluje ukupna sila $\vec{F}_k = \vec{F}_{Ak} + \vec{F}_{Bk}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_k}{m} \tag{2.10}$$

Kada bi sila $\vec{F}_k$ imala neki iznos različit od nule, a konopac bio u obliku tanke, ali čvrste, niti vrlo malene mase, dobili bismo računski iz jednadžbe (2.10) nekakvu veliku akceleraciju za konopac. No, iz uvida u realnu situaciju, jasno je da konopac ne može imati veću akceleraciju od ljudi koji se njime privlače. To znači da ukupna sila na konopac $\vec{F}_k$ mora zapravo biti malena. Štoviše, ako zamišljamo da konopac ima sve manju masu ($m \to 0$), morala bi i ukupna sila na konopac biti sve manja ($\vec{F}_k \to 0$), kako bi akceleracija konopca $\vec{a}$ odgovarala realnoj situaciji. Mogli bismo reći da su u graničnom slučaju tijela A i B spojena nekom niti bez mase, ali dovoljno čvrstom da ne pukne. Tada možemo reći da sila $\vec{F}_{Ak}$ djeluje preko niti na tijelo B, pa je označimo kao $\vec{F}_{AB}$. Analogno i silu $\vec{F}_{Bk}$ označimo kao $\vec{F}_{BA}$. U graničnom slučaju je, dakle, $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$, odnosno

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{2.11}$$

što opet pokazuje valjanost trećega Newtonova zakona.



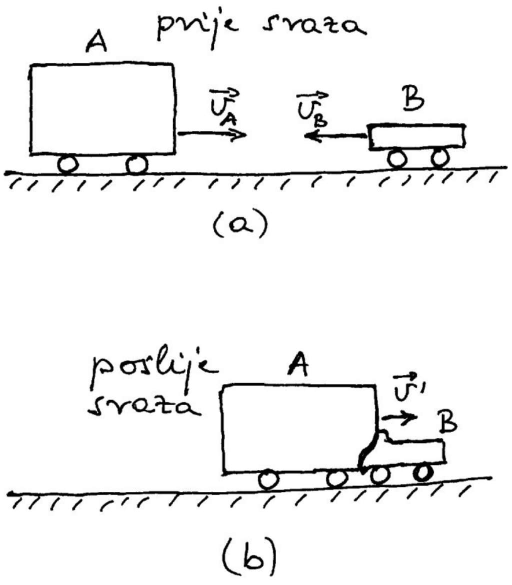
Slika 2.8: Prikaz u kojemu konopac smatramo trećim tijelom koje ima svoju masu i može imati neku akceleraciju. Tek u idealizaciji u kojoj bi se masa konopca mogla zanemariti, ali zadržati njegovo svojstvo čvrstoće, mogli bismo smatrati konopac samo posrednikom u prijenosu sile jednog čovjeka na drugog.

Napomena: Pojam čvrstoće konopca ili neke niti, te sila koje se pritom javljaju, razmotrit ćemo detaljnije u sljedećem poglavlju 3.

Korisno je još razmotriti slučaj sudara teškog i laganog tijela, npr. kamiona i malenog automobila. Intuitivno bi ljudi rekli da je u trenutku sraza teško tijelo djelovalo većom silom na lagano, nego lagano tijelo na teško. Taj je dojam zasnovan na iskustvu sa slučajevima u kojima su se prije sudara oba tijela gibala podjednakim brzinama jedno prema drugome. U srazu se tada primjećuje da teže tijelo potisne lakše i oba se nastave gibati u smjeru težega dok ih trenje ne zaustavi. Takva je situacija prikazana na slici 2.9.

Činjenica da teško tijelo potisne lakše u primjeru na slici 2.9, nije dokaz da je djelovalo većom silom. U to se možemo uvjeriti ako pokus izvedemo tako da teško tijelo miruje a lagano nalijeće na njega kao na slici 2.10. Bez obzira na brzinu nalijetanja, lagano će tijelo potisnuti teže u smjeru svoga gibanja. Kada bi se potiskivanje uzimalo kao kriterij, ispalo bi da je sada lakše tijelo djelovalo većom silom.

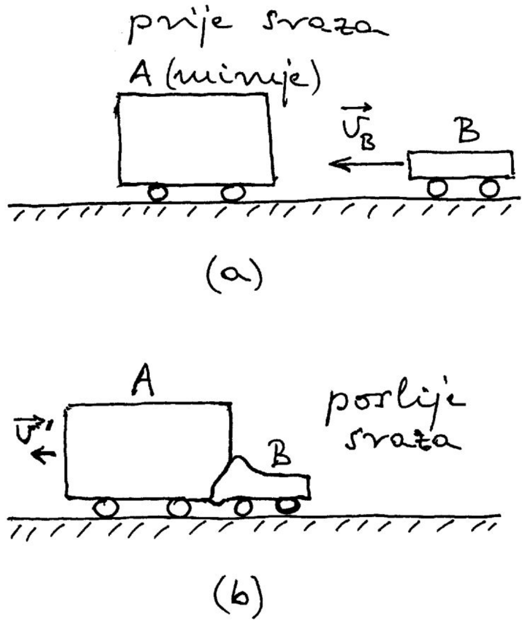
Umjesto razmatranja dvaju različitih sudara, možemo načiniti opažanje jednog jedinog sudara, ali tako da obavimo dvostruka mjerenja, jedno sa stajališta referentnog sustava s ishodištem O'



Slika 2.9: (a) Vozila različitih masa imaju jednake brzine u kretanju jedno prema drugome. (b) U srazu se vozila djelomično deformiraju i zajedno dobiju neku brzinu u smjeru koji je imalo vozilo veće mase. Ubrzo se zbog trenja zaustave.

prema kojemu se oba tijela prije sraza gibaju jednakim po iznosu brzinama ali u suprotnim smjerovima, te drugo sa stajališta referentnog sustava s ishodištem O'' prema kojemu prije sraza teško tijelo miruje, a samo se lagano tijelo giba. Gledajući iz ishodišta O' teško će tijelo potisnuti lagano, a gledajući iz O'' lagano će tijelo potisnuti teško. Budući da se radi o jednom te istom sudaru, ne možemo prihvatiti istodobno dvije oprečne tvrdnje o silama, tj. da teško tijelo djeluje većom silom na lagano, te da lagano tijelo djeluje većom silom na teško. Očito je da prizor potiskivanja ovisi o izboru referentnog koordinatnog sustava iz kojega se gleda, te ne predstavlja dokaz o većoj ili manjoj sili.

Moramo se opet podsjetiti da je sila u Newtonovoj fizici definirana kao uzrok promjene količine gibanja, a tu veličinu ne možemo izravno pratiti u slikama 2.9 i 2.10. Preostaje nam vjerovati da je tijekom sraza promjena količine gibanja teškog tijela jednaka po iznosu ali suprotnoga smjera od promjene količine gibanja laganoga tijela. O tome će još biti riječi kasnije u šestom poglavlju ove knjige.



Slika 2.10: (a) Vozilo veće mase miruje dok vozilo manje mase nalijeće na njega nekom brzinom. (b) U srazu nastaje deformacija vozila i zajednički pomak u smjeru koji je imalo vozilo manje mase.

Zaključak o međuodnosu Newtonovih zakona

Iako formulacije Newtonovih zakona izgledaju na prvi pogled vrlo jednostavne, vidjeli smo da cjelovita analiza pokazuje neočekivanu složenost. Svaki od tih zakona ima aksiomatski karakter jer ga se ne može dokazati, ali kada se kombinirano primijenjuju u nekoj eksperimentalnoj situaciji, dobiva se uvijek međusobna suglasnost i ispravno predviđanje događaja.

Prvi Newtonov zakon nam služi za utvrđivanje inercijalnog referentnog sustava, tj. nalaženja ishodišta O u odnosu prema kojemu ćemo određivati gibanje promatranih tijela. Tek tada smijemo primjenjivati drugi Newtonov zakon. Konzistentnost rezultata u primjeni drugoga Newtonova zakona postižemo ako unaprijed prihvatimo valjanost trećega Newtonova zakona. No isto tako, uvjerljivost trećega Newtonova zakona ne možemo postići bez prethodnog prihvaćanja valjanosti drugoga Newtonova zakona.

Središnji pojmovi u Newtonovim zakonima su

masa i sila. Masa je mjera za inerciju tijela i kao takva se pojavljuje u drugome Newtonovu zakonu. Međutim, masu tijela nije moguće kvantitativno odrediti primjenom tog zakona ukoliko nije poznata sila, a silu određuju drugi i treći zakon u zajedništvu. Za valjanu provedbu cijeloga postupka neophodno je prethodno utvrditi da sva mjerenja izvodimo u odnosu prema ishodištu nekog inercijalnog referentnog sustava, a za provjeru da se uistinu radi o inercijalnom sustavu služi nam prvi Newtonov zakon.

Kao što vidimo, Newtonovi su zakoni isprepleteni. Za pravilnu interpretaciju nekog gibanja, ili za određivanje relevantnih veličina, nužna su sva tri zakona. Ujedno možemo reći da je prihvaćanje valjanosti tih triju zakona dovoljno za opis i objašnjenje svih pojava u mehanici. Zato kažemo da se radi o Newtonovoj aksiomatskoj cjelini.

2.3 Dinamika jednog promatranog tijela u okolini

U realnome svijetu nalazi se mnoštvo tijela od kojih neka miruju, a neka se gibaju u odnosu na odabrani referentni koordinatni sustav. Istodobno praćenje svih tijela veoma je složeno, a najčešće nije niti potrebno jer pažnju usmjeravamo samo na gibanje jednog odabranog tijela. Tada se problem pojednostavljuje tako da sveukupni sustav tijela formalno podjelimo na *promatrano tijelo* i skup svih ostalih tijela koji nazivamo kratkim imenom *okolina*. Između promatranog tijela i okoline može postojati jedno ili više međudjelovanja, tj. uzajamnih sila. Budući da nas interesira samo gibanje promatranog tijela, uzimamo u obzir samo sile kojima okolina djeluje na to tijelo. Razumije se, za svaku od tih sila postoji i sila reakcije prema trećemu Newtonovu zakonu, tj. djelovanje promatranog tijela na okolinu, no te nas sile reakcije sada ne zanimaju jer ne promatramo gibanja tijela koja čine okolinu.

Razmotrit ćemo najprije slučaj slobodnog pada tijela koje je ispušteno s neke visine, a zatim slučajeve vertikalnog i kosog hica. Tijekom takvih gibanja, promatrano tijelo nije u dodiru s bilo kojim tijelom iz okoline, te na njega djeluje samo jedna sila iz okoline, a to je sila kojom Zemlja privlači promatrano tijelo. Kasnije ćemo obraditi neke jednostavnije primjere gibanja u kojima na promatrano tijelo djeluje više sila iz okoline.

2.3.1 Slobodan pad tijela

Slobodan pad raznih tijela spada u svakodnevna zbivanja i dobro je poznat čovjekovu iskustvu. Prema Aristotelovoj fizici, na tijelo u slobodnom padu ne djeluje nikakva sila jer tijelo pritom nije u dodiru s bilo kojim drugim tijelom, pa nema guranja ili vuče kao jedino priznatih oblika sile. Nasuprot tome, u Newtonovoj fizici je samo jednoliko gibanje po pravcu ono koje se odvija bez djelovanja sile. Svakome je iz iskustva poznato da tijelo koje slobodno pada povećava svoju brzinu tijekom pada, pa je nužno zaključiti da na njega djeluje neka sila, iako nije u dodiru s nekim drugim tijelom. Newton je smislio rješenje tako što je ustvrdio da na tijelo djeluje Zemlja nekom privlačnom silom koju je nazvao *gravitacijom*. Ta sila djeluje na daljinu, tj. čak i kada nema dodira između Zemlje i tijela. O njenoj prirodi bit će riječi u sljedećem poglavlju 3.

Na slici 2.11a prikazano je tijelo mase m koje je pušteno da slobodno pada s visine h iznad neke razine na površini Zemlje. Gravitacijska sila je označena kao $\vec{F}_g$ i usmjerena je prema Zemlji. Ishodište referentnog koordinatnog sustava možemo postaviti bilo gdje, no matematičku jednostavnost postižemo ako se ishodište O postavi na površinu Zemlje ispod mjesta gdje je tijelo bilo u trenutku ispuštanja. Os x postavimo duž površine Zemlje, a os y vertikalno uvis.

Budući da na tijelo djeluje konstantna sila $\vec{F}_g$, ono mora imati konstantnu akceleraciju određenu drugim Newtonovim zakonom

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m} \tag{2.12}$$

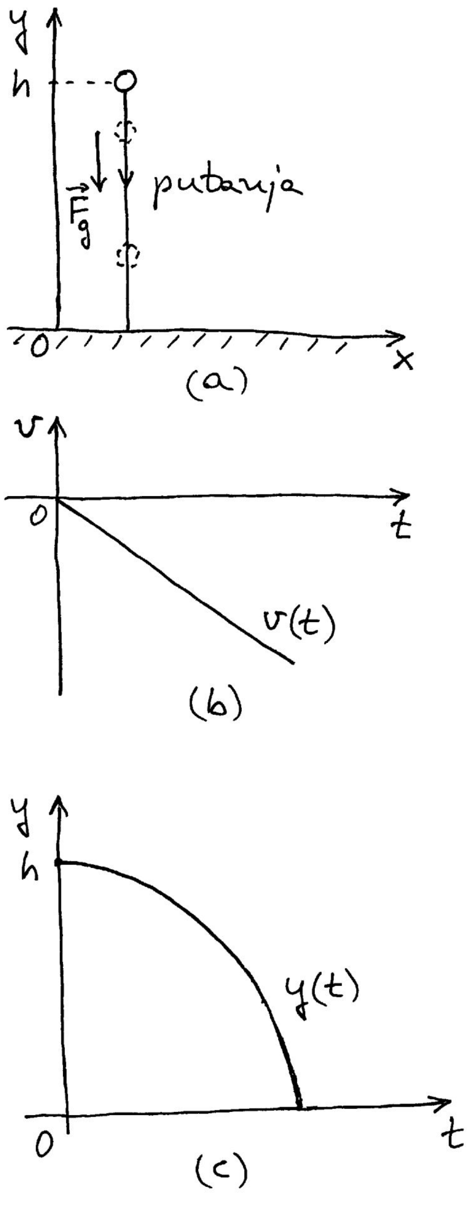
Zbog razloga koji će biti objašnjeni u sljedećem poglavlju 3, iznos gravitacijske sile $\vec{F}_g$ na neko tijelo uvijek je proporcionalan masi m tog tijela. Stoga je akceleracija $\vec{a}$ u jednadžbi (2.12) jednaka za sva tijela i označava se dogovorno simbolom $\vec{g}$.

Gibanje uz konstantnu akceleraciju je jednoliko ubrzano. U odjeljku 1.3 izveli smo izraz za brzinu (jednadžba (1.50)) i prevaljeni put (jednadžba (1.53)) kod takvog gibanja

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.13}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.14}$$

Na slici 2.11a tijelo se giba duž osi y, pa ćemo umjesto $s(t)$ pisati $y(t)$. U trenutku $t = 0$ tijelo se nalazilo na položaju $s_0 = y_0 = h$, a početna brzina mu je bila $v_0 = 0$. Akceleracija slobodnog pada



Slika 2.11: (a) Tijelo je ispušteno s visine h i slijedi vertikalnu putanju. (b) Brzina je nula u početnome trenutku ispuštanja tijela, a zatim tijelo pada (negativna brzina) sve brže. (c) Vremenska ovisnost visine tijela.

$\vec{g}$ ima na osi y negativan smjer, pa u jednadžbama (2.13) i (2.14) moramo stavljati negativnu algebarsku vrijednost $a = -g$. Tako dobivamo izraze

$$v(t) = -gt \tag{2.15}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{2.16}$$

Za $t > 0$ algebarski iznos brzine u jednadžbi (2.15) poprima negativne vrijednosti, što znači da je vektor brzine $\vec{v}$ usmjeren duž negativnog smjera osi y. Vremenska ovisnost brzine prikazana je na slici 2.11b.

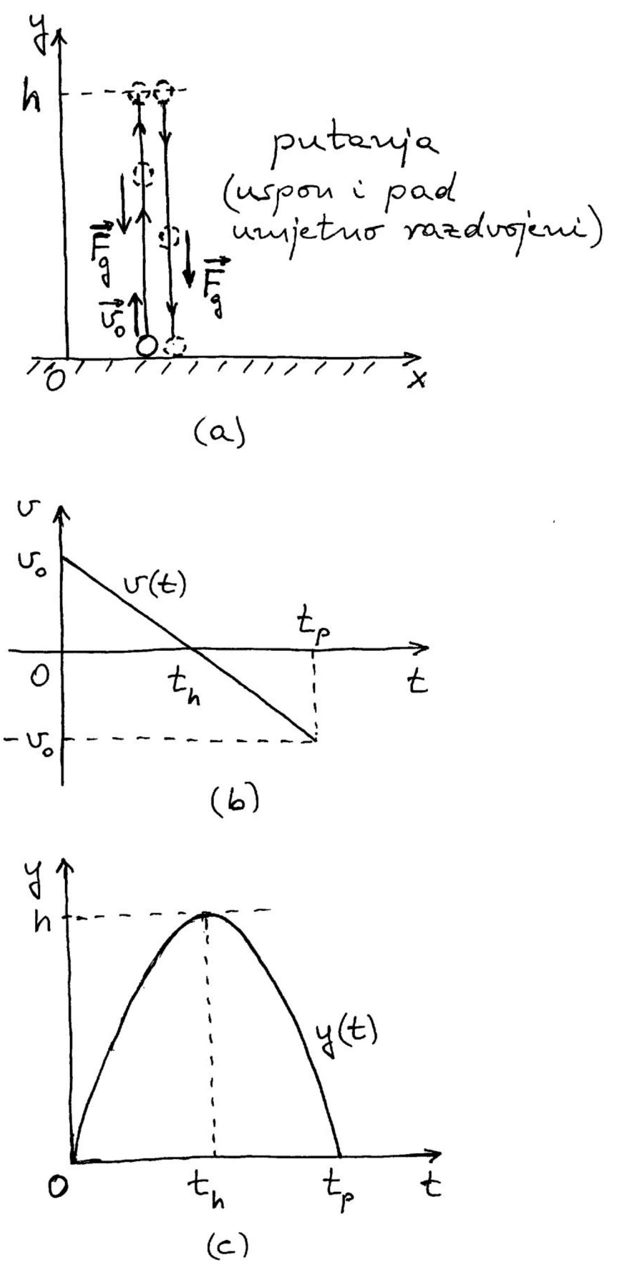
Algebarska veličina $y(t)$ u jednadžbi (2.16) predstavlja trenutni položaj tijela na osi y. Za $t = 0$ taj je iznos jednak h, a za $t > 0$ smanjuje se u skladu s negativnim predznakom u jednadžbi (2.16). Vremenska ovisnost položaja tijela prikazana je na slici 2.11c.

2.3.2 Vertikalan hitac

Malo složeniji slučaj od slobodnoga pada je vertikalan hitac prikazan na slici 2.12a. Tijelo je bačeno uvis početnom brzinom $\vec{v}_0$. Nakon što je izgubilo kontakt s bacateljem, tijelo je slobodno, tj. nije u dodiru s bilo kojim drugim tijelom. Ipak, brzina bačenoga tijela stalno se smanjuje dok se ono diže uvis, pa moramo zaključiti da na tijelo sasvim sigurno djeluje neka sila koja ga zaustavlja. Radi se o gravitacijskoj sili $\vec{F}_g$ koja je naznačena na slici 2.12a.

U prethodnome odjeljku 2.2 detaljno smo obrađivali razne slučajeve djelovanja sile na tijelo koje već ima neku brzinu. Tako je na slici 2.3b bio prikazan slučaj u kojemu sila ima smjer suprotan trenutnoj brzini tijela. Rezultat djelovanja sile je smanjivanje brzine tijela, tj. njegovo zaustavljanje. Upravo takav primjer se ostvaruje i kod tijela koje je bačeno uvis, ali samo dotle dok tijelo još uvijek ima neku brzinu prema gore. Kada se tijelo zaustavi i krene prema dolje, gravitacijska sila ima smjer kao i trenutna brzina, pa se brzina dalje povećava (primjer kao na slici 2.3a). Moramo uočiti da je gibanje tijela *nakon* zaustavljanja na nekoj visini identično onome koje bi tijelo izvodilo da je samo ispušteno na toj visini, tj. u tom je dijelu identično slobodnome padu kao na slici 2.11a.

Referentni koordinatni sustav na slici 2.12a postavljen je na isti način kao i u prethodnome slučaju



Slika 2.12: (a) Tijelo je bačeno uvis nekom početnom brzinom. (b) Brzina tijela se najprije smanjuje do nule (zaustavljanje u visini), a zatim postaje negativna (mijenja smjer prema dolje). (c) Vremenska ovisnost visine tijela.

(slika 2.11a). Budući da za cijelo vrijeme gibanja bačenoga tijela, na njega djeluje konstantna sila $\vec{F}_g$, primjenljive su jednadžbe (2.13) i (2.14), ali s početnim uvjetima $s_0 = y_0 = 0$, te nekim $v_0 \neq 0$

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{2.17}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \tag{2.18}$$

Ovdje smo također uvrstili negativnu algebarsku vrijednost za akceleraciju $a = -g$ jer je sila $\vec{F}_g$ u smjeru negativne osi y.

Korisno je malo analizirati gornje dvije jednadžbe. Iz jednadžbe (2.17) lako možemo odrediti trenutak kada se tijelo zaustavilo, tj. kada mu se brzina smanjila na nulu

$$0 = -gt_h + v_0 \quad \Longrightarrow \quad t_h = \frac{v_0}{g} \tag{2.19}$$

gdje nas odabrani indeks podsjeća da se u tome trenutku tijelo našlo na visini h. Tu visinu lako odredimo ako vrijeme t_h uvrstimo u jednadžbu (2.18)

$$h = -\frac{1}{2}gt_h^2 + v_0 t_h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \tag{2.20}$$

Možemo uočiti da maksimalna visina do koje se bačeno tijelo uzdigne ovisi samo o početnoj brzini koju je tijelo dobilo pri bacanju uvis, a ne ovisi o masi tijela. Ako, dakle, bacimo tijelo velike mase uvis jednakom brzinom kao i neko tijelo malene mase, ona će dosegnuti jednake visine, a za to će im biti potrebno isto vrijeme t_h. Sve to slijedi iz činjenice da je akceleracija kod slobodnog pada g jednaka za sva tijela, pa se masa ne pojavljuje u gornjim jednadžbama gibanja.

Iz jednadžbe (2.18) možemo također odrediti trenutak t_p kada tijelo padne ponovo na mjesto odakle je bilo bačeno, tj. kada je opet na visini $y = 0$

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \Longrightarrow \quad t(v_0 - \frac{1}{2}gt) = 0 \tag{2.21}$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu koja ima dva rješenja. Da bi umnožak bio jednak nuli mora jedan od dvaju faktora biti jednak nuli, pa su dva rješenja jednadžbe

$$t_0 = 0 \qquad , \qquad t_p = 2\frac{v_0}{g} \tag{2.22}$$

Formalnim matematičkim postupkom dobili smo da je tijelo bilo na visini $y = 0$ u trenutku t_0 kada je bačeno, te kasnije u trenutku t_p kada je palo na isto mjesto.

Usporedbom rezultata u jednadžbama (2.19) i (2.22) vidimo da je

$$t_p = 2t_h \tag{2.23}$$

Ovo je važan rezultat koji je korisno upamtiti. Gibanje bačenog tijela prema gore do visine h traje jednako dugo vremena kao i naknadno padanje tijela s te visine do početne točke. I ovdje možemo naglasiti da dobivena pravilnost ne ovisi o masi tijela.

Vremenska ovisnost brzine $v(t)$ prikazana je na slici 2.12b. U početnome trenutku $t = 0$ brzina je pozitivna algebarska veličina, što znači da je vektor brzine duž pozitivnog smjera osi y. Brzina se zatim po iznosu smanjuje i u trenutku t_h padne na nulu. To je trenutak kada se tijelo zaustavilo na visini h. Nakon toga, jednadžba (2.17) daje za brzinu negativnu vrijednost, što je u skladu s promijenjenim smjerom vektora brzine. U trenutku $t_p = 2t_h$ brzina dosegne vrijednost $v_p = -v_0$, tj. pri padu tijelo ima brzinu istoga iznosa, ali suprotnoga smjera, od početne brzine kojom je bilo bačeno uvis.

Vremenska ovisnost prevaljenog puta dana je jednadžbom (2.18) i prikazana je na slici 2.12c. Radi se o kvadratnoj jednadžbi koja u grafičkom prikazu daje parabolu.

Napomena: Opet se može ponoviti da parabola na slici 2.12c ne predstavlja putanju tijela.

2.3.3 Kosi hitac

Razmotrimo sada slučaj općenitog kosog hica kao na slici 2.13a. Tijelo je bačeno s visine h_0 početnom brzinom $\vec{v}_0$. Svakome je iz iskustva poznato kako otprilike izgleda putanja bačenog tijela (projektila), pa je ona tako i nacrtana na slici 2.13a. Njen točan matematički oblik tek ćemo ovdje istražiti.

Nakon što je bačeno, na tijelo djeluje samo gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema dolje. Ovo je slučaj u kojemu sila, koja djeluje na tijelo, čini neki kut prema trenutnoj brzini tijela, a obrađivali smo ga načelno u odjeljku 2.2 i posebno na slici 2.3d. Prema drugome Newtonovu zakonu, djelovanje sile u vremenskom intervalu dt mijenja količinu gibanja tijela za $d\vec{p} = \vec{F}_g dt$. Ova promjena količine gibanja nastaje u svakoj točki putanje tijela. Budući da je gravitacijska sila $\vec{F}_g$ uvijek usmjerena prema dolje, to i promjena količine gibanja $d\vec{p}$ ima uvijek smjer prema dolje. Drugim riječima, horizontalna komponenta brzine ostaje konstantna, a mijenja se samo vertikalna komponenta brzine.

U takvim okolnostima, matematički je prikladno obraditi kosi hitac formalnim rastavljanjem tog gibanja na dva gibanja, duž horizontalne i vertikalne osi. Takav smo postupak naučili u odjeljku 1.4. Postavimo referentni koordinatni sustav kao na slici 2.13a tako da horizontalna os bude x, a vertikalna y. Početnu brzinu $\vec{v}_0$ možemo rastaviti na komponente

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} \tag{2.24}$$

gdje su $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ i $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, a θ_0 je kut što ga vektor početne brzine $\vec{v}_0$ čini s pozitivnim smjerom osi x.

Kod formalnog rastavljanja gibanja, smatramo da je inače jedinstveno gibanje u kosom hicu ekvivalentno istodobnom gibanju tijela duž osi x i duž osi y. Kao što je gore već rečeno, sila $\vec{F}_g$ nema komponente duž osi x, pa se brzina duž te osi ne mijenja. Drugim riječima, gibanje tijela duž osi x odvija se kao jednoliko gibanje po pravcu za koje vrijede sljedeće jednadžbe za brzinu i prevaljeni put

$$v_x(t) = v_{0x} = konst. \tag{2.25}$$

$$x(t) = v_{0x}t \tag{2.26}$$

Duž osi y djeluje konstantna sila $\vec{F}_g$ u negativnom smjeru te osi, tako da tijelo ima stalnu akceleraciju $a_y = -g$. Gibanje duž osi y je stoga jednoliko ubrzano gibanje po pravcu za koje možemo odmah pisati

$$v_y(t) = -gt + v_{0y} \tag{2.27}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h_0 \tag{2.28}$$

Ove jednadžbe imaju isti oblik kao one za vertikalni hitac (jednadžbe (2.17) i (2.18)), s time da se u jednadžbi (2.28) pojavljuje još i početna visina h_0 s koje je tijelo bačeno.

Kao što smo naučili u odjeljku 1.4, vremenske ovisnosti kinematičkih veličina za gibanje u dvije dimenzije moramo prikazivati zasebno za svaku os. Tako u slici 2.13b prikazujemo grafički jednadžbe (2.25) i (2.26) za brzinu i put duž osi x. Brzina je konstantna dok prevaljeni put jednoliko raste, tj. tijelo se duž osi x pomiče konstantnom brzinom.

Za gibanje duž osi y prikazujemo grafički jednadžbe (2.27) i (2.28) na slici 2.13c. U trenutku $t = 0$ brzina duž osi y je pozitivna, tj. jednaka v_{0y}. S vremenom se brzina v_y linearno smanjuje, što znači da se tijelo sve sporije podiže uvis. U nekome trenutku brzina v_y padne na nulu. To je trenutak kada je tijelo doseglo svoju najvišu točku. Nakon toga, brzina v_y postaje negativna algebarska veličina, koja po iznosu linearno raste, što znači da se tijelo kreće sve brže duž negativnog smjera osi y. Vremenska ovisnost prevaljenog puta ima oblik parabole jer jednadžba (2.28) predstavlja kvadratičnu funkciju. Ona se razlikuje od parabole na slici 2.12c po tome što počinje na visini h_0, odakle je tijelo bačeno, a završava na nižoj točki $y = 0$, tj. na razini tla gdje tijelo konačno padne.

Krivulje koje prikazuju vremensku ovisnost puta na slikama 2.13b i 2.13c nisu putanje tijela u prostoru. Da bi se dobila putanja tijela, moraju se te dvije krivulje razmatrati povezano, kao što smo to naučili u odjeljku 1.4. U bilo kojem trenutku t možemo na slici 2.13b odrediti pripadajući položaj tijela duž osi x, dok na slici 2.13c određujemo položaj tijela duž osi y u tome istome trenutku. Tako dobijemo parove vrijednosti $(x(t), y(t))$ koji predstavljaju prostorne koordinate tijela u danome trenutku, što odgovara slici 2.13a.

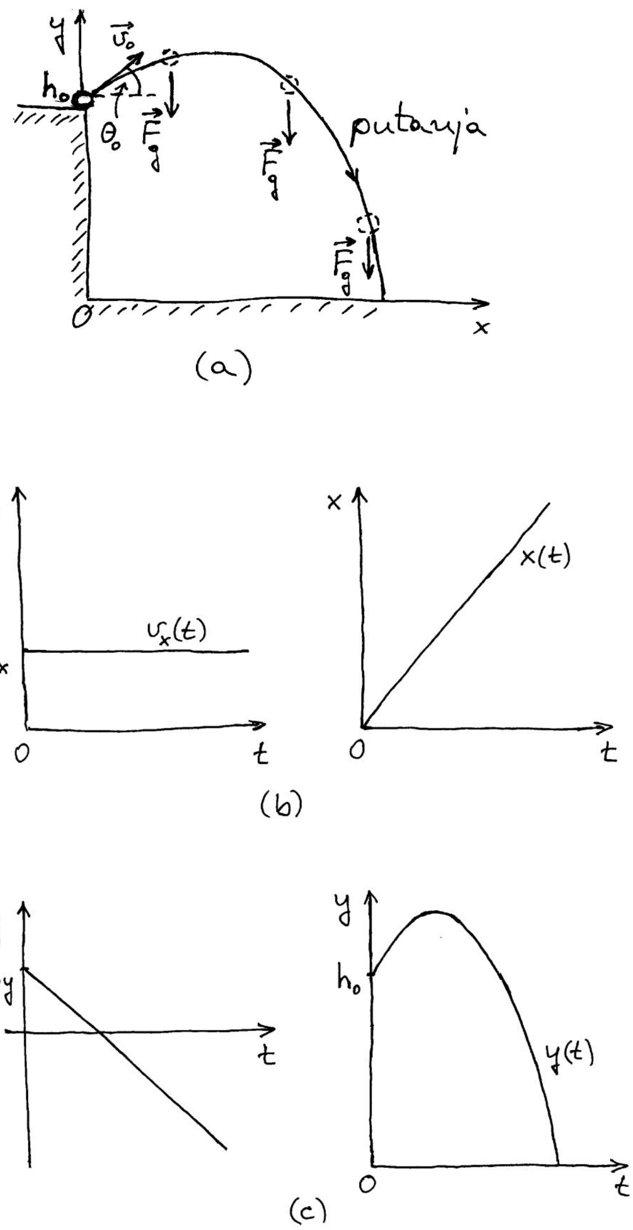
Do istog rezultata možemo doći i matematičkim postupkom ako spojimo jednadžbe (2.26) i (2.28) tako da eliminiramo vrijeme t kao zajedničku varijablu. Najprije iz jednadžbe (2.26) izrazimo vrijeme $t = x(t)/v_{0x}$, te uvrstimo u jednadžbu (2.28) i dobivamo

$$y(t) = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\left[x(t)\right]^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x(t) + h_0 \qquad (2.29)$$

U svakom trenutku t imamo odgovarajuće vrijednosti $x(t)$ i $y(t)$ koje su međusobno povezane jednadžbom (2.29). Eksplicitnu ovisnost o vremenu možemo ispustiti, pa imamo jednostavniji zapis

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + h_0 \qquad (2.30)$$

Ova kvadratna jednadžba predstavlja parabolu u ravnini Oxy prikazanoj na slici 2.13a. To je matematički oblik putanje bačenog tijela. Uočimo još jednom da putanja bačenog tijela ne ovisi o njegovoj masi. Jednadžba (2.30) pokazuje da putanja tijela ovisi jedino o visini h_0 s koje je tijelo bačeno i o početnoj brzini izraženoj komponentama v_{0x} i v_{0y}.



Slika 2.13: (a) Tijelo je bačeno s uzvisine h_0 početnom brzinom $\vec{v}_0$ koja čini kut θ_0 s horizontalnom osi. (b) i (c) Vremenske ovisnosti brzine i pomaka tijela duž osi x, odnosno y.

Kao poseban slučaj, može se razmatrati kosi hitac s razine tla, tj. za $h_0 = 0$, prikazan na slici 2.14a. Zanimljivo je analizirati domet kod kosog hica, tj. udaljenost na kojoj tijelo padne na tlo. Ako u jednadžbi (2.30) postavimo uvjet da se tijelo nalazi na razini tla, dobivamo

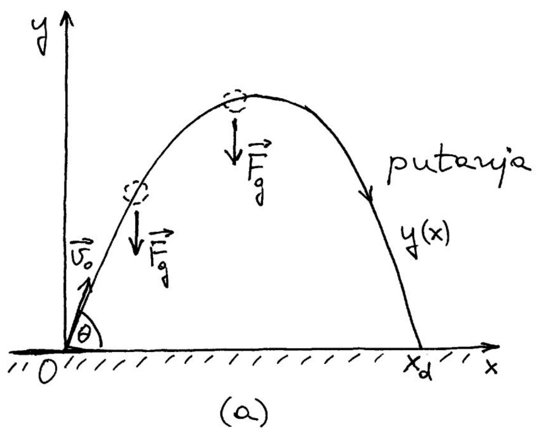
$$0 = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x \quad \Longrightarrow \quad x(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2}x) = 0 \tag{2.31}$$

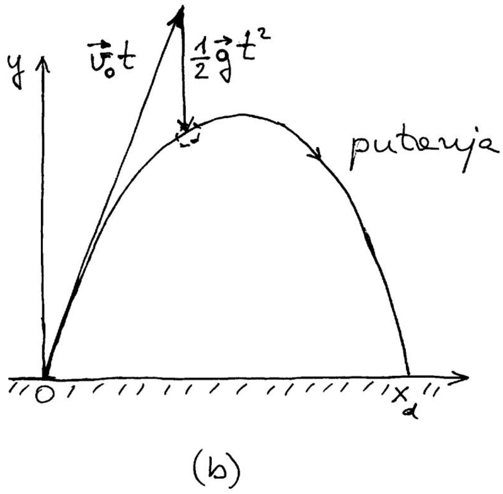
Iz ove jednadžbe slijede dva rješenja

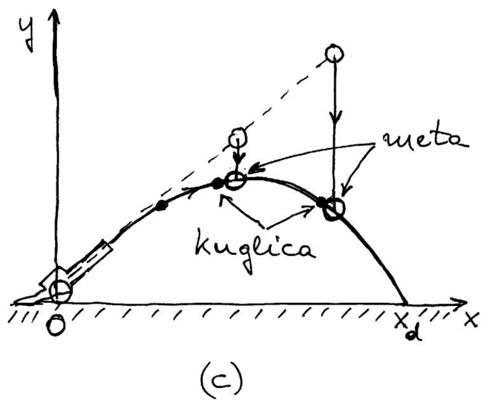
$$x_0 = 0 \quad , \quad x_d = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \tag{2.32}$$

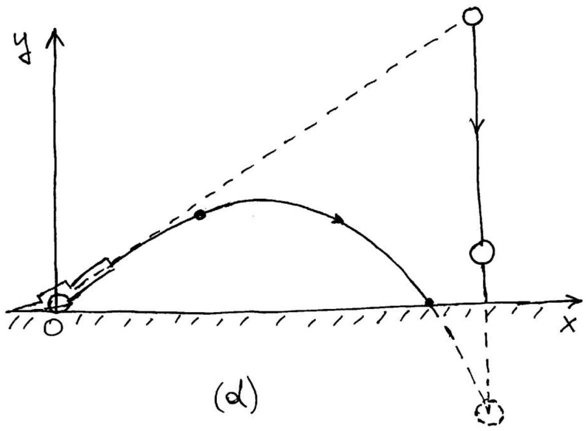
Prvo rješenje predstavlja početni položaj tijela pri bacanju, dok drugo rješenje daje domet kosoga hica. Maksimalan domet se postiže kada je $\sin 2\theta = 1$, odnosno $\theta = 45^o$.

Putanja tijela prikazana na slici 2.14a je simetrična, pa možemo odmah zaključiti da je njen maksimum (tjeme parabole) postignut za $x = x_d/2$. Uvrštavanjem te vrijednosti u jednadžbu (2.30) uz $h_0 = 0$, lako nalazimo maksimalnu visinu tijela u kosome hicu. Ostavljamo čitatelju da provjeri kako se isti rezultat može dobiti i na način da se jednadžbe (2.27) i (2.28) rješavaju kao da se radi o vertikalnom hicu.









Slika 2.14: (a) Putanja u kosom hicu s razine tla. Domet hica je x_d. (b) Razlaganje gibanja prema vektorskoj jednadžbi (2.34). (c) Ispuštanje tijela (mete) iz raznih položaja na pravcu početne brzine kuglice (projektila). (d) Slučaj kada kuglica ne pogađa metu. Tek u virtualnom produženju gibanja kuglica bi ipak pogodila metu.

Također prepuštamo čitatelju da se uvjeri kako jednadžbe za kosi hitac prelaze u jednadžbe za vertikalan hitac u graničnom slučaju kada $\theta \to \pi/2$.

Vektorske jednadžbe za kosi hitac

Imajući u vidu rastavljanje vektora brzine na komponente $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ i algebarske izraze za komponente prema jednadžbama (2.25) i (2.27), dolazimo do vektorske jednadžbe za brzinu kod kosoga hica

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \tag{2.33}$$

Vektor položaja tijela $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dobivamo pomoću algebarskih izraza u jednadžbama (2.26) i (2.28)

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{2.34}$$

gdje je $\vec{r}_0 = h_0\vec{j}$. U ovim jednadžbama je vektor akceleracije slobodnog pada $\vec{g} = -g\vec{j}$, tj. vektor koji ima iznos g a smjer duž negativne osi y.

Vektorski oblik putanje tijela u jednadžbi (2.34) dobili smo zbrajanjem istodobnog gibanja tijela duž osi x i duž osi y. No, kada jednom imamo izraz za putanju tijela, možemo ga rastaviti na neka druga istodobna gibanja. Iz oblika jednadžbe (2.34) nameće se ideja da se putanja tijela shvati kao zbroj dvaju istodobnih gibanja, slobodnog pada i jednolikog gibanja po pravcu brzinom $\vec{v}_0$. Na slici 2.14b prikazano je upravo takvo razlaganje uz $\vec{r}_0 = 0$. Od početnog trenutka $t = 0$ do nekog trenutka t tijelo se pomakne za vektor $(1/2)\vec{g}t^2$, te istodobno za vektor $\vec{v}_0 t$. Zbrajanjem tih vektora pomaka dobijemo ukupni vektor pomaka, tj. stvarni položaj tijela u trenutku t.

Navedeno razumijevanje kosog hica možemo iskoristiti za predviđanje ishoda jednog zanimljivog pokusa. Na slici 2.14c prikazan je top s oprugom koji može baciti gumenu lopticu početnom brzinom $\vec{v}_0$. Dalje od topa na nekoj visini obješena je meta. Naciljamo top točno u smjeru mete i u trenutku $t = 0$ ispalimo gumenu kuglicu a nekim mehanizmom osiguramo da se istodobno otpusti meta. Gumena loptica će pogoditi metu u padanju. Naime, gibanje gumene loptice do točke pogotka može se shvatiti kao zbroj dvaju istodobnih gibanja. Jedno od njih je jednoliko gibanje po pravcu brzinom $\vec{v}_0$. Kada bi to bilo jedino gibanje loptice, ona bi u nekom trenutku t došla do obješene mete. Međutim, loptica istodobno izvodi slobodan pad, te se u trenutku t nađe na nižoj visini. Loptica i meta počnu slobodno padati u istome trenutku $t = 0$, pa do trenutka t prevale jednake vertikalne putove. Stoga će loptica uvijek pogoditi metu u padanju.

Postoji ograničenje za ovaj pokus. Meta ne smije biti obješena na horizontalnoj udaljenosti od topa većoj nego što je domet projektila za danu početnu brzinu $\vec{v}_0$. Na slici 2.14d prikazan je slučaj u kojemu je top naciljan na metu, ali loptica padne na tlo dok je meta još u zraku. Meta padne na tlo tek u kasnijem trenutku i to dalje od dometa loptice. Crtkanim linijama je prikazano kako bi se nastavilo gibanje loptice i mete kada ne bi bilo tla koje ih zaustavi. Pogodak loptice u metu bi se tada ostvario, ali u još kasnijem trenutku i u točki ispod razine tla.

2.3.4 Dijagram sila na slobodno tijelo

U prethodnim primjerima slobodnog pada ili hica postojala je samo jedna sila (gravitacijska sila $\vec{F}_g$) koja je djelovala na tijelo za vrijeme njegova gibanja. U mnogim se drugim primjerima promatrano tijelo nalazi u dodiru s drugim tijelima u okolini, pa na njega djeluje više sila. Potrebno je u takvim slučajevima jasno identificirati sve te sile da bi se mogao riješiti problem gibanja promatranoga tijela. U tu svrhu služimo se postupkom koji nas vodi na dijagram sila na slobodno tijelo.

Postupak se sastoji u tome da jednostavnim crtežom prikažemo realnu situaciju te identificiramo, jedno po jedno, sva tijela koja su u dodiru s promatranim tijelom. Za svako od tih okolnih tijela utvrdimo kojom silom ono djeluje na promatrano tijelo. Također, uzmemo u obzir i silu kojom Zemlja djeluje na promatrano tijelo, tj. gravitacijsku silu $\vec{F}_g$, iako Zemlja ne mora biti u dodiru s promatranim tijelom. Zatim na drugom crtežu prikažemo promatrano tijelo u čestičnome modelu, te ucrtamo vektore svih sila koje djeluju na promatrano tijelo. Ucrtavanje tih sila zamjenjuje nam sva djelovanja okolnih tijela na promatrano tijelo, pa možemo smatrati kao da nam je promatrano tijelo sada slobodno od kontakata s okolnim tijelima. Dobiveni crtež naziva se *dijagram sila na slobodno tijelo.*

Kod crtanja dijagrama sila na slobodno tijelo, moramo za svaku silu provjeriti ima li ona svoju silu reakcije prema trećemu Newtonovu zakonu. Naime, niti jedna sila na promatrano tijelo ne može dolaziti ni od čega. Sila uvijek dolazi od nekoga drugog tijela iz okoline, pa mora postojati i sila reakcije kojom promatrano tijelo djeluje na to drugo tijelo u okolini. Ako ucrtamo neku silu na promatrano tijelo, a ne možemo zatim pouzdano ukazati na tijelo u okolini na koje bi djelovala odgovarajuća sila reakcije, moramo preispitati postojanje ucrtane sile akcije na promatrano tijelo.

Kao primjere dijagrama sila na slobodno tijelo navest ćemo najjednostavnije slučajeve vuče tijela na horizontalnoj podlozi i klizanja tijela na kosini.

Dinamika tijela na horizontalnoj podlozi

Na slici 2.15a skicirana je horizontalna podloga na kojoj se nalazi neko tijelo i čovjek koji vuče to tijelo pomoću konopca. Očito je da u ovome slučaju samo horizontalna podloga i konopac ostvaruju dodir s promatranim tijelom. Ako zanemarimo masu konopca možemo smatrati da on služi samo za prijenos sile od čovjeka na tijelo.

Radi preglednosti u prikazu sila, zgodno je napraviti crtež kao na slici 2.15b u kojemu izgleda kao da su tijela međusobno razdvojena. Za svaku silu na promatrano tijelo, postoji i sila reakcije kojom to tijelo djeluje na odgovarajuće tijelo u okolini. Radi lakšeg uočavanja, svaki je par sila akcije i reakcije naznačen jednom crtkanom poveznicom.

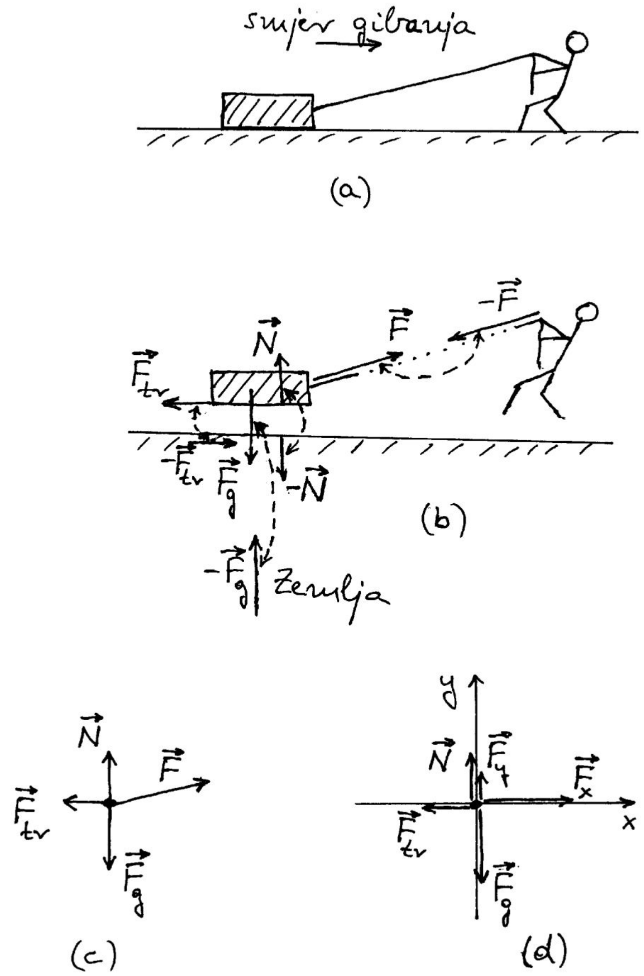
Horizontalna podloga djeluje na promatrano tijelo dvjema silama koje imaju različite uzroke i narav. Normalna (okomita na ravninu podloge) sila $\vec{N}$ ima svoj uzrok u čvrstoći podloge koja ne dopušta tijelu da pada dolje. Na slici 2.15b nacrtana je i sila $-\vec{N}$ kojom promatrano tijelo djeluje na podlogu okomito prema dolje. O prirodi tih sila bit će riječi podrobnije u sljedećem poglavlju 3.

Sila trenja $\vec{F}_{tr}$ se javlja uslijed hrapavosti dodirnih ploha, ali i uslijed međuatomskih (međumolekularnih) interakcija na dodirnim plohama. O njenoj prirodi će također biti detaljnije riječi u sljedećem poglavlju 3, a za sada navedimo samo to da sila trenja uvijek djeluje u smjeru suprotnom od smjera gibanja tijela, te stoga nastoji usporiti njegovo gibanje. Prema trećemu Newtonovu zakonu, promatrano tijelo koje klizi po podlozi djeluje na tu istu podlogu silom $-\vec{F}_{tr}$ koja je također prikazana na slici 2.15b.

Čovjek djeluje na promatrano tijelo preko konopca silom $\vec{F}$. Na slici 2.15b prikazana je i sila reakcije $-\vec{F}$ kojom promatrano tijelo djeluje preko konopca na čovjeka.

Konačno, Zemlja djeluje na promatrano tijelo silom $\vec{F}_g$, a ono djeluje na Zemlju silom reakcije $-\vec{F}_g$.

Napomena: Važno je uočiti da sila $\vec{F}_g$, kojom Zemlja vuče tijelo prema dolje, i sila $\vec{N}$, kojom podloga gura tijelo prema gore, *nisu* par sila iz trećega Newtonova zakona, iako imaju suprotan smjer. Obje te sile djeluju na isto promatrano tijelo, dok sile akcije i reakcije uvijek djeluju na različita tijela.



Slika 2.15: (a) Čovjek vuče tijelo na podlozi. (b) Formalno razdvojena tijela s prikazom sila na svako tijelo. Svaki par sila akcije i reakcije iz trećega Newtonova zakona povezan je crtkanom linijom radi lakšeg uočavanja. (c) Dijagram sila na promatrano tijelo prikazano u čestičnom modelu. (d) Sile duž osi y su uravnotežene dok sile duž osi x daju rezultantu koja uvjetuje gibanje tijela.

Možemo sada bez pogreške sastaviti dijagram sila na promatrano tijelo. Iz slike 2.15b moramo odabrati samo one sile koje djeluju na promatrano tijelo i ucrtati ih na slici 2.15c. Crtež je posebno jednostavan kada se promatrano tijelo prikaže u čestičnome modelu. Vektorski zbroj svih sila koje djeluju na promatrano tijelo daje ukupnu silu $\vec{F}_{uk}$ koja određuje gibanje tijela prema drugome Newtonovu zakonu.

Za analizu ovog problema, zgodno je uvesti koordinatni sustav kojemu je os x duž horizontalne podloge, a os y okomita na podlogu kao što je prikazano na slici 2.15d. Ujedno je sila $\vec{F}$ kojom čovjek vuče promatrano tijelo zamijenjena dvjema komponentama prema pravilu $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Budući da promatrano tijelo ne izvodi gibanje duž osi y, znači da je vektorski zbroj sila duž te osi jednak nuli

$$\vec{F}_y + \vec{N} + \vec{F}_g = 0 \tag{2.35}$$

Zbroj sila duž osi x daje ukupnu silu

$$\vec{F}_{uk} = \vec{F}_x + \vec{F}_{tr} \tag{2.36}$$

Čovjek može promijeniti silu $\vec{F}$ kojom vuče tijelo, pa mogu nastupiti različiti slučajevi. Ako čovjek želi ubrzavati gibanje tijela, mora upotrijebiti veću silu toliko da iznos sile $\vec{F}_x$ postane veći od iznosa sile $\vec{F}_{tr}$, pa tada rezultantna sila $\vec{F}_{uk}$ ubrzava tijelo. Ako čovjek samo vuče tijelo konstantnom brzinom, znači da rezultantna sila iščezava $\vec{F}_{uk} = 0$, odnosno da je iznos sile $\vec{F}_x$ u tome slučaju jednak iznosu sile $\vec{F}_{tr}$. I konačno, ako čovjek smanji silu kojom vuče tijelo tako da iznos sile $\vec{F}_x$ postane manji od iznosa sile $\vec{F}_{tr}$, rezultantna sila $\vec{F}_{uk}$ poprima smjer suprotan trenutnom gibanju tijela, te stoga zaustavlja njegovo gibanje.

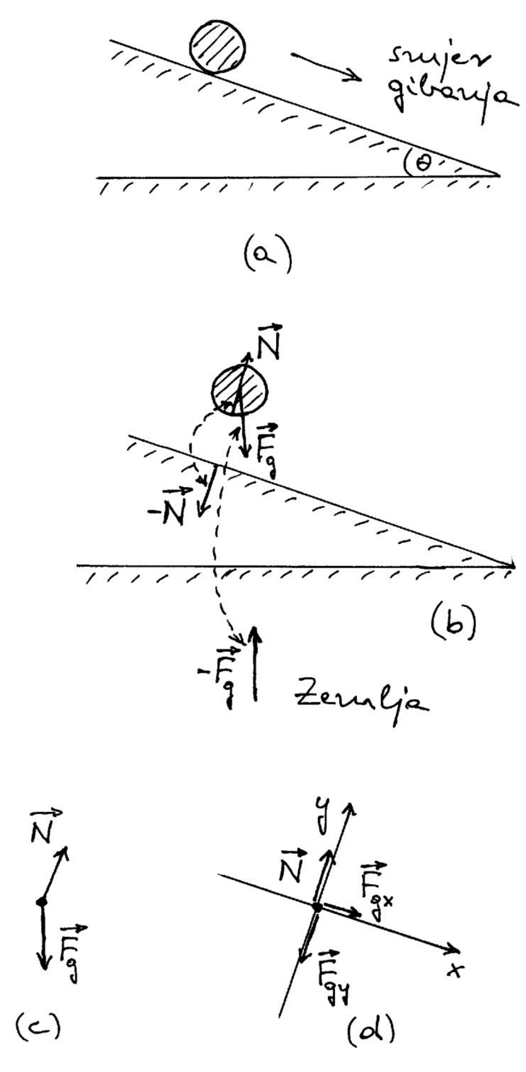
Napomena: Ako se mijenja sila $\vec{F}$ kojom čovjek vuče tijelo, mijenja se ne samo komponenta $\vec{F}_x$ kako je gore opisano, nego i komponenta $\vec{F}_y$. Međutim, jednadžba (2.35) je pritom uvijek zadovoljena. To se ostvaruje prilagodbom normalne sile $\vec{N}$. Priroda normalne sile i način njene prilagodbe bit će potanko objašnjeni u poglavlju 3.

Dinamika u Galileijevim pokusima na kosini

Kao drugi primjer za konstrukciju dijagrama sila na slobodno tijelo odaberimo gibanje tijela na kosini kao u glasovitim Galileijevim pokusima o kojima smo opširno govorili u odjeljku 2.1. Situacija je prikazana na slici 2.16a. Galilei je upotrebljavao kuglice koje se kotrljaju niz kosinu uz zanemarivo trenje kotrljanja. U tim uvjetima uzimamo da je normalna sila $\vec{N}$ jedina dodirna sila koja djeluje na tijelo.

Napomena: Sila $\vec{N}$ je uvijek okomita na podlogu na kojoj se nalazi tijelo. To je pravilo neovisno o kutu koji podloga čini s horizontalnom ravninom.

Postupamo isto kao i u prethodnome primjeru, te na slici 2.16b prikazujemo promatrano tijelo kao da je razdvojeno od kosine. Pored sile $\vec{N}$, ucrtavamo i silu reakcije $-\vec{N}$ kojom tijelo djeluje na kosinu. Također ucrtavamo silu $\vec{F}_g$ kojom Zemlja privlači promatrano tijelo, te silu reakcije $-\vec{F}_g$ kojom tijelo



Slika 2.16: (a) Gibanje kuglice niz kosinu. (b) Formalno rastavljena kuglica od kosine s prikazom sila na pojedina tijela. Parovi sila akcije i reakcije označeni su crtkanom poveznicom. Zanemareno je trenje kotrljanja. (c) Dijagram sila na kuglicu. d) Sile okomite na kosinu su uravnotežene, dok sila niz kosinu uvjetuje gibanje kuglice.

djeluje na Zemlju.

Na slici 2.16c prikazan je dijagram sila na slobodno tijelo u čestičnome modelu. Opet moramo biti sigurni da smo ucrtali *samo* sile koje djeluju na promatrano tijelo, no isto tako da smo ucrtali *sve* sile koje na njega djeluju. Ukupna sila jednaka je vektorskom zbroju sila koje djeluju na promatrano tijelo.

Analiza problema može se pojednostaviti ako se koordinatni sustav postavi sukladno simetriji tijela na kosini. Tako je na slici 2.16d prikazan koordinatni sustav kojemu je os x postavljena duž kosine, a os y duž vektora $\vec{N}$. Sile, koje nisu usmjerene duž osi odabranog koordinatnog sustava, rastavljamo na komponente. Tako gravitacijsku silu formalno zamjenjujemo dvjema komponentama duž odabranih smjerova $\vec{F}_g = \vec{F}_{gx} + \vec{F}_{gy}$.

Budući da nema gibanja tijela duž osi y, mora vrijediti uvjet ravnoteže

$$\vec{N} + \vec{F}_{gy} = 0 \tag{2.37}$$

Komponenta $\vec{F}_{gx}$ nije uravnotežena. Ona predstavlja, dakle, rezultantnu silu koja uzrokuje ubrzavanje tijela u gibanju niz kosinu. Kao što vidimo, ta je sila stalna, pa nastaje jednoliko ubrzano gibanje tijela. Za ispravan izračun akceleracije bilo bi potrebno uzeti u obzir efekt rotacije kuglice kao krutog tijela, što ostavljamo za razmatranje u kasnijem poglavlju.

Ako je kut θ što ga kosina čini s horizontalnom ravninom malen, bit će malena i sila $\vec{F}_{gx}$ jer je $F_{gx} = F_g \sin\theta$, pa time i akceleracija tijela koje se giba niz kosinu postaje malena. Uistinu, Galilei je imao pravo kada je smatrao da gibanje tijela niz kosinu ima obilježje slobodnoga pada, no odvija se sporije zbog malenog kuta nagiba kosine. Upravo ta sporost omogućila je Galileiju da obavi dovoljno točna mjerenja i utvrdi zakonitost jednoliko ubrzanog gibanja po pravcu.

2.4 Dinamika sustava tijela

Već smo u uvodu prethodnoga odjeljka 2.3 istaknuli da u fizici ne možemo pratiti sva zbivanja u svijetu, nego usredotočujemo pažnju na jedan dio svijeta, a ostatak nazivamo okolinom. U prethodnom je odjeljku promatrano samo jedno tijelo, a sva okolna tijela su činila okolinu. Ponekad je zanimljivo izdvojiti iz sveukupnoga svijeta jedan sustav od dva ili više tijela i usmjeriti pažnju na njega kao na promatrani sustav tijela. Sva okolna tijela čine tada okolinu promatranoga sustava. Time ćemo se pozabaviti u ovome odjeljku na nekoliko primjera.

2.4.1 Unutarnje i vanjske sile

Kada želimo analizirati dinamiku promatranoga sustava tijela u nekoj okolini, moramo razlikovati unutarnje i vanjske sile. Podjela je sasvim logična. Sva međudjelovanja tijela unutar promatranoga sustava predstavljaju *unutarnje sile*. Sve se unutarnje sile javljaju u parovima akcije i reakcije u skladu s trećim Newtonovim zakonom. Djelovanje tijela iz okoline na bilo koje tijelo u promatranome sustavu naziva se *vanjskom silom*. Razumije se, svaka vanjska sila ima i svoju silu reakcije kojom tijelo iz promatranoga sustava djeluje na odgovarajuće tijelo u okolini, no kod proučavanja dinamike promatranog sustava tijela, te nam sile reakcije nisu važne.

Na nekim primjerima najbolje se može objasniti učinak vanjskih i unutarnjih sila kod sustava tijela.

Dinamika niza povezanih tijela

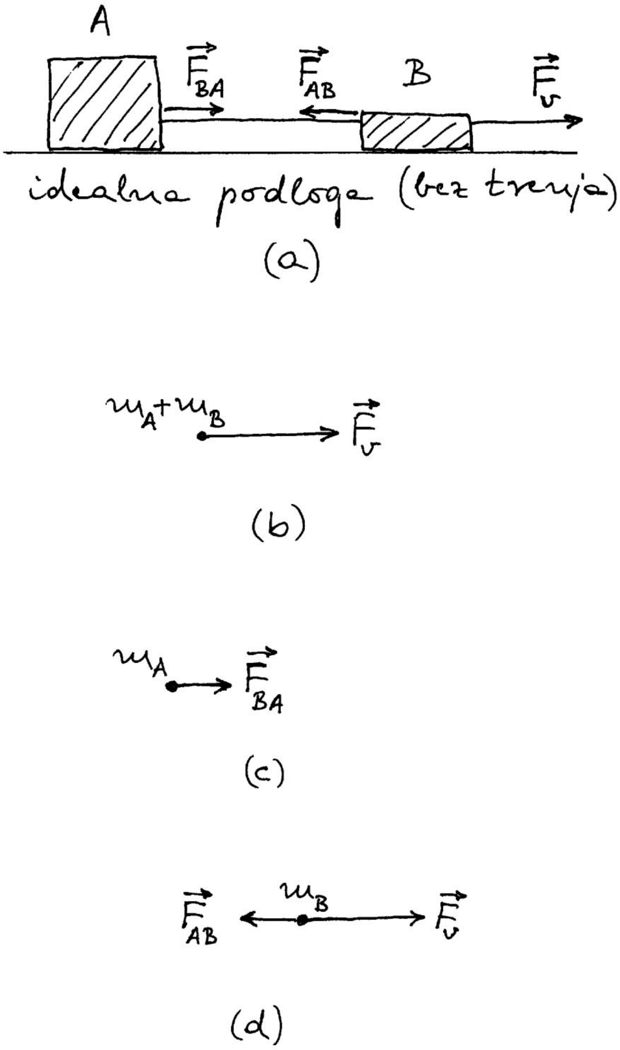
Razmotrimo dva tijela A i B koja su međusobno povezana konopcem kao što prikazuje slika 2.17a. Zamislimo da se oba tijela nalaze na horizontalnoj podlozi bez trenja, a na tijelo B djeluje iz okoline sila $\vec{F}_v$ (vanjska sila) koja ga vuče. Unutarnje sile sustava su $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ koje su također prikazane na slici 2.17a.

Na svako tijelo djeluje gravitacijska sila prema dolje, no ona je uravnotežena normalnom silom podloge prema gore. Stoga te sile ne trebamo u ovome slučaju posebno razmatrati. Nadalje, smatramo da je konopac koji povezuje tijela A i B čvrst, pa se oba tijela nužno gibaju zajedno. Akceleraciju promatranoga sustava možemo izračunati prema drugome Newtonovu zakonu

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_v}{m_A + m_B} \tag{2.38}$$

Ovdje smo promatrani sustav tijela obuhvatili kao da se radi o jednome tijelu ukupne mase $m_A + m_B$. Tako dobivamo dijagram sila na slobodno tijelo $A+B$ koji je prikazan na slici 2.17b.

Postavlja se pitanje kakvu ulogu igraju unutarnje sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ u ovome slučaju. One djeluju na



Slika 2.17: (a) Tijela A i B povezana su konopcem zanemarive mase. Vanjska sila $\vec{F}_v$ djeluje izravno na tijelo B. (b) Dijagram sila na sustav tijela A i B prikazan jedinstveno u čestičnom modelu. (c) Dijagram sila na tijelo A. (d) Dijagram sila na tijelo B.

različita tijela pa se ne smiju zbrajati kod primjene na dinamiku jednoga određenog tijela. Međutim, ako bismo smatrali da obje sile djeluju na sustav tijela u cjelini, možemo ih formalno zbrojiti i ustanoviti da je $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$ sukladno trećemu Newtonovu zakonu. Drugim riječima, unutarnje sile sustava tijela ne mogu djelovati na sustav u cjelini kao što inače nije moguće da neko tijelo djeluje silom na samo sebe.

Međutim, svaka unutarnja sila u sustavu tijela djeluje zasebno na dinamiku pojedinog tijela u sustavu. Razjasnimo ovo pitanje pomoću slike 2.17c koja prikazuje dijagram sila na slobodno tijelo A. Radi se samo o sili $\vec{F}_{BA}$ jer je tijelo A u dodiru jedino s konopcem koji vodi prema tijelu B. Ta mu sila daje akceleraciju u skladu s drugim Newtonovim zakonom

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_A} \tag{2.39}$$

Možemo sada obratiti pažnju na dinamiku tijela B u sustavu. Slika 2.17d prikazuje dijagram sila na slobodno tijelo B. Na to tijelo djeluje vanjska sila $\vec{F}_v$, ali i unutarnja sila sustava $\vec{F}_{AB}$ tako da je njegova akceleracija

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_v + \vec{F}_{AB}}{m_B} \tag{2.40}$$

Iz jednadžbe (2.39) lako izrazimo silu $\vec{F}_{BA} = m_A\vec{a}$, što uz uvažavanje trećega Newtonova zakona $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$, možemo uvrstiti u jednadžbu (2.40). To nam daje

$$m_B\vec{a} = \vec{F}_v - m_A\vec{a} \tag{2.41}$$

Odmah uviđamo da ova jednadžba vodi na već utvrđenu jednadžbu (2.38). Drugim riječima, bilo da razmatramo sustav u cjelini kao na slici 2.17b ili pak da računamo dinamiku pojedinih tijela u sustavu kao na slikama 2.17c i d, rezultat je očekivano isti. Važno je pritom pravilno identificirati koje sile djeluju na pojedina tijela u sustavu, te vanjsku silu koja djeluje na sustav u cjelini.

Navedeni primjer s dva tijela možemo proširiti na niz od više tijela uzastopce povezanih konopcem. Na cijeli sustav tijela može djelovati vanjska sila i uzrokovati gibanje sustava nekom akceleracijom. Unutarnje sile među susjednim tijelima nemaju utjecaja na akceleraciju sustava u cjelini. Međutim, ako usmjerimo pažnju na pojedino tijelo, moramo uzeti u obzir upravo sile kojima susjedna tijela djeluju na promatrano tijelo i odrediti njegovu akceleraciju. Primjenom trećega Newtonova zakona dobivamo konzistentne rezultate u oba pristupa.

Atwoodov padostroj

Atwoodov padostroj je još jedan eksperimentalni uređaj kojim se može ostvariti jednoliko ubrzano gi-

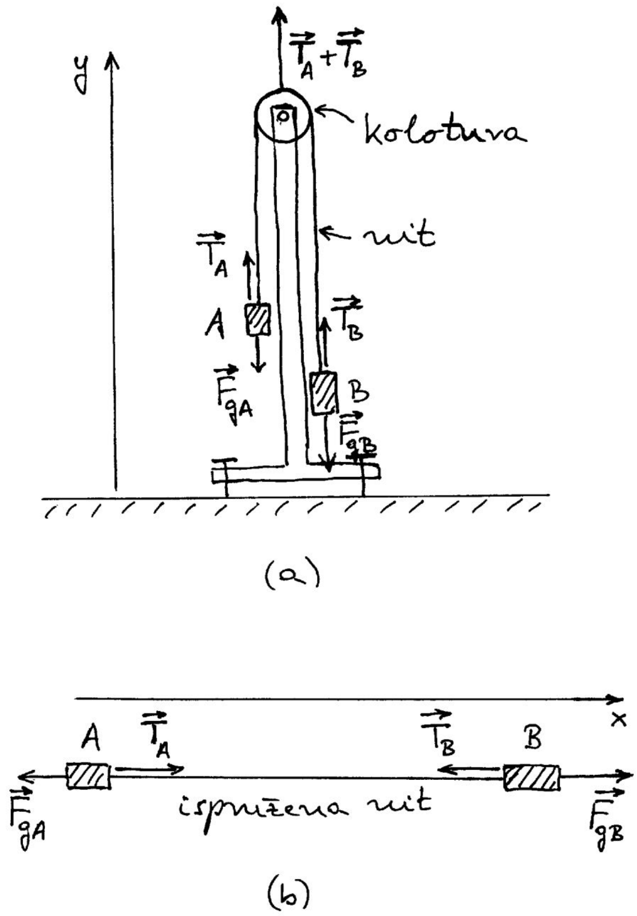
banje s vrlo malenom akceleracijom, što je pogodno za izvođenje dovoljno točnih mjerenja na temelju kojih se mogu utvrditi zakonitosti tog gibanja.

Slika 2.18a prikazuje princip Atwoodova padostroja. Preko koloture ovješena je nit s utezima A i B na krajevima niti. Pokušajmo identificirati vanjske i unutarnje sile na taj sustav tijela. Na utege (tijela) djeluju gravitacijske sile $\vec{F}_{gA}$ i $\vec{F}_{gB}$ prema dolje. To su dvije vanjske sile na ovaj sustav tijela. No, pitanje je jesu li to jedine vanjske sile. Problem je malo složeniji, te ga moramo podrobnije razložiti.

Kada bi sile $\vec{F}_{gA}$ i $\vec{F}_{gB}$ bile jedine vanjske sile na sustav, nastao bi slobodan pad obaju tijela prema dolje. To se ne događa jer nit ovješena preko koloture to ne dozvoljava. U sljedećem ćemo poglavlju objasniti prirodu sile koja se pojavljuje u napetoj niti. Za sada nam je dovoljno reći da napeta nit djeluje na oba kraja silama jednakih iznosa. Tako na slici 2.18a imamo sile $\vec{T}_A$ i $\vec{T}_B$ kojima nit djeluje na pojedina tijela. Napetost niti održava kolotura preko koje je nit ovješena. Ona djeluje na nit silom prema gore, a ta je sila jednaka zbroju $\vec{T}_A + \vec{T}_B$. Ovu silu moramo također smatrati vanjskom silom na promatrani sustav utega.

Ukupna vanjska sila na ovaj sustav tijela iznosi $\vec{F}_v = \vec{F}_{gA} + \vec{F}_{gB} + \vec{T}_A + \vec{T}_B$, pa bismo za akceleraciju sustava dobili primjenom drugoga Newtonova zakona $\vec{a} = \vec{F}_v/(m_A + m_B)$. No, pitamo se kome valja pripisati ovu akceleraciju. U poglavlju 6 upoznat ćemo pojam centra masa i shvatiti da se dobivena akceleracija odnosi na tu zamišljenu točku. Fizika je očito složena i nije moguće odjednom obraditi sve njene fenomene. Ovdje uviđamo da rješenje problema gibanja pojedinih tijela u Atwoodovu padostroju moramo potražiti na drugi način.

Dodajmo gornjem razmatranju još jednu dopunu. Sile $\vec{T}_A$ i $\vec{T}_B$ ne možemo identificirati kao par unutarnjih sila sustava dvaju utega koje zadovoljavaju treći Newtonov zakon. To je očito jer obje sile imaju isti smjer prema gore (slika 2.18a), dok sile akcije i reakcije moraju imati uvijek suprotan smjer. Sile $\vec{T}_A$ i $\vec{T}_B$ predstavljaju zapravo djelovanje niti na utege, a ne izravno djelovanje jednog utega na drugi. Očito je da u rješavanju problema Atwoodova padostroja moramo razmatrati i nit kao treće tijelo, čak i ako smatramo da je masa niti zanemariva. Taj bi nas pristup vodio opet na gibanje centra masa koji smo gore već spomenuli, te ga ostavljamo za poglavlje 6.



Slika 2.18: (a) Skica Atwoodova padostroja. Označene su gravitacijske sile na tijela A i B, te sile kojima napeta nit djeluje na pojedina tijela. Kolotura djeluje silom na nit u ovjesu. (b) Prikaz zamišljenog zamjenskog sustava s ispruženom niti duž osi x. U njemu nema koloture, pa ni sile kojom kolotura djeluje na nit u realnom Atwoodovu padostroju iz slike (a). Ostale sile su zadržane kao relevantne, ali formalno položene duž osi x.

Jednostavno rješenje za gibanje utega u Atwoodovu padostroju možemo dobiti ako razmotrimo *zamjenski* sustav prikazan na slici 2.18b. Nit koja spaja dva tijela prikazana je u ispruženom obliku. Time nestaje uloga koloture, pa ona nije ni prikazana na slici 2.18b. Sile $\vec{F}_{gA}$ i $\vec{F}_{gB}$ ostaju kao vanjske sile na sustav tijela i djeluju na suprotne strane tako da napinju nit koja spaja dva tijela. Razumije se, u ovoj transformaciji sustava ne smijemo više interpretirati ove sile kao gravitacijske, nego naprosto računati s njima kao s nekim općenitim silama. Na slici je označena i os x tako da umjesto vektorskih

veličina možemo pisati algebarske, te dobivamo za akceleraciju sustava

$$a = \frac{F_{gB} - F_{gA}}{m_A + m_B} \tag{2.42}$$

Ako je npr. $F_{gB} > F_{gA}$, akceleracija je pozitivna algebarska veličina, $a > 0$, tj. sustav tijela se ubrzava prema pozitivnom smjeru osi x.

Napomena: Sile $\vec{T}_A$ i $\vec{T}_B$ na slici 2.18b postaju suprotne po smjeru, te ih možemo identificirati sa unutarnjim silama za koje vrijedi treći Newtonov zakon. Pisano uobičajenim simbolima, imali bismo $\vec{F}_{AB} = \vec{T}_B$ i $\vec{F}_{BA} = \vec{T}_A$ kao sile akcije i reakcije. Kao unutarnje sile, one ne utječu na gibanje sustava tijela u cjelini.

Možemo sada prenijeti dobiveno rješenje iz jednadžbe (2.42) na realni Atwoodov padostroj. Ako je $F_{gB} > F_{gA}$, tijelo B će padati prema dolje, a tijelo A će se podizati uvis, oba uz akceleraciju koja je po iznosu jednaka rješenju u jednadžbi (2.42).

U sljedećem ćemo poglavlju detaljnije upoznati prirodu gravitacijske sile. Navedimo ovdje samo tvrdnju da je ona proporcionalna masi tijela na koju djeluje, tj. $F_{gA} = m_A g$ i $F_{gB} = m_B g$, tako da za akceleraciju na Atwoodovu padostroju dobivamo

$$a = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} g \tag{2.43}$$

Razlomak u ovoj jednadžbi je uvijek manji od jedinice tako da je i akceleracija a manja od akceleracije slobodnog pada g. U slučaju malene razlike među masama, dobivamo vrlo malenu akceleraciju. To je bitna odlika Atwoodova padostroja koja pogoduje eksperimentalnim mjerenjima. Ako su mase tijela jednake ($m_A = m_B$), te ako ih pokrenemo do neke brzine i zatim pustimo, nastavit će se gibati istom konstantnom brzinom jer je $a = 0$. To je također jedan od pokusa koji se može demonstrirati na Atwoodovom padostroju.

Problem gibanja tijela u Atwoodovu padostroju možemo alternativno riješiti i tako da analiziramo sile na svako tijelo zasebno, a ne ukupno za cijeli sustav. U tome pristupu gubi se pojam unutarnjih sila. Svaka sila koja djeluje na neko tijelo predstavlja vanjsku silu. Na slici 2.18a označena je vertikalna os y, tako da sile i akceleraciju možemo pisati kao algebarske veličine. Primjenom drugoga Newtonova zakona za pojedine utege nalazimo

$$a_{yA} = \frac{T_A - m_A g}{m_A} \tag{2.44}$$

$$a_{yB} = \frac{T_B - m_B g}{m_B} \tag{2.45}$$

Nit je po pretpostavci nerastezljiva pa su akceleracije dvaju tijela jednake po iznosu ali suprotnoga predznaka, tj. $a_{yA} = -a_{yB} = a$. Napetost niti stvara jednake sile na oba kraja, tako da možemo pisati $T_A = T_B = T$. S tim postavkama jednadžbe (2.44) i (2.45) daju rješenje za a koje je identično onome u jednadžbi (2.43). Dakle, primjenom jednadžbi gibanja na pojedina tijela u sustavu dobivamo isto rješenje kao i razmatranjem vanjskih sila na sustav u cjelini.

2.4.2 Zemlja i tijelo u slobodnom padu

Do sada smo razmatrali gibanje tijela pod utjecajem gravitacijske sile tako da se Zemlja smatrala nepomičnom, te je uz nju bio vezan referentni koordinatni sustav u odnosu prema kojem se određuje položaj tijela, odnosno gibanje. Međutim, na Zemlju i tijelo također možemo gledati kao na sustav dvaju tijela, pa se pitamo kako izgleda njegovo gibanje.

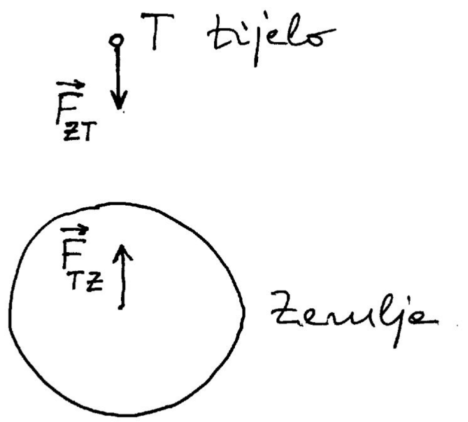
Na slici 2.19 prikazana je situacija u kojoj je tijelo T dovedeno na neku visinu iznad površine Zemlje Z i zatim pušteno. Između tijela i Zemlje postoji uzajamno gravitacijsko privlačenje. Prirodu te sile razmatrat ćemo u sljedećem poglavlju 3, a ovdje nam je dovoljno reći da je sila kojom Zemlja privlači tijelo $\vec{F}_{ZT}$ jednaka po iznosu no suprotnoga smjera od sile kojom tijelo privlači Zemlju $\vec{F}_{TZ}$. To je u skladu s trećim Newtonovim zakonom za međudjelovanje dvaju tijela.

Ako tijelo i Zemlju promatramo zajedno kao jedan sustav, onda su sile $\vec{F}_{ZT}$ i $\vec{F}_{TZ}$ unutarnje sile tog sustava, koje ne mogu uzrokovati akceleraciju sustava kao cjeline. Ovo će postati jasnije kada upoznamo pojam centra masa u poglavlju 6.

Ovdje možemo analizirati gibanje pojedinih dijelova sustava. Pušteno tijelo gibat će se prema Zemlji akceleracijom

$$\vec{a}_T = \frac{\vec{F}_{ZT}}{m_T} \tag{2.46}$$

gdje je m_T masa tijela. No, to nije jedino gibanje u sustavu jer i na Zemlju djeluje sila, pa se i ona giba prema tijelu akceleracijom



Slika 2.19: Zemlja i tijelo na nekoj udaljenosti od nje privlače se gravitacijskim silama.

$$\vec{a}_Z = \frac{\vec{F}_{TZ}}{m_Z} \tag{2.47}$$

gdje je m_Z masa Zemlje. Budući da su iznosi dviju sila jednaki, a masa Zemlje mnogo redova veličine veća od mase bilo kojeg realnog tijela koje možemo postaviti na nekoj visini iznad površine Zemlje, izravno zaključujemo da je iznos akceleracije Zemlje mnogo redova veličine manji od iznosa akceleracije tijela

$$a_Z << a_T \tag{2.48}$$

Ovaj nam rezultat kaže da je gibanje Zemlje prema tijelu praktički zanemarivo. U tom smislu tumačimo prethodne analize slobodnog pada tijela u kojima smo smatrali Zemlju nepokretnom.

Na kraju moramo dodati da se akceleracije u jednadžbama (2.46) i (2.47) određuju tako da se mjere položaji tijela i Zemlje u odnosu prema nekom koordinatnom sustavu koji je inercijalan jer samo u takvome sustavu smijemo primjenjivati drugi Newtonov zakon. Opsežnije razmatranje inercijalnih i neinercijalnih sustava provest ćemo u poglavlju 4.

2.4.3 Dinamika guranja ili vuče tijela na Zemlji

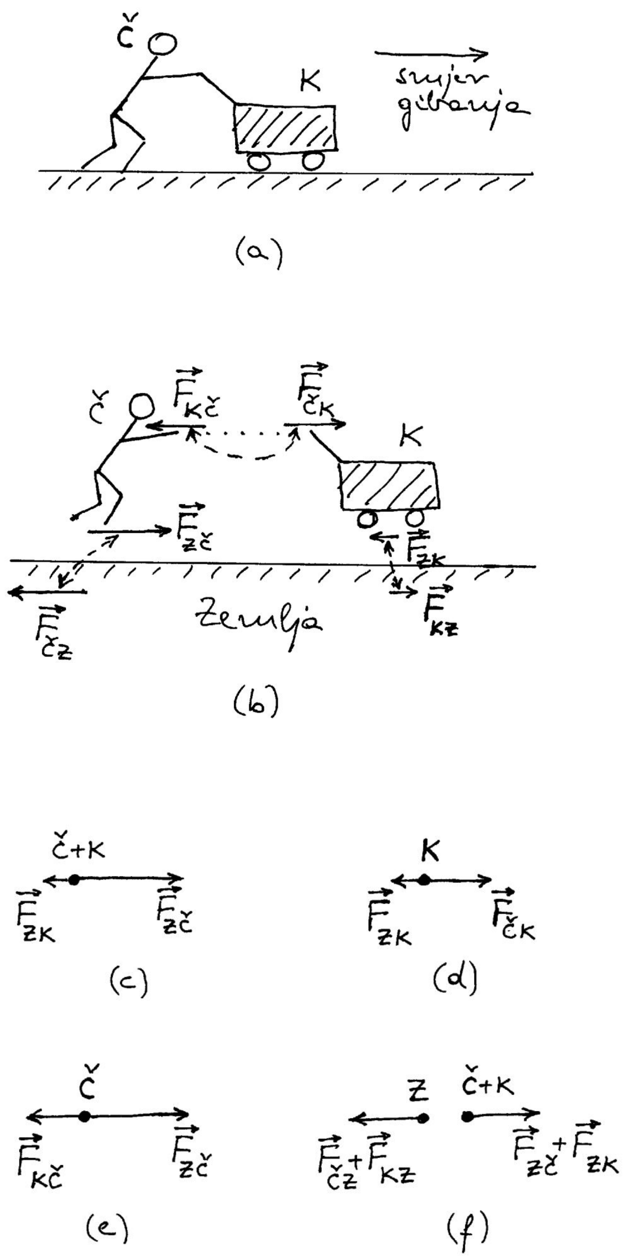
Guranje i vuču tijela po horizontalnoj podlozi razmatrali smo u prethodnom odjeljku 2.3 sa stajališta djelovanja vanjske sile na tijelo. Sada nas interesira i uzročnik te sile, a to znači sustav tijela u cjelini. Zbog važnosti problema i mogućih pogrešnih shvaćanja, izložit ćemo tri primjera takvih gibanja.

Čovjek gura kolica

Slika 2.20a prikazuje čovjeka ($\check{C}$)koji gura kolica (K) na horizontalnoj podlozi. Postavlja se pitanje koje se sve sile pojavljuju u ovome primjeru i kakav je njihov učinak. Poslužimo se pomoćnim crtežom na slici 2.20b u kojemu je svako tijelo prikazano odvojeno od drugih da bi se lakše mogle pratiti razne sile. Ne smijemo zaboraviti da uvijek vrijedi treći Newtonov zakon, tj. kada god ucrtamo silu kojom neko tijelo djeluje na drugo, moramo ucrtati i silu reakcije kojom drugo tijelo djeluje na ono prvo. Ti su parovi sila obilježeni na slici 2.20b crtkanim poveznicama da bismo ih lakše uočavali.

Ovdje nas ne zanima gravitacijska sila kojom Zemlja privlači tijelo prema dolje jer je ta sila uravnotežena normalnom silom podloge prema gore. Stoga su na slici 2.20b prikazane samo sile koje djeluju u horizontalnom smjeru. Iz vlastitog iskustva, najprije pomišljamo na silu kojom čovjek gura kolica $\vec{F}_{\check{C}K}$ jer tu silu izravno primjenjujemo svojim rukama. No, ako guramo kolica, osjećamo da nam kolica pružaju otpor, tj. djeluju na naše ruke protusilom $\vec{F}_{K\check{C}}$. Treći Newtonov zakon nas uči da su te dvije sile jednake po iznosu i protivnoga smjera. To je pak tvrdnja koja često izaziva pomutnju jer se postavlja iskustveno pitanje kako to da čovjek ipak potiskuje kolica, a sile su jednake. Odgovor ćemo dobiti tek nakon što razmotrimo i ostale sile na slici 2.20b. Pretpostavka je da čovjek gazi po podlozi koja nije klizava, tj. postoji trenje. To pak znači da se čovjek pomiče tako što se *odupire* o podlogu, odnosno djeluje silom $\vec{F}_{\check{C}Z}$ na Zemlju. No, po trećem Newtonovu zakonu, Zemlja djeluje na čovjeka silom reakcije $\vec{F}_{Z\check{C}}$. Obje su sile ucrtane na slici 2.20b.

Između kolica i podloge postoji također neka malena sila trenja. To je trenje kotrljanja kotača o kojem će biti više riječi u sljedećem poglavlju 3. Ovdje samo napomenimo da kolica u gibanju djeluju na Zemlju silom $\vec{F}_{KZ}$ koja nastoji malo gurnuti Zemlju u smjeru gibanja kolica, dok Zemlja djeluje na kolica silom $\vec{F}_{ZK}$ koja ima suprotan smjer, tj. nastoji zaustaviti gibanje kolica. I ove su sile ucrtane na slici 2.20b, te povezane crtkanom linijom koja obilježava par sila iz trećega Newtonova zakona.



Slika 2.20: (a) Čovjek gura kolica na horizontalnoj podlozi s trenjem. (b) Prikaz formalno rastavljenih tijela i sila koje djeluju na svako od njih. Crtkane linije povezuju parove sila akcije i reakcije. (c) Dijagram sila za čovjeka i kolica kao jedan sustav prikazan u čestičnom modelu. (d) Dijagram sila na kolica. (e) Dijagram sila na čovjeka. (f) Dijagrami sila na Zemlju i na sustav čovjeka i kolica, svaki u čestičnom modelu.

Sada možemo nacrtati dijagram sila na slobodan sustav tijela koji se sastoji od čovjeka i kolica ($\check{C}+K$), a prikazujemo ga u čestičnom modelu kao jedno jedino tijelo na slici 2.20c. Unutarnje sile sustava ($\vec{F}_{\check{C}K}$ i $\vec{F}_{K\check{C}}$) ne djeluju na gibanje sustava u cjelini, te ih možemo izostaviti. Preostaju nam samo sile $\vec{F}_{Z\check{C}}$ i $\vec{F}_{ZK}$ kojima Zemlja djeluje na pojedina tijela sustava, te ih u ovome prikazu smatramo vanjskim silama koje djeluju na taj sustav tijela ($\check{C}+K$). Budući da su čovjek i kolica u trajnom dodiru, oni se ponašaju kao jedno tijelo, pa je smisleno zbrojiti sile u jednu ukupnu vanjsku silu

$$\vec{F}_v = \vec{F}_{Z\check{C}} + \vec{F}_{ZK} \tag{2.49}$$

koja daje akceleraciju cjelokupnom sustavu čovjeka i kolica

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_v}{m_{\check{C}} + m_K} \tag{2.50}$$

Napomena: Kada bi dodir između čovjeka i kolica prestao, gornje razmatranje više ne bi bilo primjenjivo. Ta bismo dva tijela morali razmatrati kao zasebna, te ne bismo više smjeli zbrajati vanjske sile koje djeluju na pojedina tijela. Naime, sila je po definiciji djelovanje koje može dati akceleraciju tijelu. Kod odvojenih tijela, svako tijelo dobiva zasebnu akceleraciju i to samo zbog one sile koja na njega djeluje.

Potrebno je malo analizirati ukupnu vanjsku silu $\vec{F}_v$ koja je dana jednadžbom (2.49). Ako se čovjek pomoću mišića svoje noge jače otiskuje od trenutnog položaja na podlozi, tj. ako je veća sila $\vec{F}_{\check{C}Z}$, bit će veća i sila reakcije $\vec{F}_{Z\check{C}}$ kojom Zemlja djeluje na čovjeka i time na cijeli sustav čovjeka i kolica. Ako je ta sila po iznosu veća od sile $\vec{F}_{ZK}$ kojom Zemlja nastoji zaustaviti gibanje kolica, a time i cijeloga sustava čovjeka i kolica, onda će se sustav ubrzavati u smjeru veće sile (slika 2.20c), tj. onako kako čovjek gura kolica.

No, čovjek obično ubrza kolica iz položaja mirovanja, a kada zajedno s kolicima dosegne neku brzinu, smanji silu svojih nogu prema Zemlji $\vec{F}_{\check{C}Z}$, pa se smanji i sila reakcije $\vec{F}_{Z\check{C}}$. Kada iznos te sile postane jednak iznosu sile $\vec{F}_{ZK}$, kojom Zemlja nastoji zaustaviti kolica, ukupna vanjska sila iščezne (jednadžba (2.49)). U tim se uvjetima čovjek i kolica gibaju jednoliko po pravcu.

Napomena: Radi jednostavnosti smo u ovome razmatranju zanemarili postojanje sile trenja kod okretanja kotača u ležištu osovine.

Ako čovjek još smanji silu svojih nogu, postane sila $\vec{F}_{Z\check{C}}$ po iznosu manja od sile $\vec{F}_{ZK}$, pa ukupna vanjska sila $\vec{F}_v$ poprimi smjer suprotan trenutnome gibanju čovjeka i kolica, te ih zaustavlja.

Kakva je uloga sile kojom čovjek gura kolica?

U opisanom procesu ubrzavanja i usporavanja čovjeka s kolicima, gotovo da smo i zaboravili na silu $\vec{F}_{\check{C}K}$ kojom čovjek gura kolica, te silu reakcije $\vec{F}_{K\check{C}}$. Pitamo se čime su one zadane, te jesu li stalne ili promjenljive u navedenim procesima. Iz vlastitog iskustva u guranju kolica, svatko može posvjedočiti o većem naporu koji mora uložiti kada želi ubrzavati kolica, pogotovo kada su ona napunjena teškim teretom. Kada pak kolica dosegnu željenu brzinu, dovoljno ih je slabije gurati da se održi konstantna brzina. Fizikalno objašnjenje mora dovesti u vezu silu na neko tijelo s akceleracijom koju to tijelo dobiva. Ako, dakle, želimo razmatrati silu $\vec{F}_{\check{C}K}$, moramo usredotočiti pažnju na kolica koja imaju svoju masu m_K. Na kolica djeluje još i sila $\vec{F}_{ZK}$ kojom ih Zemlja nastoji zaustavljati, tako da je ukupna sila na kolica

$$\vec{F}_K = \vec{F}_{\check{C}K} + \vec{F}_{ZK} \tag{2.51}$$

Dijagram sila na kolica kao slobodno tijelo prikazan je na slici 2.20d. Ukupna sila daje kolicima akceleraciju

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_K}{m_K} \tag{2.52}$$

Dakle, sila kojom čovjek gura kolica $\vec{F}_{\check{C}K}$ potrebna je da bi nastala ukupna sila na kolica $\vec{F}_K$ koja može kolicima mase m_K dati akceleraciju $\vec{a}$.

Razumije se, akceleracija $\vec{a}$ u jednadžbi (2.52) je ona ista kao i u jednadžbi (2.50) za cjelokupni sustav čovjeka i kolica. Razlika je samo u tome što u jednadžbi (2.52) usredotočujemo pažnju samo na jedno tijelo mase m_K uz odgovarajuću silu $\vec{F}_K$ na to tijelo. Iz usporedbi jednadžbi (2.49) i (2.51) slijedi da veću akceleraciju možemo dobiti povećanjem sile $\vec{F}_{Z\check{C}}$, odnosno sile $\vec{F}_{\check{C}K}$. Drugim riječima, kada čovjek poveća silu svojih nogu, pa poraste sila $\vec{F}_{Z\check{C}}$, poveća se i sila $\vec{F}_{\check{C}K}$ kojom čovjek gura kolica. Kada čovjek s kolicima dosegne željenu brzinu, može smanjiti silu svojih nogu, pa se smanji i sila $\vec{F}_{Z\check{C}}$, a ujedno i sila $\vec{F}_{\check{C}K}$ kojom gura kolica. Kada sila guranja kolica $\vec{F}_{\check{C}K}$ postane jednaka po iznosu sili zaustavljanja kolica $\vec{F}_{ZK}$, iščezne ukupna sila na kolica $\vec{F}_K$, a time i akceleracija, što znači da se kolica gibaju jednoliko po pravcu. Ako se sile još smanje, dolazi do zaustavljanja kolica. Time smo odgovorili na postavljeno pitanje o promjenljivosti sile kojom čovjek gura kolica, te o njenoj ulozi u gibanju kolica.

Korisno je još dodati jedno razjašnjenje u gornjem prikazu. Iako se sile $\vec{F}_{Z\check{C}}$ i $\vec{F}_{\check{C}K}$ istodobno povećavaju ili smanjuju, to ne znači da su jednake. Valja uočiti da sila $\vec{F}_{Z\check{C}}$ sudjeluje u akceleraciji cjelokupnog sustava koji se sastoji od čovjeka i kolica (jednadžbe (2.49) i (2.50)). S druge strane, sila $\vec{F}_{\check{C}K}$ sudjeluje samo u akceleraciji kolica (jednadžbe (2.51) i (2.52)). O razlici navedenih dviju sila možemo također rasuđivati ako analiziramo gibanje samoga čovjeka. Na njega djeluje jedna od tih sila $\vec{F}_{Z\check{C}}$, te sila kolica na čovjeka $\vec{F}_{K\check{C}}$ (reakcija na silu $\vec{F}_{\check{C}K}$), dajući ukupnu silu na čovjeka $\vec{F}_{\check{C}} = \vec{F}_{Z\check{C}} + \vec{F}_{K\check{C}}$. Dijagram sila na čovjeka kao na slobodno tijelo prikazan je na slici 2.20e. Čovjek se giba ubrzano (ili usporeno) kada se dvije sile koje na njega djeluju razlikuju po iznosima, te mu je akceleracija $\vec{a} = \vec{F}_{\check{C}}/m_{\check{C}}$. Jedino u slučaju kada se čovjek giba jednoliko po pravcu znamo da su dvije sile koje na njega djeluju jednake po iznosu.

Što je sa silama koje djeluju na Zemlju?

Vratimo se opet na gibanje čovjeka i kolica kao na sustav dvaju tijela. Vidjeli smo da na gibanje tog sustava u cjelini utječu sile kojima Zemlja djeluje na njega (jednadžba (2.49) i slika 2.20c). Ako u razmatranje uključimo i sile na Zemlju koje su označene na slici 2.20b, možemo sastaviti dijagram sila kao na slici 2.20f. Na toj slici, čovjek i kolica su prikazani kao jedna čestica, a Zemlja kao druga. Rezultantna sila na čovjeka i kolica je $\vec{F}_v$ i dana je jednadžbom (2.49). Na Zemlju djeluje ukupna sila $\vec{F}_Z = \vec{F}_{\check{C}Z} + \vec{F}_{KZ} = -\vec{F}_v$ prema trećem Newtonovu zakonu. Dakle, čovjek kao pokretljivi čimbenik u procesu gibanja, putem sile svojih mišića, gura nogom Zemlju na jednu stranu, a time sebe i kolica odguruje na drugu stranu. To je bit cjelokupnog procesa gibanja. Pri tome moramo imati na umu

da je masa Zemlje ogromna prema masi čovjeka i kolica tako da sila $\vec{F}_Z$ uzrokuje zanemarivo malenu akceleraciju Zemlje.

Kamion vuče prikolicu

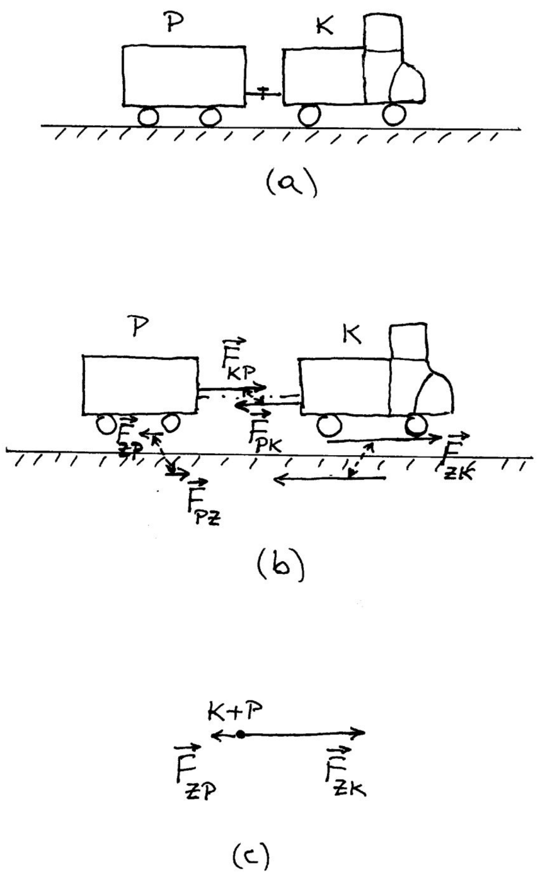
Vuča nekog tijela po horizontalnoj podlozi je također svakodnevna pojava. Uzmimo kao primjer obrade slučaj u kojemu neki kamion K vuče prikolicu P kao što je prikazano na slici 2.21a. Po uzoru na prethodni slučaj, nacrtajmo najprije na slici 2.21b razdvojena tijela i sile koje na njih djeluju, izuzimajući pritom sile u vertikalnom smjeru (gravitacijska sila i normalna sila podloge) jer su one ionako uravnotežene, te ne pridonose dinamici horizontalnog gibanja.

Sila kojom kamion vuče prikolicu $\vec{F}_{KP}$ i sila reakcije $\vec{F}_{PK}$ povezane su crtkanom linijom koja označava da se radi o paru sila iz trećega Newtonova zakona. Pogon dolazi od rada motora u kamionu koji rezultira okretanjem osovine na kojoj se nalaze kotači kamiona. Na slici 2.21b je prikazano kao da se pogon prenosi na stražnje kotače kamiona, no to nije bitno za daljnje razmatranje.

Podrazumijeva se da cesta nije klizava, pa okretnje pogonskih kotača ima za posljedicu pomicanje kamiona, a time i prikolice koju on vuče. Možemo reći da kotač u dodirnoj točki s podlogom djeluje na Zemlju silom $\vec{F}_{KZ}$, tj. nastoji odgurnuti Zemlju prema "natrag". Prema trećem Newtonovu zakonu, Zemlja uzvraća na kotač silom reakcije $\vec{F}_{ZK}$. Potonja sila je ona koja pokreće kamion i prikolicu prema "naprijed".

Kotači prikolice ostvaruju također kontakt s podlogom, no oni nisu pogonski, pa se njihova vrtnja ostvaruje uz trenje kotrljanja. Prirodu sile trenja kod kotrljanja kotača upoznat ćemo u sljedećem poglavlju 3, a ovdje samo uzimamo u obzir postojanje te sile. Na slici 2.21b ucrtana je sila $\vec{F}_{ZP}$ kojom Zemlja nastoji zaustaviti gibanje prikolice, te sila reakcije $\vec{F}_{PZ}$ kojom prikolica nastoji pogurnuti Zemlju u smjeru gibanja kamiona i prikolice. Radi jednostavnosti prikaza, na slici 2.21b ucrtane su samo sile na prednjim kotačima prikolice, no one nam predstavljaju ukupne sile trenja kotrljanja na svim kotačima.

Dijagram sila na sustav kamiona i prikolice prikazan je na slici 2.21c. Mogli bismo ponavljati korak po korak razmatranje provedeno na prethodnom primjeru čovjeka koji gura kolica, te razjasniti uloge pojedinih sila. Prepuštamo čitatelju da samostalno načini takvu analizu i odgovori na sva pitanja koja pritom može sam sebi postaviti.



Slika 2.21: (a) Kamion vuče prikolicu na horizontalnoj podlozi s trenjem. (b) Formalno rastavljena tijela s prikazom sila koje djeluju na svako od njih. Parovi sila akcije i reakcije povezani su crtkanim linijama. (c) Dijagram sila na kamion i prikolicu kao jedan sustav.

Tegljač vuče brod

Ponekad je potrebno vući neki brod na moru zbog kvara njegovih motora ili drugih razloga. Fizikalni odnosi su slični onima iz prethodnog primjera s kamionom i prikolicom. Razlika je u vrsti podloge na kojoj se tijela nalaze. Tegljač i brod su djelomično uronjeni u morsku vodu. Pogon se ostvaruje radom motora u tegljaču uslijed čega se okreće osovina na kojoj je nasađen propeler tegljača. Njegovom vrtnjom potiskuje se morska voda prema "natrag".

No, morska voda djeluje silom reakcije na propeler u smjeru prema "naprijed". Ova sila dovodi do pokretanja tegljača i broda koji on vuče. Postoji i sila otpora njihovu gibanju, tj. morska voda nastoji zaustaviti gibanje plovila. Prema trećem Newtonovu zakonu, plovila koja se gibaju djeluju na morsku vodu silom kojom kao da žele pogurnuti morsku vodu prema "naprijed".

Prepuštamo čitatelju da samostalno nacrta slike plovila i mora sa svim silama koje se ovdje pojavljuju, te izvede pravilne zaključke o ulogama tih sila. Možemo samo napomenuti da se morska voda ponaša malo drukčije od čvrste podloge na kojoj se vozi kamion s prikolicom. U morskoj vodi nastaje kovitlanje i lokalno strujanje uslijed okretanja propelera i proboja pramca broda. Ove procese možemo za sada zanemariti.

2.5 Dinamika kružnog gibanja

U prethodnom poglavlju 1 upoznali smo posebnosti kružnog gibanja sa stajališta kinematike, tj. samoga opisa gibanja. Sada bismo se pozabavili uzrocima kružnog gibanja, kako jednolikog tako i ubrzanog.

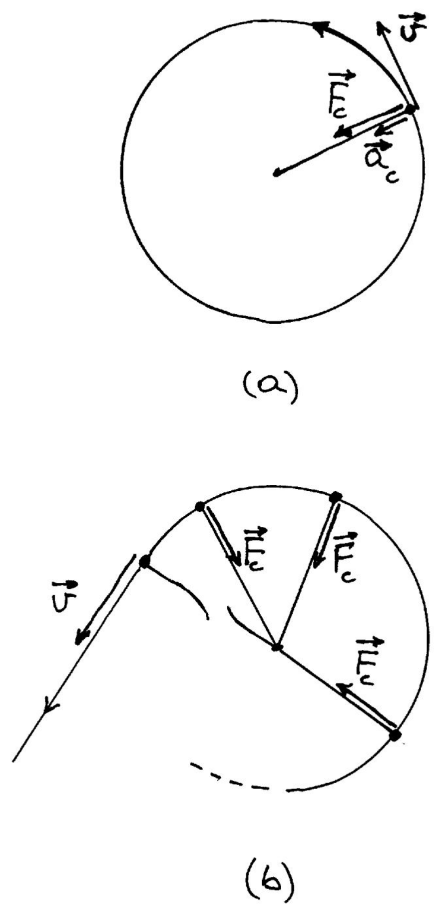
2.5.1 Centripetalna sila

Kružno gibanje nekog tijela ne može opstati samo po sebi. U tome nas podučava prvi Newtonov zakon koji kaže da samo jednoliko gibanje po pravcu opstaje bez djelovanja vanjske sile. Čim se mijenja brzina tijela, bilo po iznosu ili po smjeru, mora postojati sila kao uzrok te promjene. Kod kružnog gibanja, nužno se mijenja smjer brzine tijela, a moguće su situacije u kojima se mijenja i iznos brzine. Razmotrimo najprije slučaj jednolikog gibanja tijela po kružnici, tj. onoga u kojemu se iznos brzine ne mijenja.

Na slici 2.22a prikazano je jednoliko kružno gibanje nekog tijela mase m. Iz kinematičkog razmatranja u odjeljku 1.5 pokazali smo da takvo gibanje ima centripetalnu akceleraciju danu jednadžbom (1.72), te alternativno jednadžbom (1.92). Sada zaključujemo, na temelju drugoga Newtonova zakona, da tijelo mase m može imati centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_c$ jedino ako na njega djeluje odgovarajuća sila u smjeru te akceleracije

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_c}{m} \tag{2.53}$$

Silu koja tijelu daje centripetalnu akceleraciju nazivamo *centripetalnom silom* $\vec{F}_c$. Ona je također prikazana na slici 2.22a. Porijeklo centripetalne sile može biti različito. Kod kružnog gibanja Mjeseca oko Zemlje, porijeklo centripetalne sile je u gravitacijskoj sili kojom Zemlja privlači Mjesec. Na slici 2.22a prikazano je tijelo vezano nekom niti za središte vrtnje. U tom slučaju, porijeklo centripetalne sile nalazimo u napetosti niti kojom ona vuče tijelo prema središtu vrtnje.



Slika 2.22: (a) Jednoliko gibanje tijela (čestice) po kružnici zahtijeva postojanje centripetalne sile koja uzrokuje centripetalnu akceleraciju. (b) Ako se nit prekine u nekom trenutku, nestane centripetalna sila te se tijelo nastavi gibati po tangenti brzinom koju je imalo u trenutku prekida niti.

Tijekom kružnog gibanja, centripetalna sila $\vec{F}_c$ mijenja svoj smjer tako da u svakom trenutku vuče tijelo prema središtu i daje mu trenutnu akceleraciju $\vec{a}_c$. Bez stalno prisutne centripetalne sile ne bi bilo moguće kružno gibanje. Ako se tijekom vrtnje nit u nekome trenutku prekine, nestane centripetalna sila a time i uzrok koji stvara centripetalnu akceleraciju, pa se tijelo nastavi gibati jednoliko po pravcu onom brzinom koju je imalo u trenutku prekida niti (slika 2.22b).

Poznavajući izraze za centripetalnu akceleraciju koje smo izveli u prethodnom poglavlju 1 (jednadžbe (1.72) i (1.92)), možemo izraziti centripetalnu silu

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{r}\hat{r} = -m\omega^2\vec{r} \qquad (2.54)$$

Za kružno gibanje tijela koje ima veću masu, moramo primijeniti veću centripetalnu silu. Ako želimo da tijelo kruži većom brzinom, potrebna je također veća centripetalna sila, proporcionalna kvadratu brzine. Što se radijusa kružnice tiče, najlakše je pamtiti zadnji izraz u jednadžbi (2.54)) po kojemu, uz zadanu kutnu brzinu $\vec{\omega}$, nalazimo da nam je potrebno upotrijebiti to veću centripetalnu silu što je veći radijus kružnice po kojoj želimo vrtjeti dano tijelo. Te su nam spoznaje i iskustveno poznate. Što se tiče predzadnjeg izraza u jednadžbi (2.54)), ako zamislimo promjenu radijusa uz konstantnu obodnu brzinu v, moramo imati na umu da nužno moramo promijeniti kutnu brzinu rotacije. Stoga jednaka obodna brzina na kružnici manjeg radijusa iziskuje veću centripetalnu silu.

2.5.2 Moment sile i kutna količina gibanja

Razmotrimo sada slučaj u kojemu, pored centripetalne sile, djeluje na tijelo i neka tangencijalna sila $\vec{F}_t$, kako to prikazuje slika 2.23a. Prema drugome Newtonovu zakonu, ova sila uzrokuje akceleraciju tijela u istome smjeru

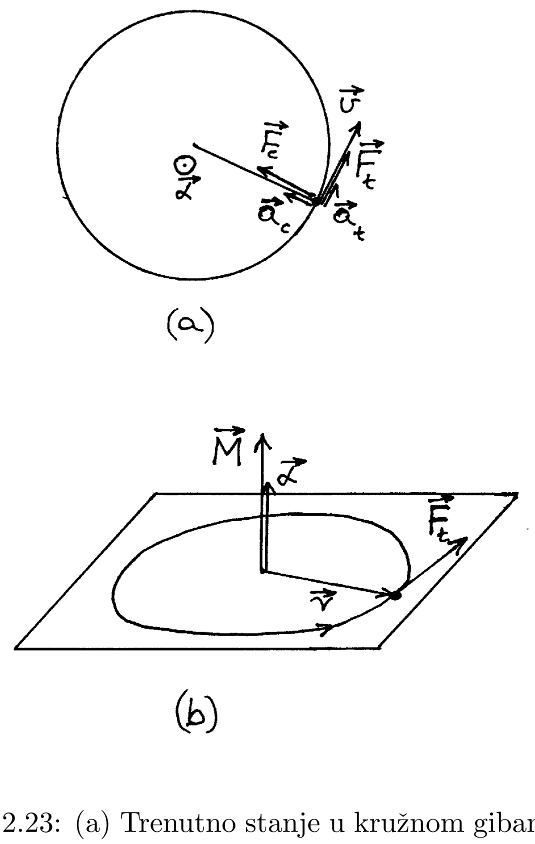
$$\vec{a}_t = \frac{\vec{F}_t}{m} \qquad (2.55)$$

pa je nazivamo tangencijalnom akceleracijom. O tangencijalnoj akceleraciji smo detaljnije govorili u odjeljku 1.5. Ona mijenja iznos obodne brzine gibanja tijela.

U odjeljku 1.5 obrađivali smo i kutne kinematičke veličine i upoznali neke njihove prednosti pred obodnim veličinama. Ovdje možemo ponoviti da promjena iznosa obodne brzine znači i promjenu iznosa kutne brzine gibanja tijela, a to znači da uz pojavu tangencijalne akceleracije $\vec{a}_t$ ide i pojava kutne akceleracije $\vec{\alpha}$. U jednadžbi (1.90) izrazili smo točan odnos između tih veličina $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. Kutna akceleracija $\vec{\alpha}$ prikazana je također na slici 2.23a kao vektor koji je okomit na ravninu vrtnje.

Moment sile

Imajući u vidu navedenu osobinu kutne akceleracije, možemo je pokušati dovesti u vezu s nekom novom vektorskom veličinom, koja bi uključivala tangencijalnu silu, a imala bi uvijek isti smjer okomit na ravninu vrtnje. Poznavajući pravila vektorskog množenja iz odjeljka 1.5, nalazimo da rezultat vektorskog množenja $\vec{r}$ s $\vec{F}_t$ ili s $\vec{a}_t$ daje uvijek vek-



Slika 2.23: (a) Trenutno stanje u kružnom gibanju. Naznačena je trenutna centripetalna i tangencijalna sila, te pripadne akceleracije. (b) Za danu tangencijalnu silu prikazan je odgovarajući moment sile i kutna akceleracija.

tor u smjeru kutne akceleracije $\vec{\alpha}$. Stoga obje strane u jednadžbi (2.55) pomnožimo vektorski s $\vec{r}$, tako da dobijemo

$$\vec{r} \times \vec{a}_t = \frac{1}{m}\vec{r} \times \vec{F}_t \tag{2.56}$$

Vektorsku veličinu s desne strane ove jednadžbe nazivamo *momentom sile*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t \tag{2.57}$$

Na slici 2.23b ucrtana je trenutna tangencijalna sila, te odgovarajući moment sile i kutna akceleracija.

Napomena: Za tangencijalnu silu je neprijeporno da djeluje na tijelo, pa se početak vektora $\vec{F}_t$ postavlja simbolički negdje blizu samoga tijela kao na slici 2.23b. Moment sile se također odnosi na tijelo, međutim, uobičajeno je da se u crtanju vektora $\vec{M}$ njegov početak postavi blizu središta kružnice tako da se naglasi točka oko koje nastaje rotacija.

Za vektorski produkt na lijevoj strani jednadžbe (2.56) nalazimo da je po iznosu jednak $|\vec{r} \times \vec{a}_t| = |\vec{r}|\,|\vec{a}_t| \sin \pi/2$. Uzimajući u obzir da je $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ prema jednadžbi (1.90), dobivamo za modul tangencijalne akceleracije $|\vec{a}_t| = |\vec{r}|\,|\vec{\alpha}| \sin \pi/2$, uz $\sin \pi/2 = 1$. Uvrštavanjem u prethodni izraz slijedi $|\vec{r} \times \vec{a}_t| = r^2\,|\vec{\alpha}|$. Budući da $\vec{r} \times \vec{a}_t$ ima smjer kao kutna akceleracija $\vec{\alpha}$, možemo pisati u vektorskoj formi $\vec{r} \times \vec{a}_t = r^2\vec{\alpha}$. Uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (2.56) dobivamo konačno

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I} \tag{2.58}$$

gdje je upotrijebljena skalarna veličina

$$I = mr^2 \tag{2.59}$$

koju nazivamo *moment tromosti* (ili *moment inercije*) za vrtnju tijela mase m po kružnici radijusa r.

Dobivena jednadžba (2.58) pokazuje da kutna akceleracija nastaje kao rezultat djelovanja momenta sile. Ona je po formi ista kao i drugi Newtonov zakon, s time da umjesto mase tijela nalazimo u nazivniku moment tromosti tog tijela.

Kutna količina gibanja

Prisjetimo se da se u izvornoj definiciji drugi Newtonov zakon odnosi na promjenu količine gibanja $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Poučeni iskustvom stečenim u gornjem razmatranju, uvedimo umjesto vektora $\vec{p}$, koji je kod kružnog gibanja uvijek tangencijalan, pa mijenja smjer tijekom vremena, novu vektorsku veličinu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.60}$$

koju nazivamo *kutna količina gibanja* (ili *moment količine gibanja*). Prema pravilima vektorskog množenja iz odjeljka 1.5, nalazimo da je vektor $\vec{L}$ okomit na ravninu vrtnje, kao što je prikazano na slici 2.24a.

Drugi Newtonov zakon izražen pomoću kutnih veličina

U svrhu uzročno posljedičnog povezivanja veličina $\vec{L}$ i $\vec{M}$, možemo doći na zamisao da jednadžbu za drugi Newtonov zakon $d\vec{p} = \vec{F}dt$ pomnožimo vektorski s $\vec{r}$, te dobijemo $\vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{F}dt$. No, postavlja se pitanje možemo li izraz s lijeve strane identificirati s $d\vec{L}$, a izraz s desne strane dovesti u vezu s $\vec{M}dt$, što bi nam odgovaralo za kružno gibanje. Moramo pritom biti jako oprezni jer promjena količine gibanja $d\vec{p}$ ovisi o ukupnoj sili $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_c$ koja trenutno djeluje na tijelo, te nema samo tangencijalnu komponentu.

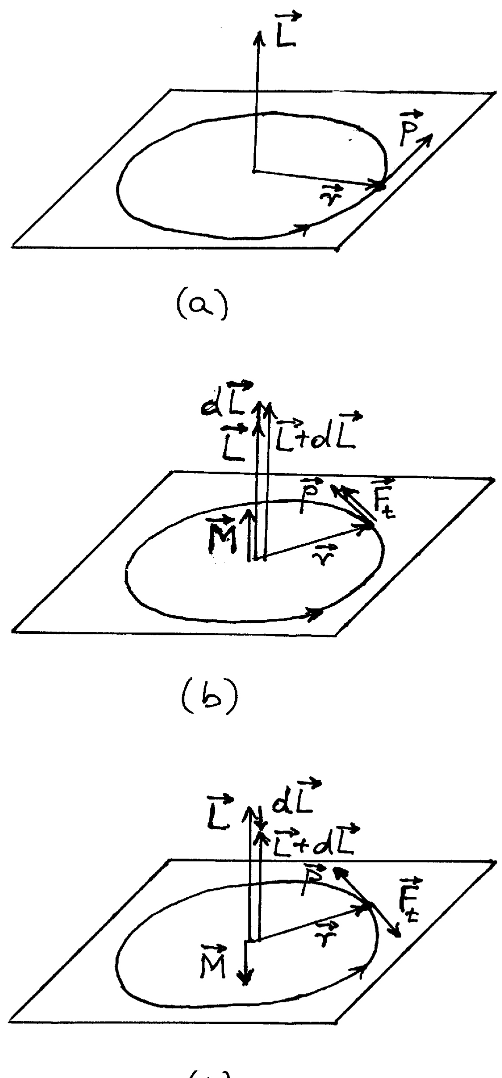
Stoga krenimo od postupka diferenciranja jednadžbe (2.60) primjenjujući matematičko pravilo za diferenciranje produkta $d\vec{L} = d\vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times d\vec{p}$. U prvome članu nalazimo diferencijal $d\vec{r}$ koji predstavlja infinitezimalni pomak tijela, koji se ostvaruje u smjeru tangente na kružnicu. Prema pravilu vektorskog množenja, koje smo naglasili u odjeljku 1.5, vektorski produkt dvaju paralelnih vektora iščezava, tako da je $d\vec{r} \times \vec{p} = 0$. Prema tome, ipak možemo pisati da je $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$.

Moramo još razmotriti i vektorski produkt $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_t + \vec{F}_c)$. Budući da vektorski produkt paralelnih vektora iščezava ($\vec{r} \times \vec{F}_c = 0$), preostaje samo $\vec{r} \times \vec{F}_t = \vec{M}$. Stoga uistinu vrijedi

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \tag{2.61}$$

Ova jednadžba ima isti oblik kao i drugi Newtonov zakon $d\vec{p} = \vec{F}dt$ s time da u njoj umjesto sile imamo moment sile, a umjesto količine gibanja

imamo kutnu količinu gibanja. Jednadžba (2.61) nam kaže da promjena kutne količine gibanja nastaje uslijed djelovanja momenta sile u intervalu dt, te ima isti smjer kao i moment sile. Možemo reći da ona izražava drugi Newtonov zakon putem kutnih vektorskih veličina.



Slika 2.24: (a) Prikaz vektora kutne količine gibanja prema jednadžbi (2.60). (b) Djelovanje momenta sile $\vec{M}$ tijekom vremenskog intervala dt uzrokuje promjenu kutne količine gibanja $d\vec{L}$. (c) Kada tangencijalna sila djeluje u suprotnom smjeru od trenutne količine gibanja $\vec{p}$, moment sile $\vec{M}$ ima suprotan smjer od trenutne kutne kutne količine gibanja $\vec{L}$. Promjena kutne količine gibanja $d\vec{L}$ slijedi uvijek smjer momenta sile $\vec{M}$.

Zbog važnosti i pravilnog razumijevanja odnosa među veličinama u jednadžbi (2.61), razmotrimo ih detaljnije na slici 2.24b. U nekome trenutku, tijelo se vrti određenom obodnom brzinom $\vec{v}$, odnosno ima određenu količinu gibanja $\vec{p}$, te slijedom jednadžbe (2.60) ima određenu kutnu količinu gibanja $\vec{L}$, koja je prikazana kao vektor na slici 2.24b. Ako u tome trenutku na tijelo djeluje tangencijalna sila $\vec{F_t}$ u smjeru gibanja tijela, onda je moment sile $\vec{M}$ usmjeren duž vektora $\vec{L}$. Promjena kutne količine gibanja $d\vec{L}$ ima uvijek smjer vektora $\vec{M}$, pa vidimo da se kutna količina gibanja tijekom vremenskog intervala dt poveća od $\vec{L}$ na $\vec{L} + d\vec{L}$. Radi se o ubrzavanju kružnog gibanja tijela.

Na slici 2.24c prikazan je pak slučaj u kojemu tangencijalna sila $\vec{F_t}$ ima smjer suprotan trenutnom gibanju tijela. Očekujemo da će njeno djelovanje izazvati usporavanje kružnog gibanja. Moment sile $\vec{M}$, te promjena kutne količine gibanja $d\vec{L}$, usmjereni su sada suprotno od vektora $\vec{L}$. Nakon vremenskog intervala dt, kutna količina gibanja $\vec{L} + d\vec{L}$ ima umanjen iznos u odnosu prema prethodnom vektoru $\vec{L}$. Uistinu vidimo učinak zaustavljanja kružnog gibanja.

Odnos kutne količine gibanja i kutne brzine

Možemo izvesti još jednu korisnu relaciju za kutnu količinu gibanja. Polazeći od definicije u jednadžbi (2.60), nalazimo da je iznos $\left|\vec{L}\right| = mr\left|\vec{v}\right|$. Uzimajući u obzir da je $|\vec{v}| = r\,|\vec{\omega}|$, dobivamo da je iznos kutne količine gibanja $\left|\vec{L}\right| = mr^2\,|\vec{\omega}|$. Produkt mr^2 prepoznajemo kao moment tromosti I definiran jednadžbom (2.59). Budući da su vektori $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ paralelni, možemo pisati

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{2.62}$$

Ovaj izraz za kutnu količinu gibanja ima istu formu kao i izraz $\vec{p} = m\vec{v}$, s time da su linearne veličine zamijenjene kutnima. Kutna količina gibanja proporcionalna je kutnoj brzini, te ima isti smjer.

Dimenzije i jedinice za mjerenje momenta sile i kutne količine gibanja. Dimenziju za silu smo ranije utvrdili kao $\left[MLT^{-2}\right]$, pa sukladno jednadžbi (2.57) nalazimo da je dimenzija momenta sile $\left[ML^2T^{-2}\right]$, dok je jedinica za mjerenje njutnmetar (1Nm). Dimenzija za kutnu količinu gibanja je $\left[ML^2T^{-1}\right]$, a jedinica za mjerenje $1\mathrm{kgm^2s^{-1}}$.

2.5.3 Promatranje kružnog gibanja iz različitih ishodišta

Moment sile smo uveli u jednadžbi (2.57) za razmatrani slučaj gibanja po kružnici. Naime, tijelo je bilo vezano za jedan kraj niti, a drugi kraj niti bio je učvršćen u jednoj nepomičnoj točki koja je postala središte kružnice po kojoj se tijelo može gibati. Stoga se učinak tangencijalne sile $\vec{F}_t$ odnosio na rotaciju upravo oko te točke.

Međutim, općenito se za silu $\vec{F}$, koja djeluje na neko tijelo, može definirati moment sile s obzirom na bilo koju odabranu točku. Uz istu silu $\vec{F}$, dobivaju se različiti momenti sile s obzirom na različite odabrane točke. Slika 2.25a daje kao primjer dvije odabrane točke O' i O'' i prikaz dvaju različitih momenata sile

$$\vec{M}' = \vec{r}\,' \times \vec{F} \quad , \quad \vec{M}'' = \vec{r}\,'' \times \vec{F} \tag{2.63}$$

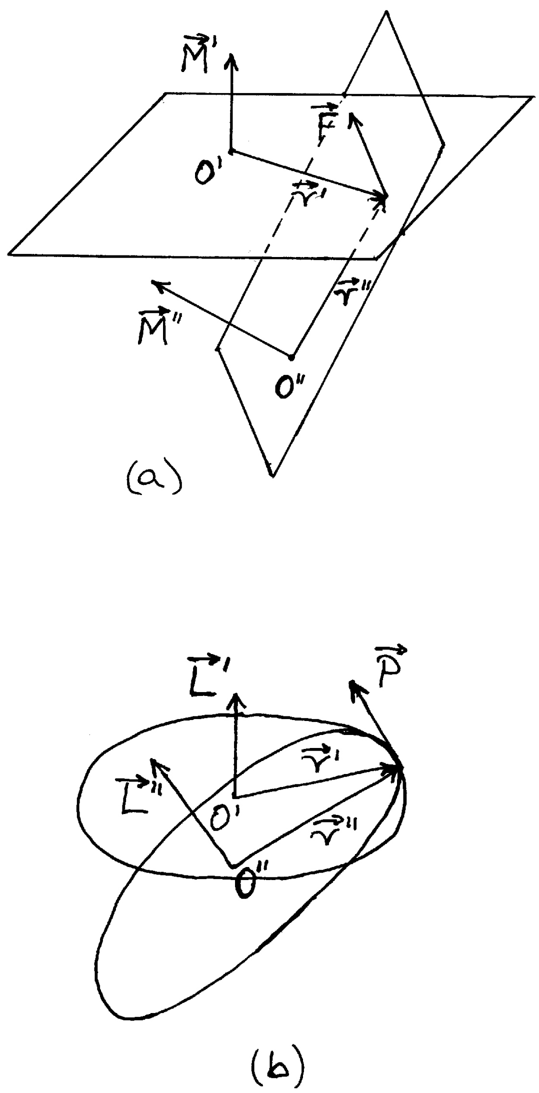
Vektorsko množenje dvaju vektora izvodi se uvijek prema pravilu koje smo upoznali u odjeljku 1.5. Vektor $\vec{M}'$ je okomit na ravninu koju određuju vektori $\vec{r}\,'$ i $\vec{F}$, a isto vrijedi i za vektor $\vec{M}''$ u odnosu na $\vec{r}\,''$ i $\vec{F}$. Stoga vektori momenata sile $\vec{M}'$ i $\vec{M}''$ ne moraju biti međusobno paralelni. Upravo je takav primjer odabran na slici 2.25a.

Svakome se odmah nameće pitanje o tome koji je moment sile "onaj pravi". Štoviše, ukoliko se ne može utvrditi koji bi moment sile bio "onaj pravi", logično je dovesti u pitanje smislenost takvog definiranja momenta sile kao fizikalne veličine koja može poprimiti bilo koji iznos i smjer u ovisnosti o izboru ishodišta.

Na ovo oštro pitanje dat ćemo odgovor u daljnjoj raspravi. Pokazat ćemo da je svaki izbor ishodišta uistinu jednako valjan i smislen jer možemo smatrati da sila $\vec{F}$ nastoji u tome trenutku rotirati tijelo upravo oko te odabrane točke. Također ćemo vidjeti da se matematički opis gibanja može izvesti s raznim odabirima ishodišta, no složenost opisa nije uvijek jednaka. Stoga moramo naučiti kako valja načiniti izbor koji je podoban za rješavanje određenog problema.

Okrenimo se sada kutnim kinematičkim veličinama. Kutnu količinu gibanja (ili moment količine gibanja) tijela također definiramo s obzirom na neku odabranu točku. Kao primjer, na slici 2.25b nalazimo tijelo mase m koje se giba brzinom $\vec{v}$, te stoga ima količinu gibanja $\vec{p}$. Možemo zamisliti da tijelo u tome trenutku stoji na obodu kružnice sa središtem u točki O', ili pak na obodu kružnice sa središtem u točki O''. Drugim riječima, možemo zamisliti da u tome trenutku tijelo obilazi oko točke O', ali isto tako i da obilazi oko točke O''. U ovisnosti o izboru ishodišta imamo trenutne kutne količine gibanja

$$\vec{L}' = \vec{r}\,' \times \vec{p} \quad , \quad \vec{L}'' = \vec{r}\,'' \times \vec{p} \tag{2.64}$$



Slika 2.25: (a) Jedna te ista sila $\vec{F}$ ima različite momente $\vec{M}'$ i $\vec{M}''$ s obzirom na različite točke. (b) Kutne količine gibanja $\vec{L}'$ i $\vec{L}''$ su različite ukoliko se određuju s obzirom na različite točke, iako je količina gibanja $\vec{p}$ jedna te ista.

Postavlja se sada pitanje vrijedi li odnos $d\vec{L} = \vec{M}dt$ za svaki izbor ishodišta. Ako ponovo razmotrimo izvod jednadžbe (2.61), možemo uočiti da u njemu nije postavljeno neko ograničenje za izbor ishodišta vektora $\vec{r}$. Važno je samo da i moment sile $\vec{M}$ i kutna količina gibanja $\vec{L}$ budu definirani u odnosu na istu točku O. Uz taj uvjet, vrijedi uvijek uzročno posljedični odnos $d\vec{L} = \vec{M}dt$ kao drugi Newtonov zakon izražen putem kutnih veličina.

Konusno njihalo

Da bi se potpuno shvatilo što donosi mogućnost izbora raznih točaka za ishodište u odnosu na koje definiramo vektore $\vec{L}$ i $\vec{M}$, potrebno je obraditi neke konkretne primjere. Razmotrimo ovdje *konusno njihalo* prikazano na slici 2.26a. Kružno gibanje tijela nastaje kada nit na kojem ono visi otklonimo od vertikale za neki kut θ, te pogurnemo tijelo u tangencijalnom smjeru tako da mu dademo odgovarajuću obodnu brzinu.

Na tijelo djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema dolje, a istodobno na njega djeluje i nit silom napetosti T. Ove su sile prikazane na slici 2.26a, a na pomoćnom je crtežu prikazan njihov vektorski zbroj. Rezultanta predstavlja centripetalnu silu

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{T} \tag{2.65}$$

Umjesto zajedničkog djelovanja dviju sila $\vec{F}_g$ i T, možemo uzeti da na tijelo djeluje jedna jedina sila $\vec{F}_c$ koja prisiljava tijelo na kružno gibanje.

Napomena: Nastanak centripetalne sile kao rezultante nije slučajnost. Lako je shvatiti da je gravitacijska sila u cijelosti kompenzirana vertikalnom komponentom sile napetosti. Kada to ne bi bilo tako, tj. kada bi postojala rezultantna vertikalna sila, tijelo bi imalo vertikalnu akceleraciju.

Prema jednadžbi (2.54)) iznos centripetalne sile povezan je s iznosom obodne brzine. Da bi nastalo kružno gibanje tijela, potrebno mu je u početku dati upravo taj iznos obodne brzine, što se može postići uz malo vještine i isprobavanja.

Sljedeće je pitanje postavljanja ishodišta O za definiranje kutnih veličina i obradu problema gibanja. U načelu bismo mogli odabrati bilo koju točku, čak i neku točku daleko od konusnog njihala, kao ishodište. Međutim, matematička obrada gibanja mogla bi postati jako složena tako da se ne ćemo upuštati u takva razmatranja. Gledajući na konusno njihalo, možemo uočiti da postoje dvije točke koje se ističu kao posebne. Tijelo se giba po kružnici koja leži u horizontalnoj ravnini, a središte kružnice je u točki vertikalno ispod objesišta niti. Iako u toj točki nema ničeg materijalnog, ona nam se po simetriji problema nameće kao pogodan izbor za ishodište. Druga istaknuta točka kod konusnog njihala je objesište niti, pa bismo i u nju mogli smjestiti ishodište. Obradit ćemo redom oba izbora za ishodište, te zatim izvući zaključke.

Na slici 2.26b odabrano je ishodište O u središtu kružnice po kojoj se tijelo giba. U svakom trenutku radijus $\vec{r}$ i sila $\vec{F}_c$ leže na istom pravcu, ali imaju suprotne smjerove, tj. tvore kut π. Stoga njihov vektorski produkt iščezava

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_c = 0 \tag{2.66}$$

Moment centripetalne sile iščezava. Stoga nema promjene kutne količine gibanja

$$d\vec{L} = \vec{M}dt = 0 \tag{2.67}$$

Tijelo ima kutnu količinu gibanja $\vec{L}$ koja je prikazana na slici 2.26b, ali se ona ne mijenja niti po iznosu niti po smjeru.

Razmotrimo sada drugi izbor prema kojemu je ishodište O smješteno u objesište niti kao što prikazuje slika 2.26c. Vektor $\vec{r}$ se sada proteže duž niti, te nije na istom pravcu kao sila $\vec{F}_c$. Stoga moment centripetalne sile s obzirom na ovo ishodište O ne iščezava

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_c \neq 0 \tag{2.68}$$

Trenutni smjer vektora $\vec{M}$ je uvijek okomit na ravninu koju tvore vektori $\vec{r}$ i $\vec{F}_c$. Tijekom vremena oni rotiraju oko vertikalne osi, pa i vektor $\vec{M}$ isto tako rotira.

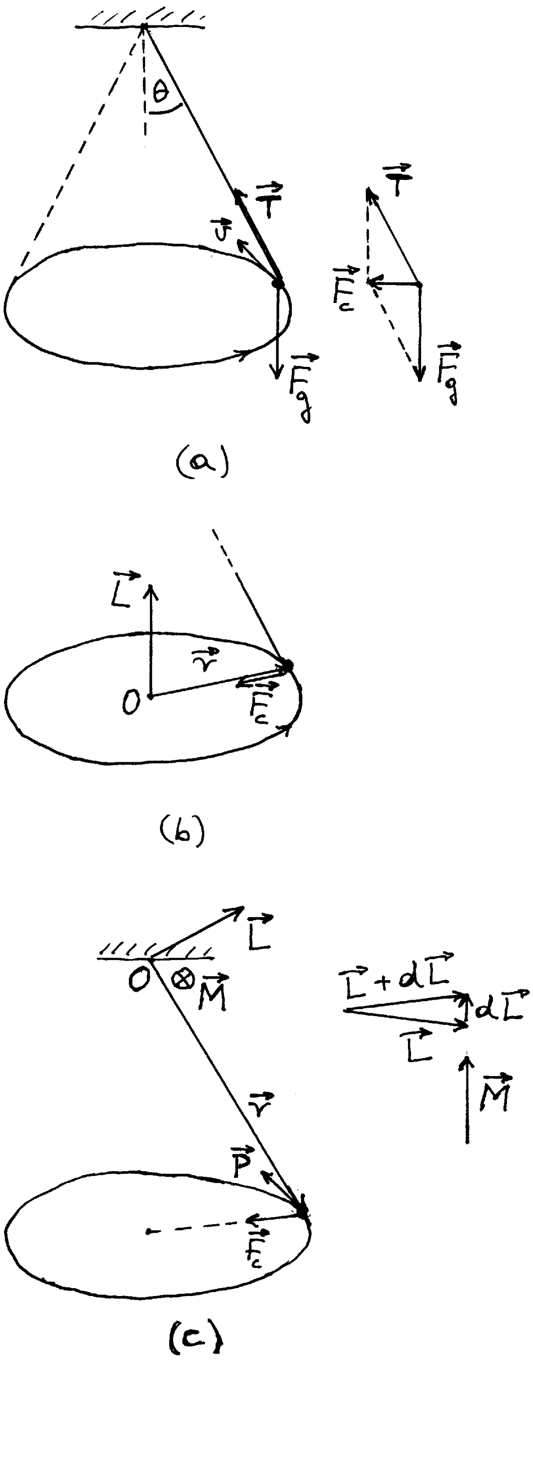
Postojanje neiščezavajućeg momenta sile moglo bi nas navesti na razmišljanje da uslijed njegova djelovanja dolazi do obodnog ubrzavanja kružnog gibanja. No, s druge strane, znamo da se radi o jednom te istom gibanju, samo što ga gledamo iz drugog ishodišta nego ranije. Moramo stoga detaljnije razjasniti ovaj problem.

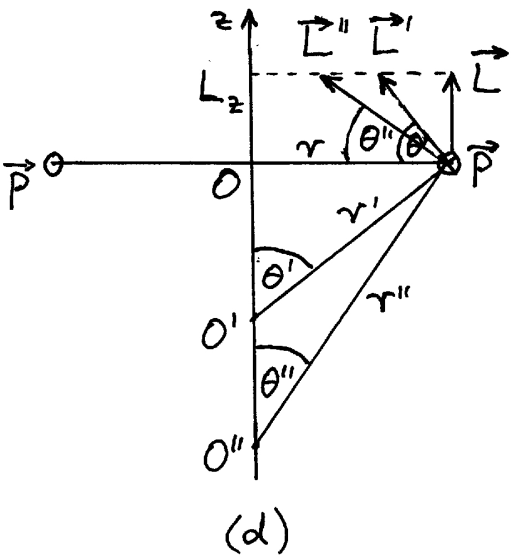
Pogledajmo što se zbiva s vektorom kutne količine gibanja definiranim s obzirom na sadašnje ishodište O. Na slici 2.26c nacrtana je trenutna

količina gibanja $\vec{p}$, te pripadna kutna količina gibanja

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.69}$$

Vektor $\vec{L}$ je okomit na ravninu koju tvore vektori $\vec{r}$ i $\vec{p}$. Ta je ravnina okomita na onu koju tvore vektori $\vec{r}$ i $\vec{F_c}$ (jer su $\vec{p}$ i $\vec{F_c}$) uzajamno okomiti), pa su kutna količina gibanja $\vec{L}$ i moment sile $\vec{M}$





Slika 2.26: (a) Konusno njihalo s odgovarajućom tangencijalnom brzinom. Na tijelo djeluje gravitacijska sila $\vec{F_g}$ i sila napetosti niti T. Na pomoćnom crtežu zbrojene su navedene dvije sile i dobivena rezultanta $\vec{F_c}$. (b) Postavljanje ishodišta O u središte kružnice po kojoj se tijelo giba. Moment sile $\vec{F_c}$ iščezava pa je kutna količina gibanja $\vec{L}$ konstantna. (c) Postavljanje ishodišta O u objesište niti. Sila $\vec{F_c}$ ima moment $\vec{M}$ koji u intervalu vremena dt uzrokuje promjenu kutne količine gibanja $d\vec{L}$. Pomoćna slika prikazuje pogled odozgo s vektorima $\vec{M}$ i $d\vec{L}$ u istome smjeru. (d) Bočni pogled u kojemu se kružna putanja tijela vidi kao horizontalna crta. Za razne izbore ishodišta na osi rotacije dobiva se uvijek isti iznos komponente L_z.

također okomiti. Upotrijebimo sada izraz

$$d\vec{L} = \vec{M} dt \tag{2.70}$$

Promjena kutne količine gibanja $d\vec{L}$ ima smjer vektora $\vec{M}$, a to znači da je okomita na vektor $\vec{L}$. Na pomoćnom su crtežu prikazani zasebno vektori $\vec{L}$ i $d\vec{L}$, te njihov zbroj $\vec{L} + d\vec{L}$ koji predstavlja kutnu količinu gibanja nakon vremenskog intervala dt. Zbog okomitosti promjene $d\vec{L}$ na sam vektor $\vec{L}$, ne mijenja se iznos kutne količine gibanja, nego se samo mijenja njen smjer. Uzastopni vremenski intervali dt dovode do rotacije vektora $\vec{L}$ oko vertikalne osi.

Vidimo, dakle, da pojava momenta sile kod oda-

bira ishodišta u objesištu niti ne vodi u nesuglasje s prethodno utvrđenom činjenicom da je promatrano kružno gibanje tijela jednoliko, tj. da nema obodnog ubrzanja. Dobiveni moment sile mijenja smjer kutnoj količini gibanja, ali ne i njen iznos.

Naglašavanje osi rotacije

Osim dvaju gore razmatranih izbora za ishodište, mogli bismo proizvoljno odabrati i bilo koju drugu točku na vertikalnoj osi konusnog njihala. Rezultat bi uvijek bio sličan onome na slici 2.26c. Vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$ ostaje konstantan po iznosu i rotira oko vertikalne osi. To znači da se njegova projekcija na vertikalnu os ne mijenja tijekom vremena. Također zapažamo da je vektor momenta sile uvijek u ravnini koja je okomita na vertikalnu os. Iz toga slijedi da njegova projekcija na vertikalnu os iščezava.

Postavimo koordinatni sustav $Oxyz$ tako da mu os z bude u smjeru vertikalne osi konusnog njihala. Gornja zapažanja možemo matematički zapisati kao $L_z = konst.$ i $M_z = 0$ tijekom rotacije konusnog njihala. Ove dvije relacije su međusobno konzistentne jer ako moment sile nema komponentu duž osi z, onda se komponenta kutne količine gibanja duž osi z ne može mijenjati. Zaključak slijedi jednostavno iz jednadžbe $d\vec{L} = \vec{M}dt$ koju možemo napisati za komponente duž osi z kao $dL_z = M_z dt$.

Uvjerili smo se da za dani izbor ishodišta na vertikalnoj osi, L_z ima konstantnu vrijednost tijekom rotacije. Usporedimo sada rezultate za različite izbore ishodišta na vertikalnoj osi. Na slici 2.26d prikazan je bočni pogled na rotaciju tijela oko osi z. Kao primjeri ishodišta odabrane su tri točke O, O' i O''. Smjer gibanja tijela je okomit na ravninu crtanja i ulazi u nju. Tako je vektor količine gibanja $\vec{p}$ prikazan simbolom $\otimes$. U ovisnosti o izboru ishodišta, vektor kutne količine gibanja je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{L}' = \vec{r}\,' \times \vec{p}$, odnosno $\vec{L}'' = \vec{r}\,'' \times \vec{p}$. Iznos vektora kutne količine gibanja mijenja se s promjenom ishodišta jer se mijenja udaljenost tijela od ishodišta. Međutim, ujedno se mijenja i smjer vektora kutne količine gibanja. Interesantno je pogledati iznos njegove projekcije na os z

$$L_z = \left|\vec{L}\right| = r\,p \tag{2.71}$$

$$L'_z = \left|\vec{L}'\right| \sin\theta\,' = r\,'p \sin\theta\,' = r\,p \tag{2.72}$$

$$L''_z = \left|\vec{L}''\right| \sin\theta\,'' = r\,''p \sin\theta\,'' = r\,p \tag{2.73}$$

Kao važan rezultat dobili smo da komponenta L_z ne ovisi o izboru ishodišta. Ona ostaje ista kao kada izaberemo točku O za ishodište (slika 2.26d). Zato se možemo osloboditi problema izbora ishodišta i naglasiti samo os rotacije, te izražavati sve kutne veličine u odnosu na tu os

$$L_z = I_z \omega_z \tag{2.74}$$

gdje je ω_z kutna brzina rotacije oko osi z, a $I_z = mr^2$ je moment tromosti za vrtnju tijela oko osi z. Potrebno je naglasiti da se kod izračunavanja momenta tromosti uvijek uzima *okomita* udaljenost tijela od osi rotacije. Također uočimo da moment inercije I nije ni u kom slučaju vektorska veličina, te se stoga I_z ne može smatrati njegovom projekcijom na os z. I_z je naprosto moment tromosti za vrtnju tijela oko osi z.

Napomena: U prikazanom primjeru konusnog njihala tijelo je prikazano u čestičnom modelu, te se smatra da je u cijelosti udaljeno za r od osi rotacije z. U poglavlju 7 obrađivat ćemo rotaciju krutog tijela za koje možemo reći da se sastoji od mnoštva čestica unutar nekog volumena tako da pojedine čestice rotiraju na različitim udaljenostima od osi z.

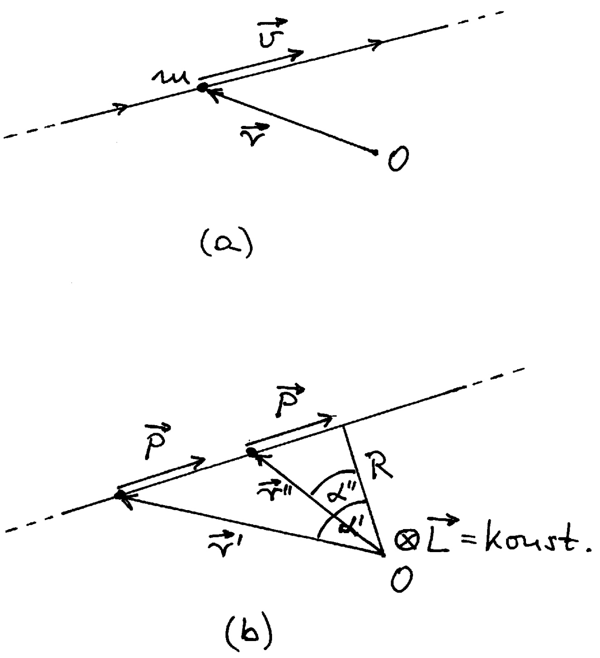
2.5.4 Kutne veličine kod jednolikog gibanja tijela po pravcu

U razmatranju gibanja po pravcu ne bismo isprva rekli da bi kutne varijable mogle biti korisne, kao što je to slučaj kod kružnih gibanja. Tek nas pomisao na to da se dio pravca može smatrati lukom kružnice koja ima beskonačno velik radijus, može navesti da ipak pokušamo primijeniti kutne varijable za opis jednolikog gibanja po pravcu. Slika 2.27a prikazuje tijelo mase m koje se giba stalnom brzinom $\vec{v}$. Ishodište O je proizvoljno izabrano izvan pravca. Budući da na tijelo ne djeluje nikakva sila ($\vec{F} = 0$), to nema niti momenta sile ($\vec{M} = 0$), pa nema niti promjene kutne količine gibanja

$$d\vec{L} = \vec{M}dt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L} = konst. \tag{2.75}$$

Kutna količina gibanja s obzirom na proizvoljno odabrano ishodište ostaje u vremenu konstantna.

Iako smo ovaj rezultat dobili uvjerljivim matematičkim postupkom, čini nam se ipak neobičnim da je za jednoliko gibanje po pravcu kutna količina gibanja konstantna baš kao i za jednoliko kružno gibanje.



Slika 2.27: (a) Tijelo mase m giba se konstantnom brzinom $\vec{v}$. Za promatranje gibanja odabrano je ishodište O. (b) U bilo kojem položaju tijela kutna količina gibanja $\vec{L}$ ostaje konstantna.

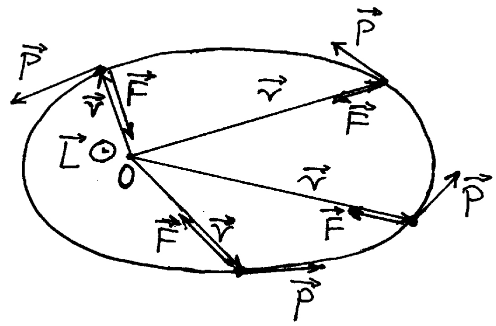
Korisno je uvjeriti se izravno u stalnost kutne količine gibanja putem crteža na slici 2.27b. Tijekom vremena mijenja se vektor položaja tijela $\vec{r}$ s obzirom na ishodište O, dok je vektor količine gibanja konstantan ($\vec{p} = konst.$). Kutnu količinu gibanja računamo prema njenoj definiciji $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Vektor $\vec{r}$ uvijek ostaje u ravnini crtnje na slici 2.27b, a u toj ravnini je i vektor $\vec{p}$, pa je kutna količina gibanja $\vec{L}$ u svakom trenutku okomita na ravninu crtnje i ima smjer ulaska u ravninu (oznaka $\otimes$). Računajući iznos kutne količine gibanja nalazimo

$$\left|\vec{L}\right| = r\,'p\sin\alpha\,' = r\,''p\sin\alpha\,'' = R\,p \qquad (2.76)$$

gdje je R okomita udaljenost ishodišta O od pravca kojim se tijelo giba. Očito je da iznos kutne količine gibanja ostaje konstantan kod jednolikog gibanja tijela po pravcu.

2.5.5 Gibanje tijela pod utjecajem centralne sile

Pod pojmom *centralne sile* podrazumijeva se bilo koja sila na tijelo koja uvijek ima smjer prema nekoj točki. Među centralne sile svakako ubrajamo centripetalnu silu kod gibanja tijela po kružnici. Međutim, u svemiru se javlja i gibanje manjih nebeskih tijela po elipsi oko nekog mnogo većeg tijela, npr. gibanje planeta oko Sunca. Na planet djeluje sila koja uvijek ima smjer prema Suncu (gravitacijska sila), a Sunce se nalazi u jednome od žarišta elipse.



Slika 2.28: Gibanje tijela po elipsi pod utjecajem sile koja uvijek ima smjer prema jednom žarištu. Ishodište O smješteno je u navedeno žarište elipse. Moment sile uvijek iščezava pa je kutna količina gibanja $\vec{L}$ konstantna.

Na slici 2.28 prikazano je gibanje tijela po elipsi. Ishodište O je stavljeno u žarište elipse prema kojoj je uvijek usmjerena sila koja djeluje na tijelo u gibanju. Ova centralna sila mijenja svoj iznos tijekom ophodnje tijela po elipsi, no to nema utjecaja na moment sile oko ishodišta O. Budući da je vektor položaja tijela $\vec{r}$ uvijek na istom pravcu kao i centralna sila, njihov vektorski produkt uvijek iščezava ($\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$), pa imamo

$$d\vec{L} = \vec{M}dt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L} = konst. \quad (2.77)$$

Kod gibanja pod utjecajem centralne sile kutna količina gibanja ostaje konstantna.

Poglavlje 3

PRIRODA SILA

Vidjeli smo u prethodnome poglavlju kako Newtonovi zakoni definiraju silu. Svako djelovanje na neko tijelo, koje može promijeniti njegovu trenutnu količinu gibanja, nazivamo silom. Pri tome nam nije bitna priroda tog djelovanja, nego je dovoljno da postoji učinak u vidu promjene količine gibanja. U primjerima na kojima smo ilustrirali primjenu Newtonovih zakona, sila je ponekad dolazila od djelovanja čovjekovih mišića, ponekad od rada nekog motora, ili od nečeg trećeg. U nekim smo primjerima navodili i postojanje gravitacijske sile. Bilo koja od tih sila mogla je izvoditi iste učinke, bez obzira na njenu prirodu.

U ovome poglavlju želimo razmotriti upravo prirodu sila. Suvremena fizika nalazi da se golemo mnoštvo raznih sila u prirodi može izvesti iz jedne od četiri *osnovne sile*. To su *gravitacijska, elektromagnetska, jaka i slaba* sila. Ovdje ćemo detaljnije razmatrati gravitacijsku silu, a elektromagnetsku samo utoliko da bismo mogli objasniti prirodu nekih *izvedenih sila*. Među njima su nam posebno zanimljive međuatomske sile na kojima se temelji elastična sila i čvrstoća, te sila trenja, tj. sile koje su važne u svakodnevnom životu. U daljnjem razmatranju došli bismo i do međustaničnih i fizioloških sila na kojima se zasniva sila mišića, dakle upravo ona koja je izvorno čovjeku poslužila za stvaranje pojma sile.

3.1 Pregled osnovnih sila prirode

U čovjekovu životu zacijelo se kao najvažnija ukazuje sila njegovih vlastitih mišića koja mu omogućuje da se pokreće, uzima jelo, nosi razne predmete i preuređuje okolinu prema svojim potrebama. Međutim, fizika se ne gradi na subjektivnom shvaćanju važnosti, nego na uspostavi misaone hijerarhije koja ide od jednostavnijeg ka složenijem. Mišići se sastoje od stanica koje su povezane, tj. djeluju jedna na drugu, pa očekujemo neku elementarniju silu na kojoj se temelji djelovanje mišića kao cjeline. Nadalje, stanica je građena od molekula koje su opet međusobno povezane, te očekujemo postojanje još elementarnije sile. Postavlja se pitanje koje je međudjelovanje osnovno, tj. ono koje se ne može izvesti iz nekog još elementarnijeg međudjelovanja.

Slično razmatranje možemo provesti za razne druge sile koje susrećemo u prirodi i opet dolazimo do pitanja o elementarnim međudjelovanjima. Sveobuhvatna analiza svih međudjelovanja, koju su proveli fizičari tijekom stoljeća, pokazala je da postoje četiri vrste međudjelovanja, koje nije moguće svesti na još elementarnije. Ujedno se iz ova četiri međudjelovanja mogu izvesti sva složenija međudjelovanja koja nalazimo u prirodi. Ta četiri međudjelovanja predstavljaju *osnovne sile*, koje ćemo ovdje ukratko opisati.

Gravitacijska sila. Sva tijela pokazuju univerzalno svojstvo uzajamnog privlačenja, bez obzira na njihov kemijski sastav. To je urođeno svojstvo tvari, koje se ne može izvesti iz nekog drugog svojstva, pa gravitacijsku silu s pravom smatramo jednom od osnovnih sila prirode. Kao mjera za intenzitet tog svojstva tijela, definira se njegova *gravitacijska masa*. Dva se tijela uzajamno privlače to većom silom što su im gravitacijske mase veće. Za gravitacijsko privlačenje nije potreban dodir tijela. Ono djeluje na daljinu, no opada s većom udaljenošću među tijelima. O tome će biti govora podrobnije u sljedećem odjeljku 3.2. Ovdje navedimo da gravitacijsko privlačenje postoji i među tijelima koje svakodnevno promatramo pred sobom, ali ono je

po iznosu maleno, pa se ne primjećuje. Samo Zemlja, kao tijelo jako velike gravitacijske mase, privlači zamjetljivo sva tijela na svojoj površini, što je bitno za naš život. Zemlja privlači velikom silom Mjesec, iako je udaljenost među njima velika, zato što je i gravitacijska masa Mjeseca također jako velika. Općenito, učinke gravitacijske sile opažamo u gibanjima svemirskih tijela koja imaju ogromne gravitacijske mase.

Elektromagnetska sila. Fizikalnim promatranjima je ustanovljeno da neke subatomske čestice, kao npr. elektroni i protoni, imaju svojstvo uzajamnog privlačenja, ili odbijanja. Za objašnjenje te pojave bilo je potrebno uvesti novu veličinu koja je nazvana *električni naboj* s time da je postulirano postojanje dviju vrsti naboja, dogovorno nazvanih *pozitivnim i negativnim* nabojem, kojima je svojstvo da se istoimeni naboji odbijaju, a raznoimeni privlače. To vrijedi za naboje u mirovanju, dok se između naboja u gibanju javljaju i magnetske sile, pa se zbirno govori o *elektromagnetskoj sili.* Pozitivno nabijena atomska jezgra privlači negativno nabijene elektrone oko sebe putem elektromagnetske sile. Između jezgre atoma i elektrona postoji i gravitacijska sila, no ona je zanemariva prema elektromagnetskoj sili. Elektromagnetska je sila temelj međudjelovanja atoma i molekula, što ćemo razrađivati u kasnijim odjeljcima 3.3 i 3.4. Za elektromagnetsku silu također tvrdimo da spada u osnovne sile jer postojanje električnog naboja ne možemo izvesti iz nekog drugog svojstva tvari.

Jaka sila. U atomskoj jezgri može biti veći broj protona, dakle čestica s pozitivnim električnim nabojem, a jezgra se ipak ne raspadne, iako se istoimeni naboji odbijaju. Odbojnu električnu silu unutar atomske jezgre nadvladava posebna privlačna sila među protonima i neutronima, koju nazivamo *jakom silom* ili *nuklearnom silom.* Općenitije, jaka sila djeluje među *hadronima* (grč. *hadros - gust, postojan*), česticama koje su neraskidivo složene od kvarkova (npr. proton, neutron, mezoni). Doseg jake sile je jako malen i ne seže izvan dimenzija atomske jezgre. Smatra se da je primarno djelovanje jake sile držanje na okupu *kvarkova* koji sačinjavaju hadrone, a međudjelovanje hadrona je izvedena vanjska posljedica te sile. Postoje druge vrste elementarnih čestica (npr. elektron, neutrino) na koje jaka sila uopće ne djeluje.

Slaba sila. U nuklearnom procesu poznatom pod nazivom *beta raspad* dolazi u radioaktivnoj jezgri atoma do raspada jednog neutrona na proton i elektron, te ispuštanje još jedne elementarne čestice koja se naziva antineutrino. Alternativno se događa da se proton u radioaktivnoj jezgri pretvori u neutron uz ispuštanje jednog antielektrona i neutrina. Ni jaka, ni elektromagnetska sila ne mogu po svojoj prirodi proizvesti takve vrste pretvorbi neutrona u proton, i obrnuto. Stoga je bilo potrebno uvesti jednu dodatnu neovisnu silu, koja je nazvana *slaba sila* jer je nekoliko redova veličine slabija od jake sile. Slaba sila sudjeluje i u procesu fuzije vodika u deuterij i zatim u helij, koji se odvija u zvijezdama. Za razliku od gravitacijske, elektromagnetske i jake sile, slaba sila ne stvara vezana stanja čestica na koje djeluje. Slaba sila djeluje na čestice koje se nazivaju *leptoni* (grč. *leptos - sitan, lagan*), a među njima su najpoznatiji elektron i neutrino. Neutrino je veoma posebna čestica jer nema električnog naboja pa je slaba sila jedina kojom on može međudjelovati s drugom materijom. To je međudjelovanje tako slabo da neutrino može bez sraza proći kroz cijelu zemaljsku kuglu. Tako i kroz naše tijelo prolazi svake sekunde na tisuće neutrina nastalih u nuklearnim reakcijama na Suncu, a da ipak ne nastane nikakvo biološko oštećenje.

Povijesni slijed ujedinjavanja sila

Sve do druge polovice 19. stoljeća smatralo se da električna i magnetska sila imaju zasebne uzroke. No tada je škotski fizičar J. C. Maxwell teorijski osmislio njihovu međuovisnost i ujedinio ih tako da danas govorimo o elektromagnetskoj sili. Ona potječe od električnih naboja u mirovanju (električna sila) ili gibanju (magnetska sila). Budući da su mirovanje i gibanje relativni pojmovi koji ovise o izboru referentnog koordinatnog sustava za promatranje naboja, možemo imati bilo električnu ili magnetsku pojavnost, ili pak oboje, pa je opravdano svaku silu koja dolazi od naboja općenito smatrati elektromagnetskom. Posrednik (medijator) u elektromagnetskoj interakciji je kvant elektromagnetskog polja nazvan *foton.*

Otprilike jedno stoljeće nakon Maxwella, pojavila su se teorijska predviđanja mogućeg ujedinjenja elektromagnetske i slabe sile u *elektroslabu interakciju.* Kao medijatori ove interakcije pojavljuju se W^+ i W^- bozoni, čestice veoma velike mase mi-

rovanja (ekvivalentne energije) koje nose pozitivan, odnosno negativan naboj, te se putem njih u beta raspadima neutron pretvara u proton, ili obrnuto. U nekim se procesima elektroslaba interakcija prenosi putem neutralnog Z bozona koji može predati drugoj čestici količinu gibanja, ali ne može promijeniti njen naboj. Postojanje Z bozona je prvi put utvrđeno indirektnim putem na promjeni količine gibanja ponekih elektrona izloženih struji neutrina (CERN, 1973). Izravno je postojanje W i Z bozona dokazano u sudarima elementarnih čestica ubrzanih akceleratorima do vrlo visokih energija (CERN, 1983). Takvi su ekstremni uvjeti pretpostavljeno vrijedili i u trenucima jako zgusnute materije neposredno nakon velikog praska (engl. Big Bang) u stvaranju svemira. U svim uobičajenim uvjetima svakodnevnog života očituju nam se odvojeno elektromagnetska i slaba sila, koje i dalje smatramo osnovnima.

Teorijski je osmišljeno ujedinjenje elektroslabe i jake sile u okviru tzv. *standardnog modela*, koji je dobio snažnu potvrdu eksperimentalnim dokazima o postojanju kvarkova. S današnjim stanjem spoznaje, ostaju neke nekonzistentnosti u ujedinjenju ovih sila s gravitacijskom silom.

Valja još napomenuti da se jaka i slaba sila manifestiraju isključivo u subatomskim sustavima za koje ne vrijedi klasična nego kvantna fizika. Stoga i pojam sile u tim procesima ne odgovara onome koji je postavljen Newtonovom definicijom i njegovim zakonima. U ovoj se knjizi ne ćemo baviti tim pitanjima.

3.2 Gravitacijska sila

Ljudi se svakodnevno susreću s težinom tijela i pojavom da tijela padaju ako ih se ispusti s neke visine. Većina ljudi će reći da je uzrok tome privlačenje Zemlje. No, radi se o naučenoj tvrdnji, ponavljanoj puno puta tijekom školovanja, a ne o spoznaji koja bi proistekla iz samoga životnog iskustva. Na pitanje privlače li se uzajamno dvije čaše postavljene na stol, odgovor većine ljudi ne bi bio jako pouzdan. Ovdje ćemo razmotriti gravitacijsku silu kao opće svojstvo tvari i utvrditi njeno ponašanje na daljinu.

3.2.1 Newtonov opći zakon gravitacije

Shvaćanje da Zemlja privlači tijela nije nastalo u pradavna vremena kao izraz čovjekova doživljavanja prirode. Ni ljudi skloni duboku razmišljanju, kao što je bio Aristotel, nisu pridavali Zemlji takvo svojstvo. On je smatrao da je padanje kamena uzrokovano svojstvom koje se nalazi u samome kamenu, a ne nekim djelovanjem Zemlje, koja je tu samo kao središte Svijeta (vidi poglavlje 2). Što se pak tiče nebeskih tijela, ona su po Aristotelovu mišljenju posjedovala drugačija svojstva od zemaljskih tijela, pa su i njihova gibanja bila drugačija, ali su se odvijala samostalno, bez utjecaja Zemlje.

Niti Galileo Galilei, koji je u prvoj polovici 17. stoljeća intenzivno proučavao slobodan pad i gibanje kuglica niz kosinu, nije dovodio u pitanje Aristotelov nauk po kojemu se tijela sama od sebe gibaju prema središtu Zemlje, ukoliko nisu u takvu gibanju zapriječena.

U pogledu gibanja nebeskih tijela, Galilei je bio strastveni pobornik Kopernikova heliocentričnog sustava. Pritom ga je više zanimao opis gibanja nebeskih tijela, dok je pitanje o uzrocima tih gibanja ostavljao za neka kasnija vremena. U jednom od svojih djela napisao je da nam načela po kojima se odvijaju ova gibanja nisu poznata, no potom je ustvrdio da nam to i nije tako važno kao proučavanje učinka tih načela, tj. pravilnosti samih gibanja.

Galileijev suvremenik Johannes Kepler stekao je posebne zasluge za otkriće pravilnosti u gibanjima planeta i formulirao ih putem triju zakona o kojima će biti detaljnije riječi u poglavlju 10. Pored egzaktnog istraživanja, Kepler se upuštao u razmišljanja o mogućem uzroku gibanja planeta oko Sunca, te je pripisivao Suncu neku privlačnu moć poput one koju imaju magneti. Iako je njegovo objašnjenje bilo pogrešno, ostala je ideja da bi ipak od Sunca moglo dolaziti neko djelovanje na planete i uzrokovati njihovo gibanje.

Do pravoga rješenja o uzrocima nebeskih gibanja nije se moglo doći prije nego što je ispravno postavljena cijela mehanika, kako zemaljskih tako i nebeskih gibanja. Isaac Newton je u drugoj polovici 17. stoljeća izvršio preobrazbu fizike time što je definirao silu kao djelovanje koje može promijeniti brzinu tijela (poglavlje 2). Slijedom takve definicije sile, a svjestan činjenice da svako tijelo pri slobodnom padanju mijenja (povećava) svoju brzinu, Newton je,

da bi ostao dosljedan svojim zakonima mehanike, morao ustvrditi da tijekom slobodnog pada djeluje na tijelo neka sila, iako se tijelo u padanju ne dodiruje ni sa kojim drugim tijelom. Tako je ispravnim postavljanjem mehanike omogućen prvi korak u rješavanju problema slobodnog pada. Utvrđeno je da uzrok slobodnome padu mora ležati u djelovanju neke sile na tijelo, no bilo je potrebno još razjasniti koja bi mogla biti priroda te sile. Što se pak tiče kružnog gibanja planeta oko Sunca, ili Mjeseca oko Zemlje, Newtonova je mehanika ukazivala na potrebu postojanja neke sile koja bi mogla igrati ulogu centripetalne sile. Newtonu se također postavljalo pitanje prirode tih sila.

Prema nekim zapisima,[1] ideja za cjelovito rješenje zemaljske i nebeske mehanike sinula je Newtonu jednom prilikom dok je sjedio u vrtu i razmišljao o neriješenim problemima. U jednom je trenutku opazio pad jabuke sa stabla i pomislio kako bi se moglo raditi o privlačnom djelovanju Zemlje koje bi se moglo protezati sve do Mjeseca, te uzrokovati njegovo kruženje oko Zemlje. Trenutak u kojemu može nastati ideja u čovjekovu umu je nepredvidiv i nije nužno povezan s okolnim zbivanjima. U svakom slučaju, Newton je došao na zamisao kako se uzroci slobodnog pada raznih tijela na Zemlji i kružnog gibanja raznih nebeskih tijela mogu objediniti ako se pretpostavi postojanje privlačne sile između svih tijela. To je temelj Newtonova općeg zakona gravitacije.

Newton se nije zadovoljavao samo idejama, nego je nastojao obraditi ih strogim znanstvenim metodama. Tako je iskoristio već ranije eksperimentalno utvrđeni treći Keplerov zakon kako bi ustanovio na koji način privlačna sila opada s udaljenošću od Sunca. Račun je vrlo jednostavan ako se putanje planeta aproksimiraju s kružnicama. Treći Keplerov zakon utvrđuje da se kvadrati vremena ophodnje planeta odnose kao kubusi njihovih udaljenosti oko Sunca

$$T_1^2 : T_2^2 : \cdots : T_i^2 : \cdots = r_1^3 : r_2^3 : \cdots : r_i^3 : \cdots \quad (3.1)$$

gdje se indeks i odnosi na redni broj planeta. Ovo je uistinu čudesna pravilnost jer vrijedi za sve planete u Sunčevu sustavu (Kepler ju je nazvao *harmonija Svijeta*), pa se moglo očekivati da postoji neki jedinstveni princip koji ravna svim tim gibanjima. Gornje odnose možemo napisati i na drukčiji način

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \cdots = \frac{T_i^2}{r_i^3} = \cdots = K \quad \Longrightarrow \quad T^2 = Kr^3 \qquad (3.2)$$

gdje je K neka konstanta koja je ista za sve planete, pa u izvedenoj relaciji možemo izostaviti indeks i.

Newton je bio uvjeren da principi mehanike moraju vrijediti i za gibanja nebeskih tijela, a to znači da se i na njih može primijeniti izraz za centripetalnu silu $\vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r}$ koja prisiljava tijelo mase m da se giba po kružnici radijusa r. Kutnu brzinu možemo izraziti kao $\omega = 2\pi/T$ jer tijelo obiđe puni kut 2π u vremenu T. Ako se to primijeni na gibanje planeta oko Sunca, dobivamo za iznos centripetalne sile

$$F_c = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m\,\frac{4\pi^2}{Kr^3}\,r \;\propto\; \frac{1}{r^2} \qquad (3.3)$$

Dakle, slijedom Newtonove mehanike i eksperimentalno utvrđenog Keplerova zakona, dobiven je univerzalan rezultat. Sila kojom Sunce privlači planete i prisiljava ih na kružno gibanje opada s kvadratom udaljenosti planeta od Sunca. To svojstvo privlačne sile Sunca predstavlja uzrok čudesne pravilnosti iz trećeg Keplerova zakona.[2]

Pored ovisnosti o radijusu, jednadžba (3.3) pokazuje da je za tijelo veće mase m potrebna i veća centripetalna sila, kako bi ga mogla prisiljavati da se giba po kružnici danom kutnom brzinom. To nam je poznato i iz vlastitog iskustva kada pomoću konopca u ruci vrtimo u krug tijela različitih masa, pa osjećamo veću zategnutost konopca kada je masa tijela veća. Newton je zaključio da sila kojom Sunce privlači planet mora biti veća za planet veće mase jer jedino tako može odigrati ulogu potrebne centripetalne sile. Dovoljno je bilo još uočiti da zbog simetrije mora postojati i ovisnost privlačne sile o

[1] Newtonov suvremenik Stukeley je zapisao svoj razgovor s Newtonom u kojemu se veliki znanstvenik prisjećao trenutka i okolnosti nastanka ideje o općoj gravitaciji. Sličnu je priču zapisao i Voltaire prema kazivanju Newtonove nećakinje.

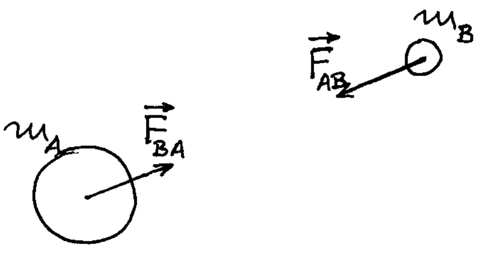
[2] Kepler je u svojim slobodnijim razmišljanjima iznosio pretpostavku da sila koja se širi od Sunca opada linearno s udaljenošću. Nešto kasnije, francuski astronom Bouilleaud i talijanski astronom Borelli zastupali su mišljenje da ta sila opada s kvadratom udaljenosti jer se prenosi od jedne sferne plohe na drugu. Istu je pretpostavku iznosio u Newtonovo doba i engleski fizičar Robert Hooke, no bez ozbiljnijih dokaza. Utemeljene dokaze pružio je tek Newton.

masi Sunca. Poopćivši ovaj zaključak na slučaj bilo koja dva tijela A i B, Newton je utvrdio postojanje privlačne sile u iznosu

$$F = G\,\frac{m_A\,m_B}{r^2} \tag{3.4}$$

gdje je G neka konstanta koju treba odrediti eksperimentalno. Ova jednadžba izražava *Newtonov opći zakon gravitacije*. Privlačna sila djeluje na svako od dvaju tijela, tj. tijelo A privlači tijelo B, a jednakom silom, ali suprotnoga smjera, tijelo B privlači tijelo A. Obje sile djeluju na spojnici dvaju tijela. Slika 3.1 prikazuje privlačne sile u slučaju dvaju sfernih tijela.

Veličina r u jednadžbi (3.4) predstavlja međusobnu udaljenost tih tijela u slučaju kada ih možemo smatrati česticama, tj. kada su njihove dimenzije zanemarive prema međusobnoj udaljenosti. U drugim realnim slučajevima, moramo smatrati da svaka čestica jednog tijela djeluje na svaku česticu drugoga, te moramo naći ukupnu silu privlačenja. U sljedećem ćemo pododjeljku pokazati da kod homogenih sfernih tijela možemo smatrati kao da im je sva masa koncentrirana u središtu, pa se za r uzima udaljenost među njihovim središtima. U tom su duhu prikazane sile na slici 3.1 tako da im se hvatišta nalaze u odgovarajućim središtima kugli, tj. kao da se u tim točkama nalaze čestice s ukupnim masama m_A i m_B.



Slika 3.1: Gravitacijske sile između dvaju sfernih tijela A i B koja imaju homogene raspodjele mase, pa se hvatišta sila nalaze u središtima tijela.

Provjera s gibanjem Mjeseca

Newton je htio kvantitativno provjeriti svoju zamisao prema kojoj bi isti zakon gravitacije vrijedio za privlačenje tijela na površini Zemlje kao i među nebeskim tijelima. Njemu nije bila poznata vrijednost gravitacijske konstante G u jednadžbi (3.4), kao ni masa Zemlje. No, u njegovo je doba iz astronomskih mjerenja bilo poznato da je udaljenost od Zemlje do Mjeseca oko 60 puta veća od samoga radijusa Zemlje. Ako vrijedi opći zakon gravitacije, morala bi se privlačna sila Zemlje smanjiti za oko 3600 puta kada se od površine Zemlje udaljimo na oko 60 njenih radijusa.

Primijenjujući drugi Newtonov zakon gibanja ($\vec{a} = \vec{F}/m$) za bilo koje tijelo mase m, nalazimo da njegova akceleracija također mora biti 3600 puta manja ako je tijelo izloženo isto toliko puta manjoj sili. Za slobodan pad bilo kojeg tijela pri površini Zemlje imamo eksperimentalnu vrijednost od 9,81 ms^{-2}, što znači da bi na udaljenosti od 60 radijusa Zemlje tijelo moralo imati malenu akceleraciju $a = 0,00273\mathrm{ms}^{-2}$, ukoliko ga pustimo da slobodno pada prema Zemlji. To vrijedi za svako tijelo, pa i za Mjesec koji se upravo nalazi na navedenoj udaljenosti.

No, Mjesec ima toliku tangencijalnu brzinu da izračunata akceleracija predstavlja upravo centripetalnu akceleraciju kod njegova kružnog gibanja oko Zemlje. Zato on ostaje na stalnoj udaljenosti od Zemlje, a centripetalna akceleracija se može shvatiti kao njegovo trenutno padanje prema Zemlji u odnosu na tangentu po kojoj bi se Mjesec gibao kada te akceleracije ne bi bilo.

Newton je lako izračunao centripetalnu akceleraciju Mjeseca $a_c = \omega^2 r = (2\pi/T)^2\,r$ uzevši da je vrijeme njegove ophodnje oko Zemlje $T = 27,3$ dana, te radijus kružne putanje $r = 380000\mathrm{km}$, prema tadašnjim astronomskim mjerenjima. Dobio je rezultat $a_c = 0,00269\mathrm{ms}^{-2}$, što je bilo približno u skladu s predviđanjem iz općeg zakona gravitacije. Bio je to ohrabrujući rezultat za potvrdu cijele teorije opće gravitacije, no Newton se nije žurio s njegovim objavljivanjem jer je izveden uz pretpostavku kružnog gibanja, a znao je da su, prema prvome Keplerovu zakonu, točnije putanje planeta zapravo elipse. Uz to je trebao dokazati da Zemlja privlači druga tijela kao da joj je cjelokupna masa koncentrirana u središtu, pa je za tijelo na njenoj površini bilo ispravno uzimati kao da je udaljeno od Zemlje za iznos njena radijusa, što je prilično velika udaljenost.

Newton je kasnije matematički dokazao da sila koja opada s kvadratom udaljenosti može uzroko-

vati gibanje tijela po elipsi. Također je matematički dokazao da za tijela oblika kugle možemo uzimati kao da im se čitava masa nalazi u središtu kugle. Cjelokupnu teoriju opće gravitacije i na njoj provedene složene račune objavio je tek nakon 20 godina istraživanja u svojoj monumentalnoj knjizi Principia, gdje su objavljena i njegova tri zakona gibanja (vidi poglavlje 2).

Gravitacijska masa

Jednadžba (3.3) počiva na drugom Newtonovu zakonu ($\vec{F}_c = m\vec{a}_c$), gdje masa m predstavlja mjeru tromosti tijela, tj. svojstva po kojem se tijelo opire promjeni trenutne brzine. Što je troma masa tijela veća, potrebna je i veća centripetalna sila da bi ga prisiljavala na kružno gibanje. Za primjenu drugoga Newtonova zakona nije važno koji to čimbenik uzrokuje centripetalnu silu. U njemu ne nalazimo nikakvu naznaku svojstva privlačenja tijela, nego samo svojstvo tromosti tijela.

Tek Newtonov zakon gravitacije unosi svojstvo privlačenja tijela, no ujedno zapažamo da on ništa ne govori o svojstvu tromosti tijela. Mase koje se pojavljuju u Newtonovu općem zakonu gravitacije predstavljaju jedno novo svojstvo materije koje se bitno razlikuje od svojstva tromosti. Radi se o svojstvu privlačenja drugih tijela za koje je Newton ustvrdio da predstavlja opće svojstvo svakog tijela. Kada se u fizici uvodi neko novo svojstvo, nameće se i potreba uvođenja fizikalne veličine kojom bi se izražavao intenzitet tog novog svojstva. Kao mjeru sposobnosti tijela da privlači sva druga tijela, Newton je postavio veličinu koju je nazvao *gravitacijska masa*:

> *Gravitacijska masa tijela je mjera njegova svojstva da privlači sva druga tijela.*

Newton je naglašavao da tromost i privlačenje predstavljaju dva različita svojstva tijela, no ujedno je uočio da se kod svih tijela oba svojstva pojavljuju u uzajamnoj proporcionalnosti, tj. tijelo koje pokazuje npr. dvostruko veću tromost, ujedno privlači druga tijela dvostruko jače. Nije bilo nužno upotrijebiti izraz "masa" za veličine koje se odnose na oba svojstva, no zbog uočene proporcionalnosti kod sviju tijela, to se pokazalo praktičnim.

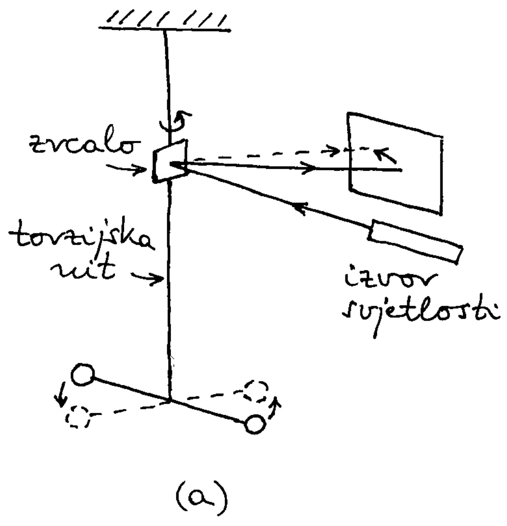
O odabiru jedinice za tromu masu (1 kg) govorili smo u prethodnom poglavlju 2. U načelu bi bilo moguće odabrati neku drugu jedinicu za gravitacijsku masu, no zbog uočene proporcionalnosti trome i gravitacijske mase kod sviju tijela, praktično je odabrati istu jedinicu (1 kg) i za gravitacijsku masu. Dakle, uteg načinjen od legure platine i iridija, koji se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sévresu pokraj Pariza, ima ne samo tromu masu od 1 kg, nego mu se po definiciji pripisuje i gravitacijska masa od 1 kg.

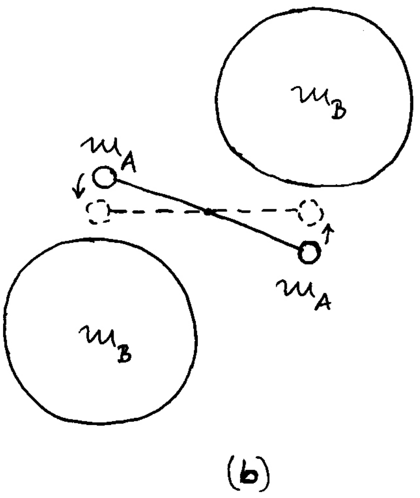
Još je Newton eksperimentalno ispitivao jednakost trome i gravitacijske mase, a kasnije su to s većom točnošću izvodili i drugi fizičari. O tome će biti detaljnije riječi u kasnijem pododjeljku.

Određivanje gravitacijske konstante

Numerička vrijednost gravitacijske konstante G ostala je nepoznata cijelo stoljeće nakon što je Newton objavio opći zakon gravitacije. Tek krajem 18. stoljeća izveo je engleski fizičar Henry Cavendish mjerenja pomoću torzijske vage (lat. *torquere - okretati, uvijati*), kako prikazuje slika 3.2. Na tanku nit obješena je prečka s dvije jednake kuglice na krajevima. Na postolju (nije prikazano na slici 3.2) se nalaze ležišta u koja se mogu smjestiti dvije jednake velike kugle. Rotiranjem postolja mogu se velike kugle približiti malima. Između velike i male kugle dolazi do privlačenja prema Newtonovu općem zakonu gravitacije. Tako nastaje par sila koji zakreće prečku s malim kuglicama, a time ujedno uvija nit. Zbog svoje elastičnosti, nit se opire uvijanju (detaljnije će o torzijskoj elastičnosti biti riječi u odjeljku 3.3), te se uspostavi ravnoteža na nekom kutu zakreta niti. Da bi se taj kut mogao točno izmjeriti, postavljeno je maleno zrcalo na samu nit. Zraka svjetlosti iz obližnjeg izvora reflektira se na tom zrcalu i pada na baždarenu skalu. Svako uvijanje niti dovodi do zakretanja zrcala, što se vrlo lako uočava u pomaku svijetle točke na skali.

Prethodno je potrebno baždariti torzijsku vagu tako da se odredi modul torzije niti iz mjerenja perioda torzijskih oscilacija (oscilacije ćemo razmatrati u poglavlju 8). Time postaje poznata ovisnost kuta zakreta niti o iznosu sila koje na krajevima prečke uzrokuju zakretanje. S utvrđenom silom, te poznatim masama i izmjerenoj udaljenosti među središtima velike i male kugle, može se iz jednadžbe (3.4) odrediti gravitacijska konstanta. Cavendish je dobio iznos od oko 10^{-10} Nm^{2}kg^{-2}. Kasnije su fizičari usavršili mjernu metodu i postigli točnija





Slika 3.2: (a) Bočni pogled na torzijsku nit na kojoj je obješena prečka s dvije jednake kuglice. Zakretanje prečke može se pratiti pomoću svjetlosnog snopa koji se reflektira na malenom zrcalu pričvršćenom za nit. (b) Prikaz odozgo u kojem se vide i velike kugle. Torzijska nit je ovdje okomita na ravninu crtnje i prolazi sredinom prečke koja nosi male kugle.

mjerenja koja daju

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \tag{3.5}$$

Vidimo da je Cavendish uspio točno odrediti ne samo red veličine gravitacijske konstante, što bi za prvo povijesno određivanje tako malene veličine predstavljalo već značajan uspjeh, nego je čak dobio rezultat koji se nalazi unutar faktora 2 od prave vrijednosti.

Nakon spoznaje o izuzetno malenoj vrijednosti gravitacijske konstante, možemo shvatiti zašto se značajnija privlačna sila osjeća samo između onih tijela od kojih barem jedno ima jako veliku masu. To je upravo slučaj privlačenja između Zemlje i nekog tijela na njenoj površini.

Određivanje mase Zemlje

Masa Zemlje nije bila poznata u Newtonovo vrijeme. Kao što smo gore vidjeli, u svojim je računima pribjegavao upotrebi omjera u kojima mu ona nije bila potrebna. Tek nakon što je utvrđen iznos gravitacijske konstante G, postalo je moguće odrediti masu Zemlje m_Z. Zato se svako kasnije određivanje gravitacijske konstante, koje su izvodili fizičari tijekom stoljeća, nazivalo "vaganje Zemlje", iako nije po srijedi nikakva vaga za Zemlju.

Znamo da se slobodan pad bilo kojeg tijela mase m odvija po drugom Newtonovu zakonu akceleracijom $g = F_g/m$ a eksperimentalno je utvrđeno da je $g = 9,81\mathrm{ms^{-2}}$. F_g je sila kojom Zemlja privlači to tijelo, pa primjenom Newtonova zakona opće gravitacije dobivamo

$$g = \frac{F_g}{m} = G\,\frac{m_Z}{r_Z^2} \quad\Longrightarrow\quad m_Z = \frac{g\,r_Z^2}{G} \tag{3.6}$$

Radijus Zemlje je bio određivan još u antičko doba iz mjerenja njene zakrivljenosti na površini, a kasnija su mjerenja bivala sve točnija. Uvrštavanjem $r_Z = 6370$ km, jednadžba (3.6) daje vrijednost $m_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Uočimo koliko je velika ova masa u usporedbi s bilo kojim tijelom koje možemo susresti u svakodnevnom životu. Upravo zbog tako velike mase Zemlje, njena privlačna sila prema svim tijelima na njenoj površini ima vidljive učinke.

Radi usporedbe, dvije čaše koje imaju mase od npr. 0,1 kg postavljene na stol na međusobnoj udaljenosti od npr. 20 cm privlače se gravitacijskom silom koju lako izračunamo primjenom jednadžbe (3.4) $F = 1,7 \cdot 10^{-11}$N, što je toliko maleno da u praksi ne proizvodi vidljive učinke.

3.2.2 Gravitacijsko polje

Usredotočimo pažnju na jedno tijelo mase m, koje smatramo nepomičnim, te na drugo tijelo mase m_0,

koje možemo po volji postavljati na razna mjesta u okolini prvoga tijela i utvrđivati gravitacijsku silu kojom ga prvo tijelo privlači. Nazovimo ovo drugo tijelo *probnim*. Slika 3.3a prikazuje jedan mogući položaj probnog tijela u odnosu prema prvome tijelu. Oba su tijela prikazana u čestičnom modelu. Radi matematičke jednostavnosti postavili smo ishodište u točku gdje se nalazi prvo tijelo, tako da vrh vektora $\vec{r}$ određuje položaj probnog tijela. Silu koja djeluje na probno tijelo možemo izraziti na dva načina

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,m_0}{r^2}\,\hat{r} = m_0\,\vec{g}(\vec{r}) \tag{3.7}$$

Prvi je način onaj iz Newtonova općeg zakona gravitacije. U njemu nalazimo jedinični vektor $\hat{r}$ koji je usmjeren prema probnom tijelu, kako prikazuje slika 3.3a. Predznak minus u jednadžbi (3.7) ukazuje na to da je $\vec{F}$ privlačna sila koja ima suprotan smjer od $\hat{r}$. U drugoj smo jednakosti istu tu silu formalno izrazili umnoškom mase probnog tijela i vektora $\vec{g}$. Vektor $\vec{g}$ je veličina koja ovisi samo o masi prvoga tijela i udaljenosti od njega. Slika 3.3b prikazuje opet ista dva tijela, te vektore $\vec{g}$ i $\vec{F}$.

Gornjim smo razmatranjem uveli pojam *gravitacijskog polja* koje nastaje oko promatranog tijela

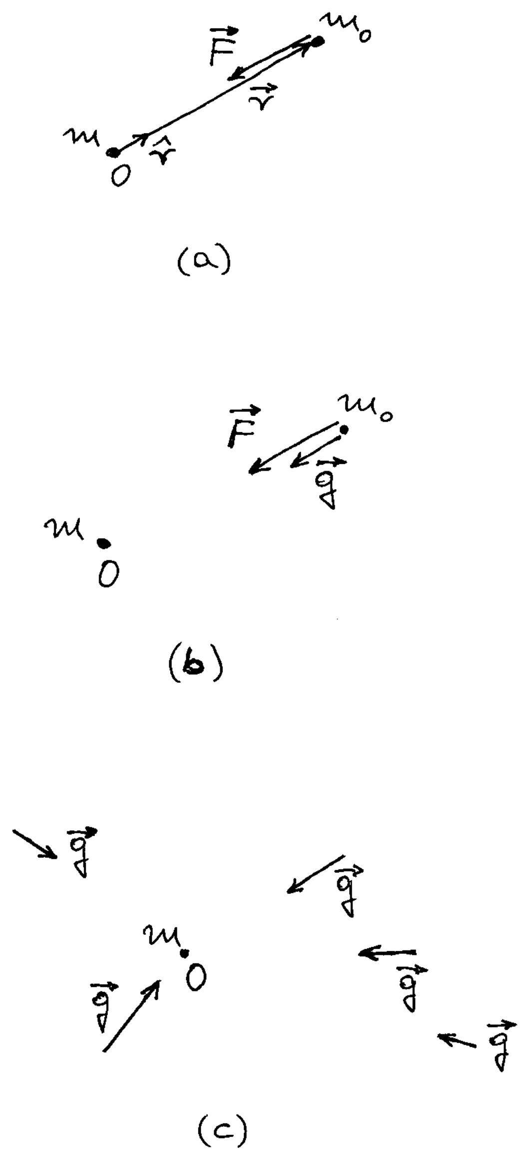
$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\,\frac{m}{r^2}\,\hat{r} \tag{3.8}$$

Vektor $\vec{r}$ je slobodna varijabla jer možemo po volji odabrati bilo koju točku u prostoru oko promatranog tijela. Smisao funkcije $\vec{g}(\vec{r})$ je u tome da se vektor $\vec{g}$ mijenja od točke do točke u prostoru. Slika 3.3c prikazuje vektore gravitacijskog polja u nekim proizvoljno odabranim točkama u okolini promatranog tijela. Uočimo da ti vektori uvijek imaju smjer prema zadanome tijelu, a iznos im opada s kvadratom udaljenosti od tog tijela.

U ovome načinu razmišljanja, mogli bismo reći da gravitacijsko privlačenje dvaju tijela nastaje tako što jedno tijelo stvori gravitacijsko polje u prostoru oko sebe, a to gravitacijsko polje onda djeluje na drugo tijelo. Kod izračunavanja sile valja uzeti vrijednost gravitacijskog polja upravo u onoj točki gdje se nalazi drugo tijelo. To je smisao jednadžbe (3.7).

Razumije se, gravitacijsko privlačenje dvaju tijela je uzajamno, pa možemo također reći da i drugo tijelo stvara svoje gravitacijsko polje, koje pak djeluje na prvo tijelo, te tako nastaje privlačna sila na njega. Uzajamne privlačne sile dvaju tijela predstavljaju par sila iz trećega Newtonova zakona.

Napomena: Gravitacijsko polje jednog tijela djeluje na drugo tijelo, ali ne djeluje na ono tijelo koje ga je stvorilo. Razlog tome je onaj isti zbog kojega tijelo ne može privlačiti samo sebe.



Slika 3.3: (a) Tijelo mase m djeluje gravitacijskom silom $\vec{F}$ na probno tijelo mase m_0. (b) Tijelo mase m stvara vektorsku veličinu $\vec{g}$ na mjestu probnog tijela. (c) Vektori gravitacijskog polja u nekim proizvoljno odabranim točkama oko tijela mase m.

Pretpostavimo da imamo neko tijelo mase m i želimo eksperimentalno ustanoviti koliko je gravitacijsko polje u nekoj točki okolnog prostora. U tu svrhu dovedemo neko probno tijelo mase m_0 u tu točku i izmjerimo silu $\vec{F}$ koja na njega djeluje dok se nalazi u toj točki, te izračunamo $\vec{g} = \vec{F}/m_0$. To je tražena vrijednost gravitacijskog polja u odabranoj točki okolnog prostora.

Gravitacijsko polje smo uveli na formalan matematički način, pa se možemo s pravom pitati ima li ono neko fizikalno značenje. Ovo pitanje nije tako jednostavno kako se može činiti na prvi pogled i na njega ćemo se vratiti u poglavlju 11. Za sada ostanimo na formalizmu koji će nam se pokazati korisnim u daljnjem razmatranju.

Gaussov zakon za gravitacijsko polje

Matematički oblik gravitacijskog polja može nas dovesti do jednog važnog rezultata. Na slici 3.4a prikazano je promatrano tijelo mase m i zamišljena malena površina koja predstavlja dio zamišljene sferne plohe radijusa r oko tijela. Iz sferne geometrije poznat je izraz koji povezuje iznos dijela sferne plohe Δa s radijusom r i prostornim kutom $\Delta\Omega$ koji ta ploha zatvara

$$\Delta a = r^2 \Delta\Omega \tag{3.9}$$

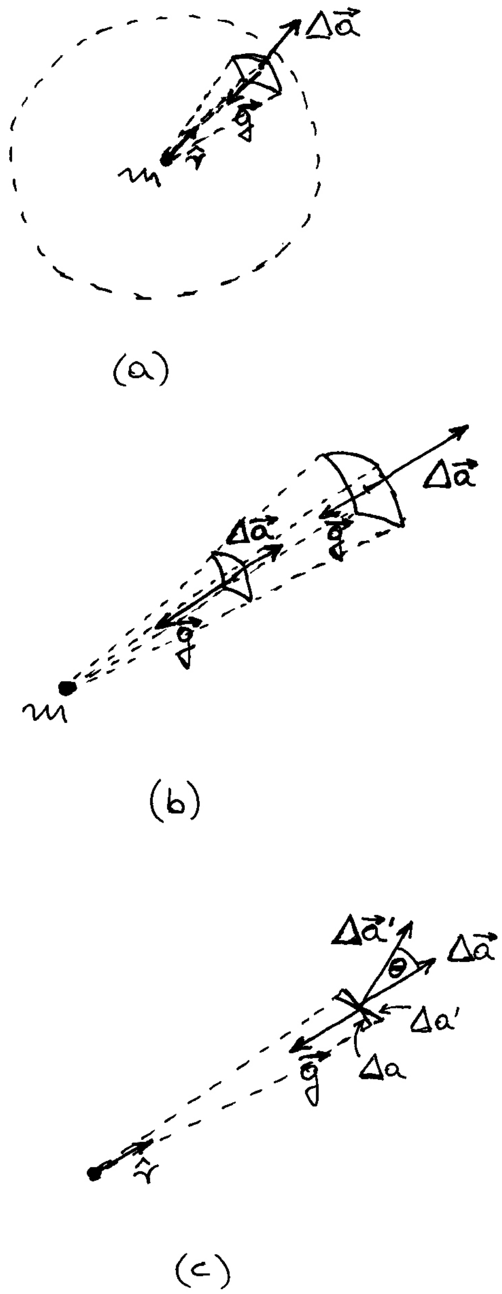
Napomena: Jednadžba (3.9) može se primijeniti i na cijelu sfernu plohu, a ne samo na njen dio. Cijela sferna ploha zatvara puni prostorni kut $\Omega = 4\pi$, pa se dobiva $a = 4\pi r^2$, što je poznata vrijednost za površinu kugle.

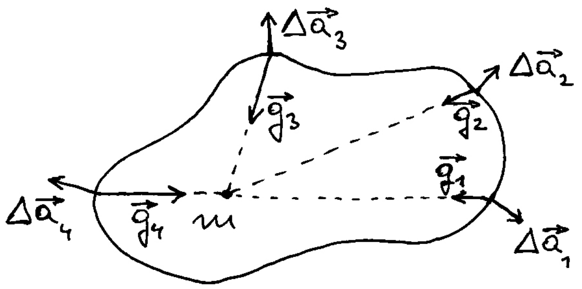
Matematički je zgodno svakoj ravnoj površini pripisati jedan vektor kojemu je iznos jednak iznosu površine, a smjer mu je okomit na tu površinu. Ako uzmemo maleni dio sferne površine, možemo smatrati da je ona gotovo ravna, te joj pripisujemo vektor $\Delta\vec{a}$ kao na slici 3.4a. Sada možemo izračunati skalarni produkt dvaju vektora

$$\vec{g} \cdot \Delta\vec{a} = -G\,\frac{m}{r^2}\,\hat{r} \cdot \Delta\vec{a} = -G\,m\,\Delta\Omega \tag{3.10}$$

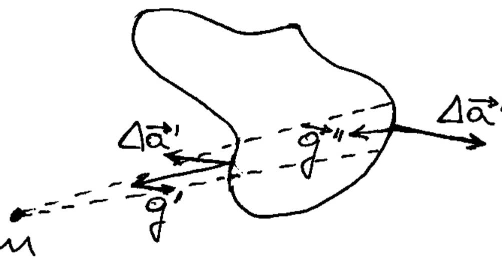
gdje smo uvažili jednadžbe (3.8) i (3.9), te činjenicu da su vektori $\hat{r}$ i $\Delta\vec{a}$ paralelni, pa je $\hat{r} \cdot \Delta\vec{a} = \Delta a$ prema pravilu skalarnog množenja vektora (vidi odjeljak 1.5).

Rezultat koji smo dobili na desnoj strani jednadžbe (3.10) ne ovisi o radijusu r. To znači da smo mogli uzeti dio sferne plohe na bilo kojoj udaljenosti od promatranog tijela, te dobiti isti rezultat uz uvjet da odabrane plohe zatvaraju uvijek isti prostorni kut $\Delta\Omega$. Ova tvrdnja postaje jasnija kada se zorno predoči na slici 3.4b. Uz isti prostorni kut $\Delta\Omega$, iznos vektora površine $\Delta\vec{a}$ raste s r^2 sukladno jednadžbi (3.9). No, gravitacijsko polje $\vec{g}(\vec{r})$ opada s r^2 prema jednadžbi (3.8), tako da skalarni produkt ostaje neizmijenjen.





(d)



(e)

Slika 3.4: (a) Na zamršenoj sfernoj plohi oko tijela mase m ucrtan je jedan njen maleni dio predstavljen vektorom Δa. Prikazan je i vektor gravitacijskog polja na mjestu ucrtane malene površine. (b) Dijelovi sfernih površina koje razapinju isti prostorni kut $\Delta\Omega$. (c) Bočni pogled na površine koje razapinju isti prostorni kut $\Delta\Omega$ s time da su nagnute jedna prema drugoj za kut θ. (d) Presjek zatvorene plohe proizvoljnog oblika. Dijelovima plohe na nekoliko mjesta pripadaju vektori $\Delta\vec{a}_i$, a gravitacijsko polje na tim mjestima predstavljaju vektori $\vec{g}_i$. (e) Tijelo mase m nalazi se izvan zatvorene plohe.

Napomena: Važno je uočiti da kod svakog odabira površine $\Delta\vec{a}$, uzimamo gravitacijsko polje $\vec{g}(\vec{r})$ na istome mjestu gdje se nalazi i ta površina, a ne negdje drugdje. Ti su parovi vektora prikazani na slici 3.4b.

Moramo razmotriti još jednu varijaciju. Na slici 3.4c prikazana je u presjeku jedna površina čiji je vektor $\Delta\vec{a}$ usmjeren duž jediničnog vektora $\hat{r}$, te još jedna površina čiji je vektor $\Delta\vec{a}\,'$ otklonjen za neki kut θ. Površine su odabrane tako da obje zatvaraju isti prostorni kut $\Delta\Omega$. Iz slike 3.4c je jasno da malenu površinu $\Delta a'$ možemo projicirati na površinu Δa. Uz uvjet da je prostorni kut $\Delta\Omega$ malen, možemo pisati $\Delta a' \cos\theta = \Delta a$ (pogreška postaje zanemariva kada uzmemo dovoljno malen prostorni kut), pa slijedi

$$\vec{g}\cdot\Delta\vec{a}' = |\vec{g}|\,\left|\Delta\vec{a}\,'\right|\cos\theta = |\vec{g}|\,|\Delta\vec{a}| = \vec{g}\cdot\Delta\vec{a} \quad (3.11)$$

Pritom smo uvažili da se obje površine nalaze na istome mjestu, pa upotrebljavamo jedno te isto gravitacijsko polje $\vec{g}$ u svim produktima. Ovaj nam rezultat pokazuje da skalarni produkt vektora površine i gravitacijskog polja ne ovisi o orijentaciji plohe. Važan je samo prostorni kut $\Delta\Omega$ koji ploha zatvara.

S ovim spoznajama možemo otići korak dalje i razmotriti neku zamišljenu zatvorenu plohu oko promatranog tijela mase m. Na slici 3.4d prikazan je presjek proizvoljno odabrane zatvorene plohe. Možemo zamisliti da se ona sastoji od mnoštva malenih površina $\Delta\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, ...)$, od kojih su neke prikazane na slici 3.4d. Uz njih su prikazani vektori $\vec{g}_i$ koji predstavljaju vrijednosti gravitacijskog polja na mjestima gdje se nalaze pojedine malene površine. Možemo primijeniti gornja pravila i odrediti skalarni produkt vektora $\vec{g}_i \cdot \Delta\vec{a}_i = -G\,m\,\Delta\Omega_i$. Ako to učinimo sa svim malenim površinama koje čine cjelokupnu zatvorenu plohu dobivamo

$$\sum_i \vec{g}_i \cdot \Delta\vec{a}_i = -G\,m \sum_i \Delta\Omega_i = -4\pi G\,m \quad (3.12)$$

gdje smo iskoristili jednostavnu činjenicu da zbroj svih prostornih kutova $\Delta\Omega_i$ mora dati puni prostorni kut 4π. Malene površine svojom ukupnošću aproksimiraju zatvorenu plohu. Aproksimacija je to bolja, što su površine sitnije, a ima ih zato više. U graničnom slučaju dobivamo infinitezimalne površine $d\vec{a}$, a gornja suma prelazi u integral

$$\oint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi G\,m \qquad (m \text{ unutar plohe}) \quad (3.13)$$

gdje kružić na znaku integrala naglašava da se radi o integralu po *zatvorenoj* plohi. Jednadžba (3.13) predstavlja *Gaussov zakon za gravitacijsko polje*. Značajno je da rezultat integrala ne ovisi o nepravilnosti zatvorene plohe po kojoj se integrira. U prvi

nam se mah to može činiti čudnim, no pomnijim razmišljanjem možemo se lako uvjeriti u ispravnost ovoga rezultata. Naime, gledajući iz točke u kojoj se nalazi tijelo mase m, svaka zatvorena ploha oko toga tijela neminovno zatvara cjelokupan prostorni kut 4π, baš kao i neka zamišljena sferna ploha oko istoga tijela.

Napomena: Primijetimo da su vektori malenih površina $\Delta\vec{a}_i$ na slici 3.4d uvijek usmjereni tako da *izlaze* iz volumena koji je obuhvaćen zamišljenom zatvorenom plohom.

Rezultat integrala u jednadžbi (3.13) ovisi o masi m tijela koje se nalazi negdje unutar zamišljene zatvorene plohe. Što je manja masa tijela, manji je i rezultat traženog integrala. Iz toga lako zaključujemo da, ukoliko unutar zamišljene zatvorene plohe uopće nema tijela, traženi integral mora iščezavati.

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0 \quad \text{(nema tijela unutar plohe)} \qquad (3.14)$$

Tijelo koje bi se eventualno nalazilo negdje u blizini, ali izvan te zatvorene plohe, ne utječe na ishod integrala. Takav slučaj prikazuje slika 3.4e. Pokušajmo razumjeti zašto traženi integral iščezava u ovome slučaju. Iščezavanje tog integrala nipošto ne znači da gravitacijskog polja uopće nema na mjestima gdje se nalazi zamišljena zatvorena površina. Naime, tijelo stvara gravitacijsko polje u svim točkama okolnog prostora, dakle i na svakom malenom dijelu zatvorene plohe. Na slici 3.4e odabran je neki prostorni kut $\Delta\Omega$. Vidimo da sada isti prostorni kut zatvaraju dvije malene površine koje su dijelovi ukupne zatvorene plohe. Pripadni vektori $\Delta\vec{a}\,'$ i $\Delta\vec{a}\,''$ usmjereni su uvijek tako kao da izlaze iz volumena obuhvaćenog zatvorenom plohom. Stoga imamo $\vec{g}\,' \cdot \Delta\vec{a}\,' = -\vec{g}\,'' \cdot \Delta\vec{a}\,''$. Kod zbrajanja, oni se poništavaju $\vec{g}\,' \cdot \Delta\vec{a}\,' + \vec{g}\,'' \cdot \Delta\vec{a}\,'' = 0$. Isto vrijedi za sve druge parove u prostornim kutovima koji gledaju prema zatvorenoj plohi. To je razlog zašto traženi integral u ovome slučaju iščezava.

Princip superpozicije

Do sada smo razmatrali slučajeve kod kojih je postojalo samo jedno tijelo koje stvara gravitacijsko polje. U realnim situacijama imamo više tijela koja su nekako raspoređena u prostoru. Slika 3.5a prikazuje slučaj s tri tijela A, B i C. Svako od njih stvara gravitacijsko polje u svim okolnim točkama. Na slici 3.5a odabrana je proizvoljno jedna točka i prikazana su gravitacijska polja $\vec{g}_A$, $\vec{g}_B$ i $\vec{g}_C$ koja u toj točki nastaju uslijed pojedinih tijela.

U prirodi vrijedi zakonitost prema kojoj je svako gravitacijsko polje neovisno o postojanju drugog tijela i gravitacijskog polja koje ono stvara, pa se gravitacijska polja na nekom mjestu vektorski zbrajaju. To je *princip superpozicije*.

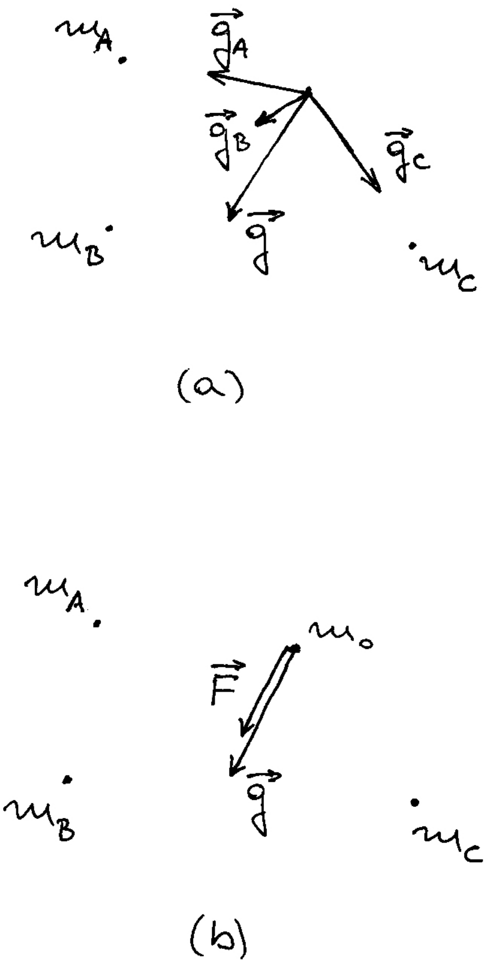
Uvažavajući princip superpozicije, slika 3.5a prikazuje također ukupno gravitacijsko polje $\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C$ koje nastaje od sva tri tijela zajedno. Možemo primijetiti da ukupno gravitacijsko polje ne mora biti usmjereno prema nekom od triju tijela, nego onako kako se dobije vektorskim zbrojem izvornih doprinosa. Isti bismo postupak mogli ponoviti za bilo koju točku promatranja u prostoru u kojemu se nalaze zadana tijela.

Da bi pojam ukupnog gravitacijskog polja postao još jasniji, prisjetimo se mogućnosti da u točku promatranja postavimo probno tijelo mase m_0. Sila kojom sva tri tijela A, B i C zajedno privlače probno tijelo iznosi $\vec{F} = m_0\vec{g}$. Slika 3.5b prikazuje probno tijelo i silu $\vec{F}$ koja na njega djeluje. Ona ima smjer ukupnog gravitacijskog polja $\vec{g}$, tj. ne mora biti usmjerena prema nekom od tijela A, B ili C.

Gravitacijsko polje sferne raspodjele mase

Spomenuli smo da je Newton u početku samo pretpostavljao da tijelo oblika kugle, kao što je Zemlja, privlači druga tijela tako kao da je sva njegova masa koncentrirana u središtu kugle. Ta mu je pretpostavka bila potrebna da bi mogao uspješno izvesti svoj argument s omjerom gravitacijske sile na površini Zemlje prema onoj koja nastaje na udaljenosti Mjeseca. Kasnije je Newton uspio primjenom integralnog računa, kojeg je sam izumio, dokazati navedenu pretpostavku. Ovdje ćemo istu stvar dokazati na jednostavniji način primjenom Gaussova zakona za gravitacijsko polje.

Na slici 3.6a prikazano je tijelo u obliku kugle radijusa R i ukupne mase m. Pretpostavljamo da je tijelo homogeno, tj. da ima jednoliku raspodjelu mase. Na slici 3.6a postavljeno je ishodište u središte kugle i odabrana je proizvoljno jedna točka na udaljenosti r izvan kugle ($r > R$). Pokušajmo

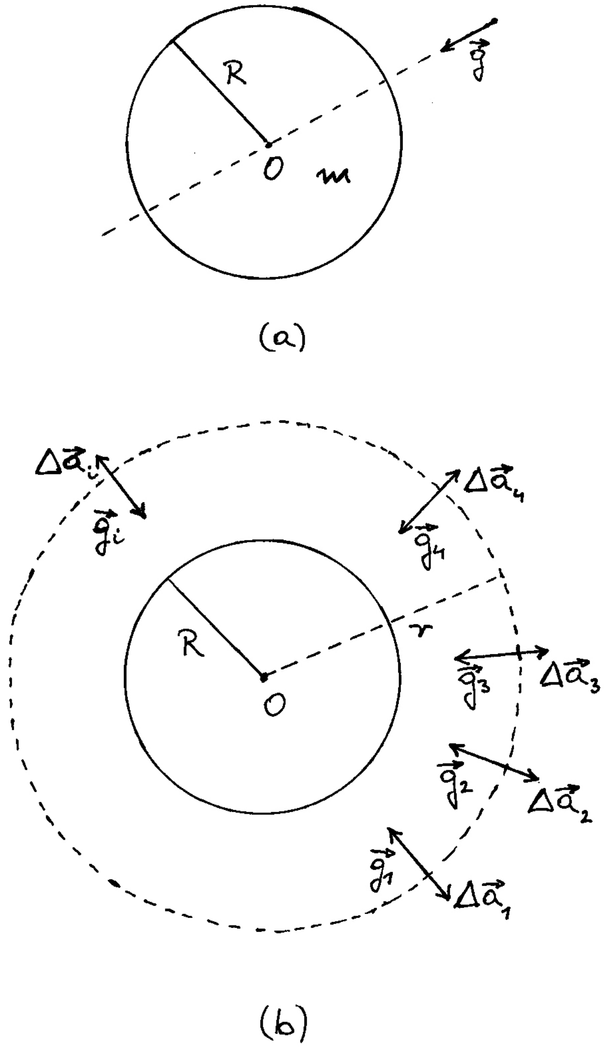


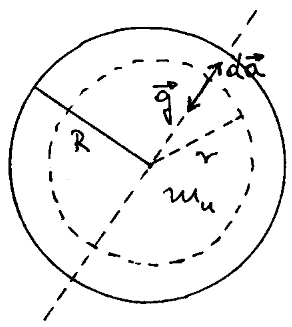
Slika 3.5: (a) Svako od triju tijela neovisno stvara svoje gravitacijsko polje u proizvoljno odabranoj točki promatranja. Ukupno gravitacijsko polje predstavlja vektorski zbroj pojedinih doprinosa. (b) Postavljanjem probnog tijela mase m_0 u točku promatranja javlja se sila $\vec{F}$ koja na njega djeluje.

odrediti gravitacijsko polje u toj točki. Kuglu možemo zamisliti kao skup čestica malenih masa jednoliko raspoređenih u njenu volumenu. Svaka od tih čestica stvara svoje gravitacijsko polje u promatranoj točki izvan kugle. Prema principu superpozicije, o kojemu smo gore raspravljali, ukupno gravitacijsko polje je vektorski zbroj tih doprinosa.

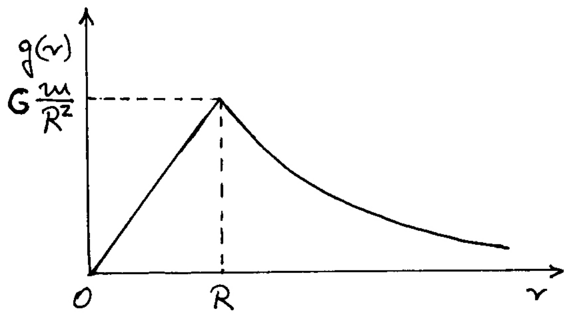
Odredimo najprije smjer ukupnog gravitacijskog polja. U tu se svrhu možemo poslužiti argumentom simetrije, kao što se to u fizici često radi. Na slici 3.6a povučena je crtkana linija koja prolazi kroz centar kugle i kroz odabranu točku promatranja izvan kugle. Gledajući iz točke promatranja na kuglu, možemo ustanoviti da se s jedne i druge strane od crtkane linije nalazi jednaka količina mase i jednako je raspoređena u obliku polukugle. Očito je da ukupno gravitacijsko polje, koje stvara kugla, ne može biti otklonjeno od linije simetrije niti na jednu stranu, jer nema razloga zašto bi jedna strana "prevagnula" nad drugom. Dakle, gravitacijsko polje mora, zbog razloga simetrije, biti usmjereno duž crtkane linije, kao što je i prikazano na slici 3.6a.

Opisani argument simetrije mogao bi se primijeniti i u slučaju izbora bilo koje druge točke promatranja izvan kugle. Gravitacijsko polje u nekoj točki uvijek ima smjer prema središtu kugle. Na slici 3.6b prikazana je zamišljena sferna ploha radijusa r. Ona je podijeljena na mnoštvo malenih površina s pripadnim vektorima $\Delta\vec{a}_i$ koji imaju radijalan smjer, suprotno od pripadnog gravitacijskog





(c)



(d)

Slika 3.6: (a) Homogena kugla mase m i radijusa R (prikaz u presjeku). Vektor gravitacijskog polja u točki izvan kugle. (b) Zamišljena sferna ploha (crtkana linija) koja prolazi kroz odabranu točku promatranja izvan kugle. Prikazani su vektori gravitacijskog polja u nekim točkama na zamišljenoj sfernoj plohi i vektori malenih dijelova sferne površine oko tih točaka. (c) Odabir zamišljene sferne plohe za točku promatranja unutar kugle. (d) Ovisnost iznosa gravitacijskog polja o udaljenosti od središta kugle.

polja $\vec{g}_i$. Stoga je za svaku površinu

$$\vec{g}_i \cdot \Delta\vec{a}_i = -g\,\Delta a_i = -g\,r^2\Delta\Omega_i \tag{3.15}$$

gdje je uvažena simetrija kugle i sferne plohe iz koje zaključujemo da gravitacijsko polje ima isti iznos u svim točkama na sfernoj plohi, tj. $|\vec{g}_i| = g$ za svaki i.

Zamislimo da povećavamo broj malenih površina, čime se one smanjuju po iznosu, te postaju infinitezimalne vektorske veličine $d\vec{a}$. Tada možemo primijeniti Gaussov zakon za gravitacijsko polje (jednadžba (3.13))

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi\,G\,m \tag{3.16}$$

gdje je m ukupna masa kugle. Integral s lijeve strane možemo zasebno izračunati

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = -g\,r^2 \oint d\Omega = -4\pi\,g\,r^2 \tag{3.17}$$

Ovdje smo sukladno jednadžbi (3.15) uvažili da je $\vec{g} \cdot d\vec{a} = -g\,r^2 d\Omega$, te da se integriranjem (zbrajanjem) svih infinitezimalnih prostornih kutova $d\Omega$ dobiva puni prostorni kut 4π. Uvrštavanjem dobivenog rezultata u jednadžbu (3.16), dobivamo konačno

$$-4\pi\,g\,r^2 = -4\pi\,G\,m \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{G\,m}{r^2} \tag{3.18}$$

Dobiveno gravitacijsko polje ima istu vrijednost kao da se cijela masa m nalazi na udaljenosti r od promatrane točke, a to znači kao da se nalazi u središtu kugle. Dokaz je time završen.

Možemo još dopuniti našu znatiželju pitanjem postoji li gravitacijsko polje i unutar kugle. Na slici 3.6c odabrana je neka točka promatranja na udaljenosti r, koja je manja od kuglinog radijusa R ($r < R$). Postupamo kao i u prethodnom slučaju, te povlačimo crtkanu liniju simetrije koja prolazi kroz promatranu točku i središte kugle. Ako postoji gravitacijsko polje u točki unutar kugle, ono očito mora ležati na crtkanoj liniji. Pretpostavimo da ono uistinu postoji, te da ima smjer prema središtu kugle. Da bismo odredili iznos g tog gravitacijskog polja, uvedimo zamišljenu sfernu plohu na kojoj leži i točka promatranja, te primijenimo Gaussov zakon za gravitacijsko polje

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi\,G\,m_u \tag{3.19}$$

gdje je m_u samo onaj dio mase kugle koji se nalazi *unutar* zamišljene plohe po kojoj obavljamo integraciju. Ostatak mase kugle nalazi se izvan zatvorene plohe i ne daje doprinos u integraciji (jednadžba (3.14)).

Integral s lijeve strane jednadžbe (3.19) računamo na isti način kao što smo to učinili u jednadžbi (3.17). S druge strane, za masu

unutar zatvorene plohe možemo pisati $m_u = \rho\, V_u$, gdje je volumen unutar zamišljene sferne plohe $V_u = 4\pi\, r^3/3$. Uvrštavanjem rezultata u jednadžbu (3.19) dobivamo

$$-4\pi\, g\, r^2 = -4\pi\, G\, \rho\, \frac{4\pi\, r^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{4\pi}{3}\, G\, \rho\, r \tag{3.20}$$

Dobiveni iznos gravitacijskog polja unutar kugle ovisi linearno o udaljenosti od središta kugle. Gravitacijsko polje iščezava jedino u samome središtu kugle. To je rezultat koji smo mogli predvidjeti i uvidom u simetriju problema. Naime, nemoguće je postojanje vektora gravitacijskog polja u središtu kugle jer se ne može istaknuti preferirani smjer u kojem bi taj vektor trebao biti postavljen, a to znači da on mora iščezavati. Argument možemo izraziti i na drugi način. Skrenimo pažnju na česticu u samome središtu kugle. Ona nam može igrati ulogu probnog tijela. Nju privlače sve druge čestice koje tvore kuglu prema općem zakonu gravitacije, no njihovo je privlačenje jednako na sve strane zbog simetrije kugle. Stoga se vektorski zbroj tih sila poništava.

Ako pak skrenemo pažnju na neku česticu kugle koja se nalazi na udaljenosti r od središta kugle, ostale čestice kugle je ne privlače jednako na sve strane. U vektorskom zbroju nastane sila prema središtu kugle. Ova rezultantna sila je to veća što je čestica dalje od središta kugle.

Ovisnost gravitacijskog polja o udaljenosti od središta kugle prikazana u potpunosti na slici 3.6d. Jasno se uočava linearan porast funkcije $g(r)$ za $r < R$ (jednadžba (3.20)), te opadanje s kvadratom udaljenosti za $r > R$ (jednadžba (3.18)). Na samoj površini kugle izjednačene su dvije krivulje. U to se lako uvjeriti ako u jednadžbu (3.20) uvrstimo $r = R$, te $\rho = m/V = m/(4\pi\, R^3/3)$. Dobiva se rezultat $g = G\, m/R^2$, kao što se očekuje i iz jednadžbe (3.18) za $r = R$.

3.2.3 Gravitacijska sila blizu površine Zemlje

U našem svakidašnjem životu najviše se susrećemo s gravitacijskom silom na tijela blizu površine Zemlje. Pojmovi "blizu" i "daleko" su relativni, pa moramo navesti s čime uspoređujemo zadanu udaljenost. Označimo s h visinu tijela, tj. njegovu udaljenost od površine Zemlje. Kada govorimo da je tijelo blizu površine Zemlje, onda zapravo mislimo da je veličina h mnogo manja od radijusa Zemlje r_Z. Ukupnu udaljenost tijela od središta Zemlje možemo napisati u obliku $r = r_Z + h$, pa dobivamo ovisnost gravitacijskog polja o visini iznad površine Zemlje

$$\begin{aligned} g(h) = G\, \frac{m_Z}{(r_Z + h)^2} &= G\, \frac{m_Z}{{r_Z}^2} \frac{1}{(1 + h/r_Z)^2} \\ &\approx G\, \frac{m_Z}{{r_Z}^2} \left(1 - 2\frac{h}{r_Z}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje je aproksimacija valjana jer pretpostavljamo da je h/r_Z malena veličina, tj. $(h/r_Z) << 1$.

Vidimo da $g(h)$ ima gotovo konstantnu vrijednost

$$g = G\, \frac{m_Z}{{r_Z}^2} = 9,81\ \mathrm{ms}^{-2} \tag{3.22}$$

gdje numeričku vrijednost dobivamo nakon uvrštavanja poznatih iznosa za masu i radijus Zemlje.

Ova aproksimacija vrijedi za sve slučajeve iz svakidašnjeg života na Zemlji. Vrijednost g se praktički ne mijenja od podnožja do najvišeg kata nebodera koji može biti visok i nekoliko stotina metara. Štoviše, u avionima koji lete standardno na koridorima na visini od oko $h = 10$ km imamo također praktički istu vrijednost za g budući da je i ta visina jako malena u usporedbi s $r_Z = 6370$ km. Gledajući iz Svemira, avioni lete relativno blizu površine Zemlje.

Sila teže i težina

Kada se neko tijelo mase m nalazi u gravitacijskom polju blizu površine Zemlje, na njega djeluje sila

$$\vec{F}_g = m\, \vec{g} \tag{3.23}$$

gdje je $|\vec{g}| = g$, prema jednadžbi (3.22), a smjer vektora $\vec{g}$ je vertikalno prema dolje. Dobivena sila predstavlja privlačno djelovanje Zemlje na to tijelo.

U starijim se hrvatskim udžbenicima fizike uvriježio izraz *sila teže*, koji sugerira da zbog nje tijelo teži prema dolje. Ako je tijelo slobodno, sila $\vec{F}_g$ će ga ubrzavati prema dolje akceleracijom $g = F_g/m$ u skladu s drugim Newtonovim zakonom.

No, ako tijelo položimo na neku horizontalnu podlogu, ono će mirovati. Na tijelo tada djeluje i podloga normalnom silom $\vec{N}$ prema gore tako da

ukupna sila na tijelo iščezava ($\vec{F}_g + \vec{N} = 0$). U praksi je često važno reći kolikom silom tijelo djeluje na podlogu. U tu je svrhu bio uveden pojam *težine* koji i danas nalazimo u nekim hrvatskim udžbenicima. Označimo li tu silu simbolom $\vec{F}_t$, slijedi prema trećem Newtonovu zakonu da je

$$\vec{F}_t = -\vec{N} \tag{3.24}$$

Slika 3.7a prikazuje tijelo na horizontalnoj podlozi i sile koje razmatramo. U tom je slučaju

$$\vec{F}_t = \vec{F}_g \tag{3.25}$$

Jednakost tih sila ne znači da se radi o istoj sili. Naprotiv, jedna od njih djeluje na podlogu, a druga na tijelo. Ni priroda tih sila nije ista. $\vec{F}_g$ je gravitacijska sila, dok se priroda sile $\vec{F}_t$ nalazi u svojstvu elastičnosti, kao što ćemo detaljnije razmatrati kasnije u ovome poglavlju.

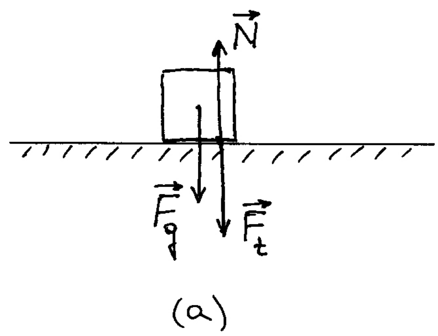
U primjeni ovako postavljenog pojma težine na neke druge slučajeve pojavljivale su se nedoumice. Tako npr. možemo zamisliti da je tijelo uronjeno u posudu s vodom kako prikazuje slika 3.7b. Sila $\vec{F}_g$ ostaje neizmijenjena, ali na tijelo dodatno djeluje sila uzgona $\vec{F}_u$. Sila kojom tijelo djeluje na dno posude je time smanjena, pa se postavlja dilema treba li tu silu ipak nazivati težinom ili ne. Ako se ostane pri istom nazivu, značilo bi to da je težina tijela promjenljiva veličina u ovisnosti o uvjetima u kojima se tijelo nalazi. Stoga se često pribjegavalo nazivu "prividna težina", koji pak podrazumijeva da postoji i "prava težina", koja bi bila ona iz jednadžbe (3.25).

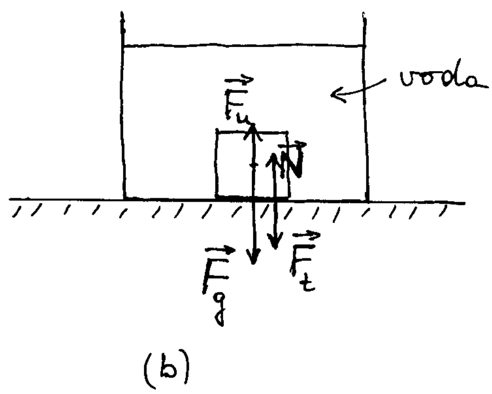
Novija međunarodno prihvaćena definicija težine kaže da je to veličina koju dobijemo množenjem mase tijela i akceleracije koju to tijelo ima u slobodnom padu (bez otpora zraka ili drugog fluida), koji se promatra iz odabranog referentnog sustava

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_{rs} \tag{3.26}$$

Ako se slobodan pad promatra sa Zemlje, akceleracija $\vec{a}_{rs}$ u tome referentnom sustavu iznosi upravo $\vec{g}$, pa je težina jednaka sili u izrazu (3.23). Međutim, ako se promatranje slobodnog pada istoga tijela obavlja u neinercijalnom sustavu koji se ubrzano podiže uvis u odnosu prema Zemlji (npr.u dizalu) izmjerena akceleracija $\vec{a}_{rs}$ bit će veća od $\vec{g}$, pa će i težina tijela u takvu referentnom sustavu imati veću vrijednost. Nasuprot tome, težina tijela bit će manja u referentnom sustavu koji ubrzano propada. Tako se postiže beztežinsko stanje promatranjem slobodnog pada tijela iz neinercijalnog referentnog sustava koji zajedno s tijelom propada prema Zemlji. Težina tijela je, dakle, veličina koja ovisi o referentnom sustavu odabranom za promatranje slobodnog pada tijela.

U ovoj ćemo knjizi izbjegavati uporabu naziva težina, jer nije osobito koristan, a može izazvati nedoumice. Za silu $\vec{F}_g$ upotrebljavat ćemo izraz *gravitacijska sila*, a o sili kojom tijelo djeluje na horizontalnu podlogu kada je na nju položeno govorit ćemo u tom smislu opisno.





Slika 3.7: (a) Tijelo djeluje na horizontalnu podlogu silom $\vec{F}_t$, koja je jednaka sili $\vec{F}_g$. (b) Kada je tijelo uronjeno u vodu, djeluje na njega i sila uzgona $\vec{F}_u$, pa se smanji sila kojom tijelo djeluje na dno posude.

3.2.4 Jednakost trome i gravitacijske mase

Već kod uvođenja Newtonova općeg zakona gravitacije naveli smo da su gravitacijska i troma masa jednake, te stoga rabimo istu jedinicu (1 kg) za njihovo mjerenje. Pitanju jednakosti trome i gravitacijske mase vrijedi posvetiti još nešto pažnje.

Troma i gravitacijska masa predstavljaju mjere za dva različita svojstva tijela. Možemo to raspraviti na slučaju slobodnog pada tijela blizu površine Zemlje. Ispušteno tijelo pada jednoliko ubrzano akceleracijom

$$a = \frac{F_g}{m^{(t)}} = \frac{G\,\dfrac{m_Z\, m^{(g)}}{{r_Z}^2}}{m^{(t)}} = G\,\frac{m_Z}{{r_Z}^2}\,\frac{m^{(g)}}{m^{(t)}} \qquad (3.27)$$

gdje smo s $m^{(g)}$ označili gravitacijsku, a s $m^{(t)}$ tromu masu jednog te istog tijela. Akceleraciju određujemo primjenom drugoga Newtonova zakona kao omjer sile F_g koja djeluje na tijelo i trome mase $m^{(t)}$ tog tijela. Sila na tijelo nastaje zbog uzajamne privlačnosti Zemlje i tijela, što je određeno Newtonovim općim zakonom gravitacije u kojem se pojavljuju gravitacijske mase Zemlje i tijela.

Rezultat koji smo dobili za akceleraciju a slobodnog pada ovisi o masi i radijusu Zemlje, ali i o omjeru $m^{(g)}/m^{(t)}$ koji se odnosi na tijelo koje pada. Kada bi taj omjer bio različit od tijela do tijela, moralo bi se opaziti da ona padaju s različitim akceleracijama. Stoga je usporedno mjerenje slobodnog pada različitih tijela od presudne važnosti za utvrđivanje odnosa trome i gravitacijske mase kao temeljnog svojstva prirode.

Galileo Galilei je utvrdio da nema zamjetne razlike u padanju težih i lakših tijela. Iznimku su činila vrlo lagana tijela poput perja kod kojih otpor zraka bitno utječe na njihovo gibanje. U Newtonovo doba bile su već izumljene vakuumske sisaljke, te je bilo moguće dokazati da u cijevi, iz koje je isisan zrak, kuglica od neke čvrste tvari i lagano perce padaju s nezamjetnom razlikom. No, Newton se nije zadovoljio točnošću koja se može postići u slobodnom padu koji se odvija u relativno kratkom vremenu. Zato je osmislio i izvodio pokuse s njihalima koja su imala jednake duljine niti, te kuglice jednakih veličina, ali od različitih tvari, tako da im mase budu različite. Najveću razliku u masama je postigao s jednom kuglicom od drveta a drugom od zlata. Jednakost perioda njihanja dviju kuglica ukazuje na to da kuglica veće gravitacijske mase (teža kuglica) ima proporcionalno veću tromu masu, tj. da je omjer $m^{(g)}/m^{(t)}$ jednak za svaku kuglicu. Newton je utvrdio da ova jednakost vrijedi do na eksperimentalnu relativnu pogrešku koja je mogla iznositi svega 10^{-3}.

Ovo prirodno svojstvo proporcionalnosti gravitacijske i trome mase za razna tijela provjeravali su i drugi fizičari nakon Newtona primjenjujući složenije metode i postizali suglasnost uz sve veću preciznost. Mađarski fizičar Eötvös konstruirao je posebnu metodu kojom je postigao ogromnu točnost tako da se relativna pogreška smanjila na samo 10^{-9}. Stoga se u fizici smatra da je omjer $m^{(g)}/m^{(t)}$ striktno jednak za sva tijela u prirodi, te se ova činjenica uzima kao jedno od temeljnih svojstava prirode. Slobodnim dogovorom uzeto je da se za mjerenje gravitacijske i trome mase upotrebljava ista jedinica, tj. onaj uteg od platine i iridija koji se kao pramjera čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sévresu pokraj Pariza. Time omjer $m^{(g)}/m^{(t)}$ postaje jednak jedinici za taj uteg, a time i za sva druga tijela, tj. gravitacijska masa bilo kojeg tijela točno je jednaka njegovoj tromoj masi.

3.3 Elastična sila

Do sada smo razmatrali slučajeve u kojima se zbog djelovanja neke sile na kruto tijelo mijenja njegova trenutna brzina. Ukoliko na tijelo djeluje više sila, moramo ih vektorski zbrojiti, tj. naći rezultantnu silu o kojoj tada ovisi promjena brzine tijela. Razmotrimo sada slučaj tijela koje miruje, te na njega počnu istodobno djelovati dvije sile jednakih iznosa i suprotnoga smjera s hvatištima na suprotnim stranama površine tijela. Rezultantna sila očito izčezava, te će tijelo ostati u stanju mirovanja. Dakle, ne dolazi do promjene brzine tijela, ali nastaje jedna druga pojava. Tijelo se *deformira.* Pritom se javljaju unutarnje sile kojima se tijelo protivi deformiranju. U ovome ćemo odjeljku detaljnije izučiti nastanak deformacije tijela u nekim jednostavnim slučajevima i objasniti prirodu unutarnjih sila deformiranog tijela.

3.3.1 Ravnoteža i deformacija u modelnom sustavu atoma

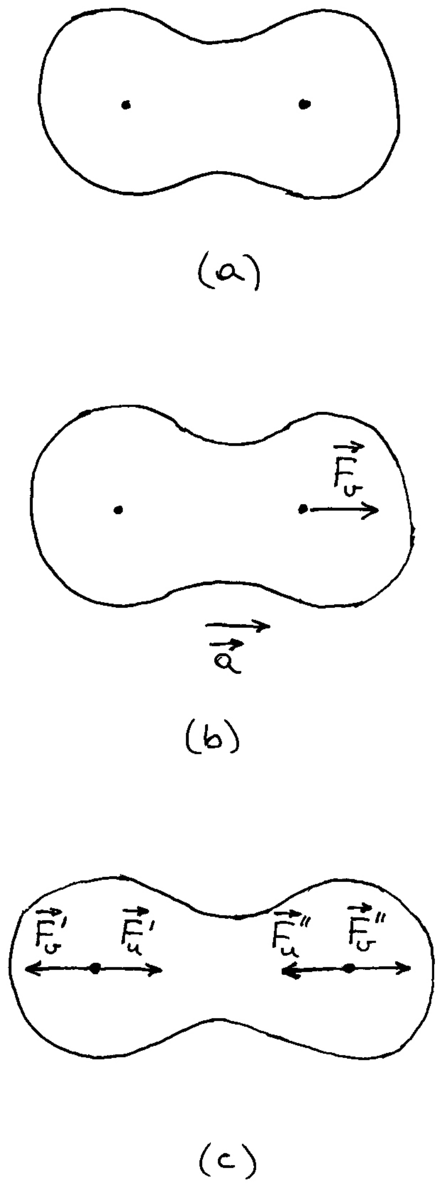
Razmotrimo uvodno jednu dvoatomnu molekulu, simbolički prikazanu na slici 3.8a. Ako molekula

nije izložena vanjskim utjecajima, jezgre atoma su razmaknute toliko koliko odgovara unutarnjoj ravnoteži sila. Naime, atomske jezgre su električki pozitivno nabijene, pa između njih postoji odbojna sila jer se istoimeni naboji odbijaju. Kada bi to bile jedine unutarnje sile, atomi bi se razišli, pa molekula ne bi mogla ni postojati kao stabilna struktura. Međutim, negativno nabijeni elektroni privlače obje jezgre, pa njihovo djelovanje nastoji približiti jezgre jednu drugoj. Drugim riječima, odbojnoj sili suprotstavlja se privlačna, te se ravnoteža sila uspostavi kod neke udaljenosti među jezgrama.

Napomena: Navedeni opis predstavlja klasičnu sliku atoma i molekula. Za točniji opis potrebna je kvantna mehanika, koja se uči kasnije tijekom studija. Za sadašnju raspravu o ravnotežnom stanju i deformaciji dovoljno je zadržati se na klasičnom opisu.

Zamislimo sada da na jedan od atoma u molekuli djeluje vanjska sila $\vec{F}_v$ kao što to prikazuje slika 3.8b. Molekula će se ponašati kao jedno tijelo, te će sukladno drugome Newtonovu zakonu imati akceleraciju $\vec{a} = \vec{F}_v/m$, gdje je m ukupna masa molekule. No, ako zamislimo da na jedan od atoma u molekuli djeluje vanjska sila $\vec{F}_v^{\,\prime}$, a na drugi sila $\vec{F}_v^{\,\prime\prime}$, s time da su ove sile jednake po iznosu ali suprotnoga smjera, te da leže na istome pravcu nositelju kao na slici 3.8c, ukupna vanjska sila na molekulu će iščezavati ($\vec{F}_v = \vec{F}_v^{\,\prime} + \vec{F}_v^{\,\prime\prime} = 0$), pa molekula ne može imati akceleraciju. Na slici 3.8c ona je prikazana u stanju mirovanja u nekom inercijalnom sustavu.

Ipak, par vanjskih sila $\vec{F}_v^{\,\prime}$ i $\vec{F}_v^{\,\prime\prime}$ ne ostaje bez učinka na molekulu. Pod njihovim djelovanjem atomi krenu na suprotne strane. No, u tome procesu mijenjaju se unutarnje sile molekule. Naime, udaljavanjem jezgri, oslabi odbojna sila među njima, dok se sila kojom elektroni privlače jezgre bitno ne smanjuje, jer se elektroni malo drukčije rasporede oko jezgara. To znači da unutarnje privlačne sile prevladaju nad odbojnima, što rezultira pojavom para unutarnjih sila $\vec{F}_u^{\,\prime}$ i $\vec{F}_u^{\,\prime\prime}$, kako prikazuje slika 3.8c. Prema trećemu Newtonovu zakonu mora uvijek biti $\vec{F}_u^{\,\prime\prime} = -\vec{F}_u^{\,\prime}$. Iznos tih sila ovisi o povećanju razmaka među jezgrama atoma u molekuli. Jezgre atoma se razmaknu upravo toliko da unutarnja sila postane po iznosu jednaka vanjskoj. Tada je svaki atom došao u novo ravnotežno stanje jer je ukupna sila na njega opet jednaka nuli ($\vec{F}_v^{\,\prime} + \vec{F}_u^{\,\prime} = 0$, te $\vec{F}_v^{\,\prime\prime} + \vec{F}_u^{\,\prime\prime} = 0$). Možemo reći



Slika 3.8: (a) Dvoatomna molekula u ravnotežnom stanju. Elektronski oblak oko jezgri prikazan je simbolički zatvorenom krivuljom. (b) Ako na jedan od atoma djeluje vanjska sila (zamišljena situacija), molekula kao cjelina dobiva akceleraciju. (c) Ako na atome djeluju dvije vanjske sile jednakih iznosa ali suprotnih smjerova, molekula ne dobiva akceleraciju već se deformira (rasteže). Pritom nastaju unutarnje sile koje uspostave novo ravnotežno stanje molekule.

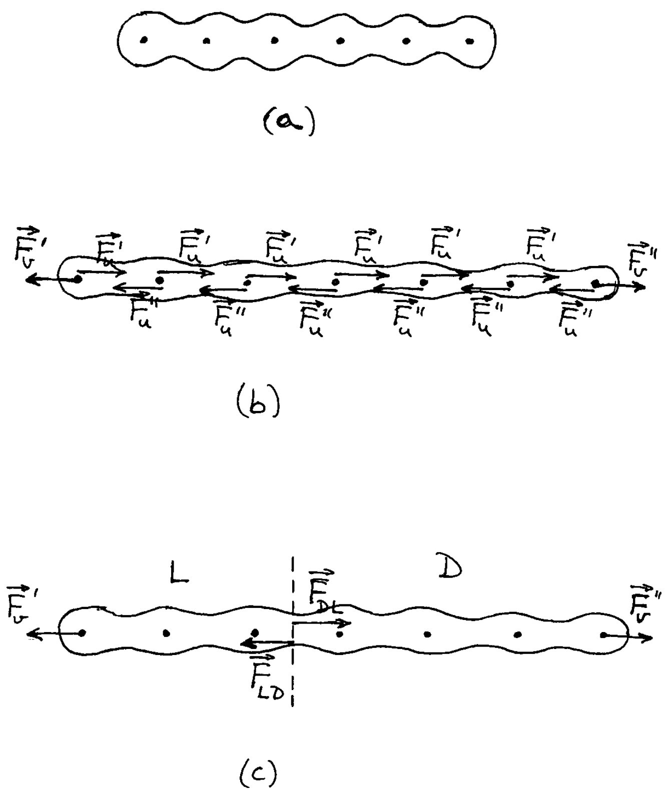
da je djelovanje para vanjskih sila dovelo do *deformacije* molekule. Ako primijenimo veće vanjske sile na molekulu, njena će deformacija biti veća, tj. novo ravnotežno stanje će se uspostaviti kod većeg razmaka između jezgara atoma.

Napomena: Važno je razlučiti uzrok i posljedicu. Vanjske sile ovdje predstavljaju uzrok deformacije molekule. Pretpostavljamo da u tom zamišljenom eksperimentu vanjski čimbenik može po svojoj volji mijenjati iznos vanjskih sila. S druge strane, pojava unutarnjih sila u molekuli predstavlja fizikalnu posljedicu. Iznos unutarnjih sila uvijek se prilagodi vanjskim silama tako da nastane ravnoteža.

Deformaciju molekule mogli bismo izvesti i zamišljenim eksperimentom u kojemu vanjskim silama stišćemo molekulu tako da se jezgre atoma približe. Odbojne bi sile među jezgrama tada prevladale nad privlačnim silama elektrona prema jezgrama, te bi rezultantne unutarnje sile u molekuli postale odbojne. Konačno bi se uspostavilo novo ravnotežno stanje sa smanjenim razmakom između jezgara atoma.

Možemo sada razmotriti niz atoma, koji tvore neku zamišljenu linearnu molekulu, kao što simbolički prikazuje slika 3.9a. Razmak među jezgrama susjednih atoma određen je ravnotežom unutarnjih odbojnih i privlačnih sila. To znači da je vektorski zbroj svih sila na pojedini atom, koje dolaze od susjednih atoma, jednak nuli. Ako u zamišljenom pokusu počnu djelovati vanjske sile $\vec{F}_v^{'}$ i $\vec{F}_v^{''}$ na krajnje atome u molekuli, dolazi do razmicanja svih atoma u nizu dok se ne uspostavi nova ravnoteža. Slično kao kod dvoatomne molekule, nastaju unutarnje sile $\vec{F}_u^{'}$ i $\vec{F}_u^{''}$ prikazane na slici 3.9b. Bitno je uočiti da su sve te sile po iznosu jednake ($|\vec{F}_v^{'}| = |\vec{F}_u^{'}| = |\vec{F}_u^{''}| = |\vec{F}_v^{''}|$), jer je to uvjet ravnoteže.

Nastalu situaciju možemo interpretirati na sljedeći način. Na lijevome kraju djeluje vanjska sila $\vec{F}_v^{'}$, a kao posljedica deformacije javljaju se sile $\vec{F}_u^{''}$ koje djeluju na svaki atom u nizu do krajnjeg desnog atoma. Mogli bismo slobodnije reći da se djelovanje vanjske sile $\vec{F}_v^{'}$ proteže od lijevog do desnog kraja molekule, uvijek u istom iznosu i smjeru. Isto tako, vanjska sila $\vec{F}_v^{''}$ uzrokuje sile $\vec{F}_u^{'}$ na sve atome u nizu, te se može reći da se njeno djelovanje proteže od desnog do lijevog kraja molekule, uvijek u istom iznosu i smjeru. Kažemo da je u molekuli



Slika 3.9: (a) Niz atoma u zamišljenoj linearnoj molekuli. Zatvorena krivulja predstavlja simbolički ovojnicu elektronskog oblaka u molekuli. (b) Na krajnje atome mlekule djeluju dvije vanjske sile jednakih iznosa ali suprotnih smjerova. Molekula se deformira (rastegne) i tako nastanu unutarnje sile koje uspostave novo ravnotežno stanje. (c) Zamišljena podjela molekule na dva dijela, uvjetno nazvana "lijevi" (L) i "desni" (D) dio. Na zamišljenoj razdjelnici prikazane su sile kojima jedan dio djeluje na drugi.

nastala *napetost* koja se proteže od jednog do drugog kraja.

Uvedimo još jedan pogled na ovu fizikalnu pojavu. Načinimo zamišljenu podjelu molekule na dva proizvoljna dijela, koja možemo uvjetno nazvati "lijevim" i "desnim" dijelom (slika 3.9c). Možemo reći da "lijevi" dio djeluje na "desni" silom $\vec{F}_{LD}$, dok "desni" dio djeluje na "lijevi" silom $\vec{F}_{DL}$. Prema trećem Newtonovu zakonu mora biti $\vec{F}_{DL} = -\vec{F}_{LD}$. Usporedbom s prethodnom analizom uviđamo da je sila $\vec{F}_{DL}$ zapravo jednaka sili $\vec{F}_u^{'}$, a time i sili $\vec{F}_v^{''}$. Mogli bismo, stoga, promatrati samo "lijevi" dio

molekule. Za njegovu deformaciju (rastegnutost) je svejedno da li se na njega nastavlja "desni" niz atoma na čijemu kraju djeluje sila $\vec{F}_v''$, ili takva sila djeluje izravno na zadnji atom "lijevog" dijela molekule. Stoga zaključujemo da u "lijevome" dijelu molekule nastaje jednaka napetost, neovisno o tome djeluje li na njega izravno sila $\vec{F}_v''$, ili ona djeluje posredno preko "desnoga" dijela molekule. Općenito, napetost ne ovisi o prirodnoj duljini elastičnog sustava nego samo o vanjskim silama $\vec{F}_v'$ i $\vec{F}_v''$ kojima je sustav izložen.

Što se tiče produljenja molekule, ono je jednako umnošku produljenja pojedinog razmaka susjednih atoma i broja međuatomskih razmaka u nizu. Drugim riječima, molekula koja je inače dulja, proporcionalno će se više produljiti uz djelovanje istih vanjskih sila. To se zorno može vidjeti na slici 3.9c promatrajući bilo samo "lijevi", ili samo "desni" dio, ili pak cijelu molekulu.

Pojam elastičnosti

Na gornjim smo primjerima vidjeli da par vanjskih sila $\vec{F}_v'$ i $\vec{F}_v''$ može deformirati molekularni sustav. Ako uklonimo vanjske sile, molekularni se sustav vrati u prvobitno (nedeformirano) ravnotežno stanje. To se naziva *svojstvom elastičnosti.* U sljedećem ćemo pododjeljku vidjeti da realna tijela imaju svojstvo elastičnosti kod manjih deformacija, ali kod većih deformacija nastupa *plastičnost*, tj. ponašanje tijela u kojemu se ne ostvaruje njegov potpuni povratak u prvobitno stanje.

Priroda elastične sile

Povratak elastičnog tijela u prvobitno nedeformirano stanje odvija se pod utjecajem unutarnjih sila $\vec{F}_u'$ i $\vec{F}_u''$, koje se zbog toga mogu nazvati *elastične sile*, te ih možemo označavati kao $\vec{F}_{el}'$ i $\vec{F}_{el}''$.

Na primjerima molekularnih sustava vidjeli smo da sve sile među atomima dolaze od privlačenja i odbijanja električnih naboja što ih nose atomske jezgre i elektroni. Isto vrijedi i za bilo koje drugo tijelo. Prema tome, priroda elastične sile izvedena je iz elektromagnetske sile kao jedne od četiri osnovne sile u prirodi (v. odjeljak 3.1).

Napomena: Moramo izbjegavati pomisao da se susjedni atomi "dodiruju", te da bi moglo doći do izravnog guranja ukoliko jednog od njih pomičemo. Atomske jezgre i elektroni su sitne čestice koje se međusobno ne dodiruju, već između njih djeluje elektromagnetska sila na daljinu. Pojam "dodira" spada u makroskopsku sliku koja zanemaruje atomsku strukturu tvari.

3.3.2 Istezanje elastičnog štapa ili niti

Na slici 3.10a prikazan je štap, proizvoljne duljine L i poprečnog presjeka S, izrađen od nekog materijala. To je makroskopska slika u kojoj se štap doimlje kao kontinuum. U mikroskopskoj slici, štap se sastoji od golemog mnoštva atoma koji tvore trodimenzionalnu strukturu. Tako slika 3.10a prikazuje uvećani dio plohe na kraju štapa na kojoj su simbolički prikazani atomi raspoređeni u dvodimenzionalnu mrežu. Možemo zamisliti da se cijeli štap sastoji od takvih atomskih ravnina koje se nižu jedna do druge duž linije štapa. Razmak između jezgara susjednih atoma, bilo u ravnini poprečnog presjeka, ili duž linije štapa, određen je ravnotežom privlačnih i odbojnih sila prema istome principu kao i u modelnom jednodimenzionalnom molekularnom sustavu opisanom u prethodnom pododjeljku.

Ako na štap djeluje par vanjskih sila $\vec{F}_v'$ i $\vec{F}_v''$, jednakih iznosa i suprotnih smjerova s hvatištima na suprotnim krajevima štapa, svi uzdužni atomski razmaci se malo povećaju, pa se i cijeli štap produlji za neki iznos ΔL, kao što prikazuje slika 3.10b. Produljenje ΔL je proporcionalno broju atomskih razmaka od jednog do drugog kraja štapa, a to znači samoj duljini L nedeformiranog štapa. Drugim riječima, štap veće duljine L razvlači se za veći iznos ΔL, uz djelovanje istog para vanjskih sila. Ako načinimo omjer

$$\frac{\Delta L}{L} = \text{relativna vlačna deformacija} \qquad (3.28)$$

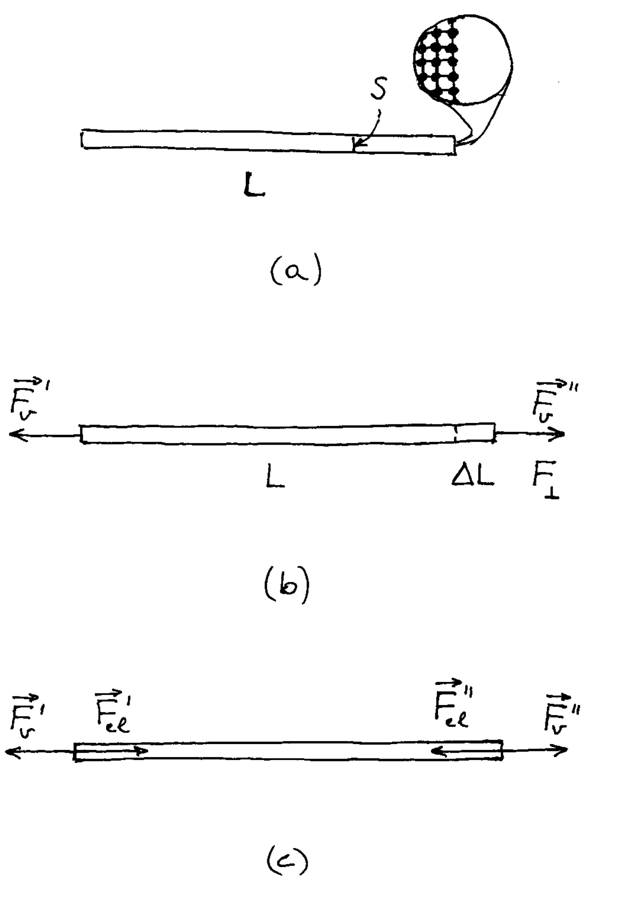
dobili smo veličinu koja ne ovisi o tome koliko dugačak štap uzmemo, nego samo ovisi o iznosu para vanjskih sila koje su izvele deformaciju. Uočimo da se veličine u brojniku i u nazivniku jednadžbe (3.28) mjere u istim jedinicama (metrima), pa je relativna vlačna deformacija (engl. *tensile strain*) bezdimenzionalan broj.

Ako želimo matematičkim izrazom povezati relativnu vlačnu deformaciju sa iznosom vanjskih sila, moramo uzeti u obzir i debljinu štapa. Sigurno je da će za deblji štap biti potreban veći iznos vanjskih sila, nego što je to potrebno za tanji štap da bi

se ostvarila ista relativna vlačna deformacija. Zato je korisno definirati novu veličinu

$$\frac{F_\perp}{S} = \text{vlačno naprezanje} \qquad (3.29)$$

gdje indeks $\perp$ označava da je sila okomita na poprečni presjek S štapa. Naprezanje se definira kao skalarna veličina, tj. $F_\perp$ predstavlja samo iznos sile. Na slici 3.10b su vanjske sile $\vec{F}_v^{\,\prime}$ i $\vec{F}_v^{\,\prime\prime}$ okomite na poprečni presjek štapa, pa njihov iznos predstavlja $F_\perp$ u jednadžbi (3.29). Možemo reći da je vlačno naprezanje (engl. *tensile stress*) jednako sili po jedinici površine poprečnog presjeka štapa, koja djeluje okomito na taj poprečni presjek. Vlačno naprezanje se mjeri u njutnima po metru kvadratnom



Slika 3.10: (a) Štap duljine L i poprečnog presjeka S. Simbolički je prikazana uvećana slika malenog dijela na kraju štapa. (b) Produljenje štapa uslijed djelovanja dviju vanjskih sila jednakih iznosa ali suprotnih smjerova. (c) Pojavom elastičnih sila u deformiranom štapu nastaje novo ravnotežno stanje.

(Nm^{-2}).

Ako povećavamo vlačno naprezanje, raste i relativna vlačna deformacija štapa. Iznos deformacije ovisi i o materijalu od kojeg je načinjen štap. Kod manjih deformacija postoji linearna ovisnost

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F_\perp}{S} \qquad (3.30)$$

gdje je Y konstanta koja se naziva *Youngov modul elastičnosti*, a ovisi o vrsti materijala od kojega je štap načinjen. Jednadžba (3.30) nam kaže da relativna vlačna deformacija nastaje uslijed djelovanja vlačnog naprezanja, te da između dviju veličina postoji proporcionalnost, a koeficijent proporcionalnosti ($1/Y$) ovisi o vrsti materijala.

Budući da je $\Delta L/L$ bezdimenzionalan broj, a $F_\perp/S$ se mjeri u Nm^{-2}, to se i Youngov modul elastičnosti Y mjeri u Nm^{-2}. Kao primjer navedimo da je za čelik $Y = 2\ 10^{11}\ \mathrm{Nm}^{-2}$. To znači da se čelični štap duljine 1 m produlji za 1 mm ($\Delta L/L = 10^{-3}$, odnosno jedan promil) ako je izložen vlačnom naprezanju od $2\ 10^8\ \mathrm{Nm}^{-2}$. Ako štap ima poprečni presjek od 1 cm^2 ($10^{-4}\ \mathrm{m}^2$), onda se radi o vlačnoj sili od $2\ 10^4$ N, što je prilično velika sila (odgovara težini tijela koje ima masu oko dvije tone). No, ako se štap svodi na čeličnu žicu poprečnog presjeka od 1 mm^2, dovoljna je sila od $2\ 10^2$ N, koju ostvarujemo ako na žicu objesimo uteg mase oko 20 kg.

Za usporedbu, Youngov modul elastičnosti za aluminij, bakar, ili staklo manji je nekoliko puta od onoga za čelik, dok je za drvo manji za red veličine, a za plastiku i dva reda veličine. To znači da se štapovi izrađeni od tih materijala lakše izvlače.

U gornjem smo razmatranju podrazumijevali da se štap ponaša kao elastično tijelo, tj. da se nakon uklanjanja vanjskih sila štap vraća u prvobitno nedeformirano stanje. Slika 3.10c prikazuje par vanjskih sila $\vec{F}_v^{\,\prime}$ i $\vec{F}_v^{\,\prime\prime}$ koje su uzrokovale deformaciju štapa, ali i par unutarnjih sila koje nastoje vratiti štap u nedeformirano stanje, a nazivamo ih još i *elastičnim silama*, pa ih označavamo kao $\vec{F}_{el}^{\,\prime}$ i $\vec{F}_{el}^{\,\prime\prime}$. Sve je to analogno pojavama u modelnom molekularnom sustavu, kako je opisano u prethodnome pododjeljku. Priroda elastične sile u deformiranom štapu leži u međuatomskim silama, a one su izvedene iz osnovne elektromagnetske sile među električnim nabojima.

Plastična deformacija i kidanje

Svakome je poznato da kod dovoljno velikog vlačnog naprezanja nekog štapa ili žice, odnosno niti, dolazi do pucanja. Mjerenja izvedena na metalnim žicama pokazala su da pucanju prethodi složeniji proces, koji je grafički prikazan na slici 3.11a. Svaka točka na tom grafu predstavlja jedno stanje štapa, tj. povezuje primijenjeno vlačno naprezanje s nastalom relativnom vlačnom deformacijom.

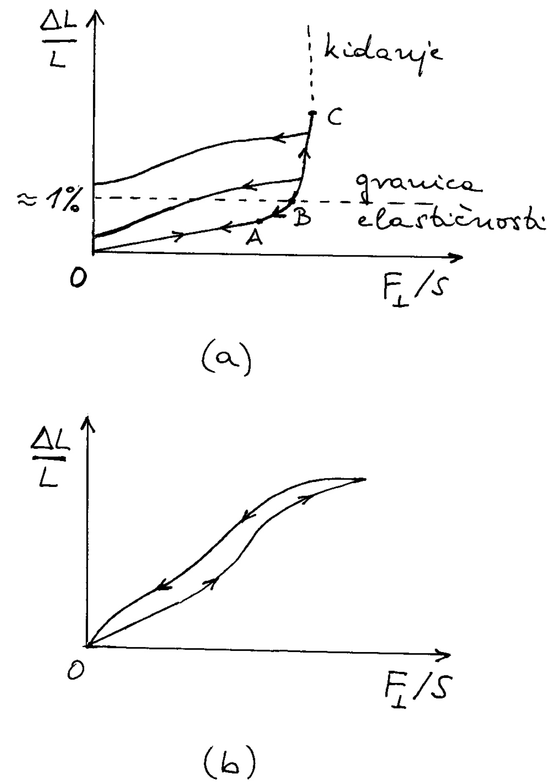
Kod početnog povećavanja vlačnog naprezanja, opaža se linearan rast relativne vlačne deformacije. To je područje u kojemu vrijedi jednadžba (3.30), a ono se proteže samo toliko dok relativna vlačna deformacija ne dosegne vrijednost od oko $5\ 10^{-3}$ (pet promila). Kraj linearnog područja je označen točkom A na slici 3.11a, .

Za nešto veće vlačno naprezanje, nastupa brži nelinearan porast relativne vlačne deformacije. U ovome nelinearnom području, koje se na slici 3.11a proteže do točke B, kao i u onome prethodnom linearnom, metalna žica se ponaša kao elastično tijelo. To znači da relativna vlačna deformacija potpuno iščezava kada se ukloni vanjsko vlačno naprezanje. Kažemo da su promjene stanja metalne žice *reverzibilne* (*povratljive*). Kod stezanja žice, njena stanja se mijenjaju slijedom iste krivulje natrag do ishodišta na slici 3.11a.

Ako se vlačno naprezanje poveća iznad granice elastičnosti, nastaje *plastična deformacija.* Za nju je karakteristično da se krivulja stezanja razlikuje od prvotne krivulje rastezanja, kao što to prikazuje slika 3.11a. Naime, naknadnim smanjivanjem vanjskoga vlačnog naprezanja, smanjuje se i relativna vlačna deformacija, ali ne u onome iznosu kao u prethodnome procesu rastezanja žice. Povratna krivulja ne završava u ishodištu na slici 3.11a, što znači da, čak i kada potpuno iščezne vanjsko vlačno naprezanje, žica ostane trajno izdužena za neki iznos.

Plastično ponašanje možemo lako razumjeti na atomskoj razini. Dok se primijenjeno vlačno naprezanje kreće unutar granica elastičnosti, svaki atom zadržava svoje mjesto u atomskoj rešetki, a samo se razmaci između susjednih atoma duž žice malo povećaju. Međutim, kada vlačno naprezanje prijeđe određeni iznos, neki se atomi pomaknu (prokližu) u nove položaje duž žice, tako da se žica produlji na račun smanjenja svoje debljine. Kada se nakon toga smanjuje vanjsko vlačno naprezanje, smanjuju se i razmaci između susjednih atoma duž žice, ali se oni atomi, koji su otklizali u nove položaje duž žice, više ne vraćaju u svoje prvobitne položaje. Stoga metalna žica ostaje trajno dulja, te malo tanja.

Plastična deformacija može dosegnuti svoj maksimalni iznos uz određeno vanjsko vlačno naprezanje, kako prikazuje točka C na slici 3.11a. Kod neznatnog prekoračenja tog graničnog vlačnog naprezanja, ne može se više uspostaviti ravnoteža s unutarnjim silama, te nastaje nepovratno rastezanje do konačnog kidanja metalne žice.



Slika 3.11: (a) Povećanjem naprezanja deformacija se povećava linearno do granice A, a zatim nelinearno do granice B. Unutar tih granica povratak u nerastegnuto stanje odvija se po istoj krivulji (elastično). Iznad granice B povratak se odvija po drugoj krivulji i završava u trajno rastegnutom stanju (plastičnost). Dolaskom do točke C nastupa daljnje nepovratno rastezanje i kidanje niti. (b) Deformacija gumene niti uz pojavu histereze pri povratku u nedeformirano stanje.

Vlačna napetost kod koje dolazi do kidanja iznosi za čelik oko 5 10^8 Nm^{-2}, a može biti i veća za posebne vrste čelika. Uočimo da se radi o nekoliko puta većoj vlačnoj napetosti od one koju smo u gornjem primjeru naveli za elastično rastezanje čeličnog štapa (ili žice) duljine 1 m za iznos od 1 mm.

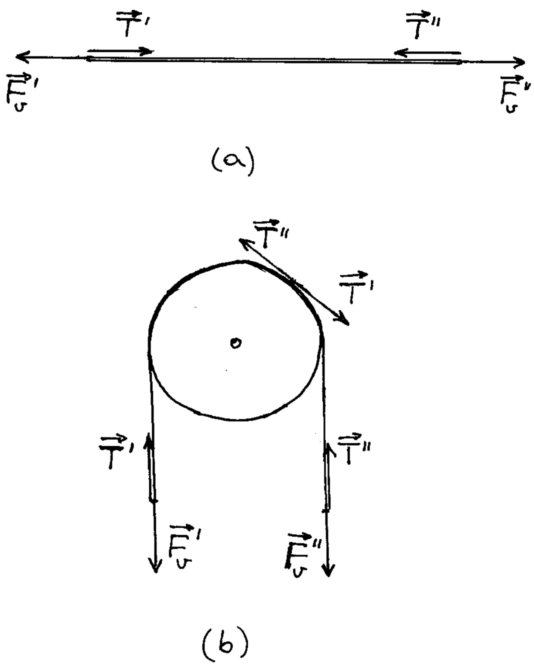
Za gumenu nit proces rastezanja i ponovnog stezanja je drukčiji nego za metalnu žicu i prikazan je na slici 3.11b. Gumena nit se može vratiti u prvobitno nedeformirano stanje (ishodišna točka krivulje na slici 3.11b), ali kod smanjivanja vanjskog vlačnog naprezanja, nit prolazi kroz druga stanja nego kod prethodnog rastezanja. To je pojava *elastične histereze* koja se grafički očituje u zatvorenoj petlji na slici 3.11b.

Napetost konopca ili niti

U praksi se često događa da se služimo konopcem, ili nekom niti, za vuču tijela. Vanjski čimbenik (npr. čovjek ili neki stroj) djeluje silom $\vec{F}_v$ na jedan kraj konopca, a drugi kraj konopca je vezan za tijelo. Intuitivno nam je jasno da se vanjska sila $\vec{F}_v$ prenosi putem konopca na tijelo. No, sada možemo dati malo detaljnije objašnjenje. Konopac se ponaša kao elastično tijelo za koje vrijedi cjelokupni gornji opis. Vanjski čimbenik s jedne strane i tijelo s druge strane djeluju na konopac parom sila prikazanim na slici 3.12a. Uslijed njihova djelovanja, konopac se malo rastegne, tj, nastane vlačna deformacija. Ravnotežno stanje u produljenom konopcu nastane zbog pojave unutarnjih sila, koje se suprotstavljaju deformaciji. Unutarnje sile smo u gornjem razmatranju na slici 3.10c označavali kao elastične sile $\vec{F}_{el}'$ i $\vec{F}_{el}''$, no kod konopca koji služi za vuču, ili za ovjes nekog tijela, upotrebljava se naziv *napetost* i označava se kao $\vec{T}'$ i $\vec{T}''$ na slici 3.12a.

Napomena: Za funkciju konopca, ili niti, nije bitna njihova vlačna deformacija. Zato se ne razmatra vlačno naprezanje $F_{\perp}/S$, tj. sila po jedinici poprečnog presjeka konopca, nego cjelovita sila napetosti T (engl. *tension*).

Napetost se u konopcu proteže od jednog kraja do drugog, kao i u slučaju modelnog molekularnog sustava koji smo razmatrali u prethodnome pododjeljku. Konopac ne mora biti ispružen, već može biti savijen preko koloture kao u primjeru s Atwoodovim padostrojem razmatranim u odjeljku 2.4.



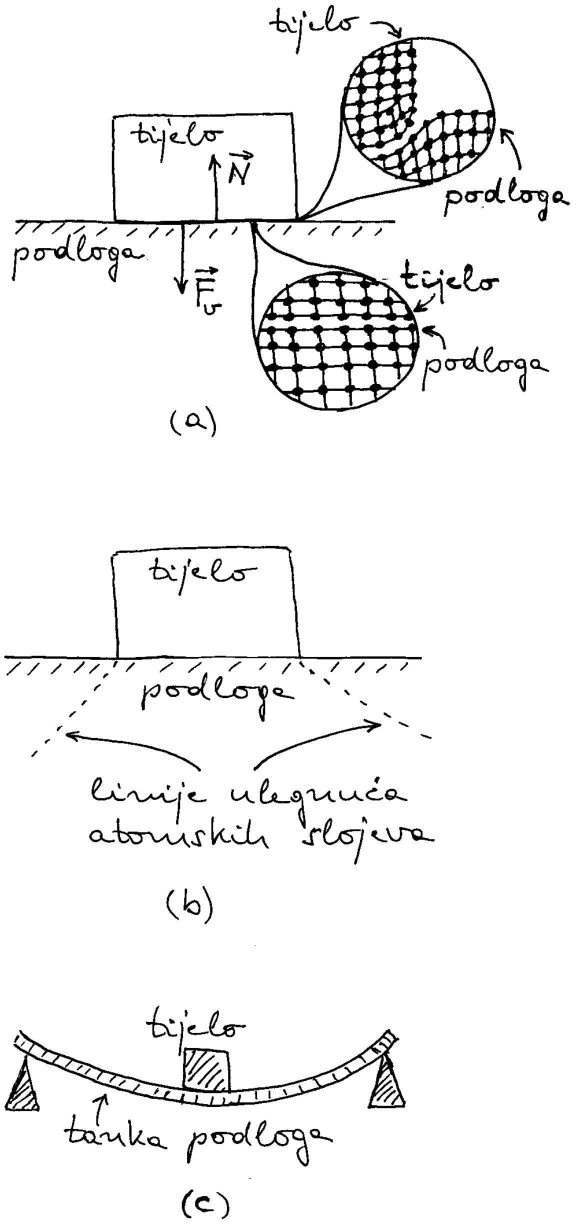
Slika 3.12: (a) Konopac na koji djeluju dvije vanjske sile jednakih iznosa ali suprotnih smjerova. U konopcu se javljaju unutarnje sile, također jednakih iznosa i suprotnih smjerova, koje predstavljaju napetost konopca. (b) U konopcu prebačenom preko koloture sile napetosti slijede oblik konopca u svakome njegovu dijelu.

Sile napetosti slijede liniju konopca, bez obzira na njegovu zavijenost oko postavljenih kolotura ili stupova. Na bilo kojem poprečnom presjeku konopca možemo reći da postoje sile $\vec{T}'$ i $\vec{T}''$, koje su tangencijalne na konopac u toj točki, kako prikazuje slika 3.12b. Silom $\vec{T}'$ djeluje jedna strana konopca na drugu, a druga strana konopca djeluje na prvu silom $\vec{T}''$. Razumije se, takve sile djeluju i na krajevima konopca na tijela za koja je konopac vezan.

3.3.3 Deformacija opterećene podloge i normalna sila

Kada neko tijelo leži na podlozi i tako miruje, moramo prema drugome Newtonovu zakonu zaključiti da ukupna sila na to tijelo iščezava. Situacija je prikazana na slici 3.13a. Sa stajališta podloge, sila kojom tijelo djeluje na nju, ima ulogu vanjske sile

$\vec{F}_v$, pa je tako i označavamo na slici 3.13a.



Slika 3.13: (a) Tijelo položeno na horizontalnu podlogu djeluje na nju silom $\vec{F}_v$. Uvećane slike simbolički prikazuju deformirane atomske slojeve. (b) Ulegnuće atomskih slojeva širi se u dubini podloge. (c) U tankoj podlozi deformacija atomskih slojeva ne može biti lokalizirana samo ispod tijela, nego se proteže od jednog potpornja do drugog.

Možemo očekivati da će podloga reagirati kao elastično tijelo, tj. da će u njoj nastati unutarnje sile koje se protive deformaciji podloge. Slika 3.13a simbolično prikazuje uvećani rub tijela i podlogu na kojoj tijelo leži. Možemo pratiti najgornji atomski sloj podloge. On je deformiran tako da je ulegnut ispod tijela. Razmaci susjednih bočnih atoma u tom sloju povećani su tamo gdje se atomski sloj najstrmije ugiba, tj. ispod krajeva tijela. Zbog toga se javljaju unutarnje sile koje nastoje smanjiti međuatomske bočne razmake u sloju i time ispraviti deformaciju (ulegnuće) atomskog sloja. Smjer tih sila je duž spojnice razmaknutih atoma, tj. duž strmine ugibanja, tako da one imaju vertikalnu komponentu. Očito je da te vertikalne komponente sila nastoje podignuti ulegnuti dio atomskog sloja podloge, a time i tijelo koje je na njega položeno.

No, većinski doprinos ukupnoj sili podloge na položeno tijelo dolazi od dijela atomskog sloja podloge izravno ispod tijela. Na uvećanoj slici možemo uočiti da su vertikalni razmaci među atomskim slojevima ispod tijela smanjeni, pa se javljaju unutarnje sile koje se tome protive. Svaki atomski sloj podloge ispod tijela djeluje na atomski sloj iznad sebe silom prema gore, a ovaj isto tako na još viši sloj, te konačno najgornji sloj djeluje na položeno tijelo. Tako nastaje ukupna sila kojom deformirana podloga djeluje na tijelo. Nazivamo je *normalnom silom* i označavamo je simbolom $\vec{N}$, kao na slici 3.13a.

Razmatranje deformacije podloge možemo zaključiti još jednim zapažanjem. Ulegnuće atomskih slojeva podloge, koji se nalaze ispod položenog tijela, sve je manje i manje što se ide više u dubinu podloge, ali se horizontalni raspon ulegnutog dijela atomskog sloja širi sve dalje od dimenzije tijela. Ujedno se smanjuje vertikalna stisnutost susjednih atomskih slojeva podloge ispod tijela. Prvi slojevi tik ispod ležišta tijela najviše su stisnuti, dok se stanje u dubini podloge približava normalnom razmaku atomskih slojeva kod neopterećene podloge. Simbolično je to prikazano na slici 3.13b.

Objašnjenje ovakvog ponašanja podloge je vrlo jednostavno. Najgornji atomski sloj, tik ispod položenog tijela, mora djelovati na položeno tijelo ukupnom normalnom silom $\vec{N}$ prema gore. Istom ukupnom silom prema gore mora djelovati svaki niži atomski sloj na onaj iznad njega. Kako se horizontalni raspon ulegnutog dijela atomskog sloja povećava silaskom u dubinu podloge (slika 3.13b), ukupna sila se može raspodijeliti na veći broj atoma, tj. dovoljna je manja sila po atomu. To se pak postiže time što se razmak između susjednih atomskih ravnina približava normalnom razmaku

kakav postoji kod neopterećene podloge.

Iz cjelokupnog gornjeg prikaza možemo zaključiti da je normalna sila podloge varijabilna, tj. da se prilagođuje sili kojom tijelo pritišće podlogu. Kada podloga nije opterećena, nema ni normalne sile. Kako se povećava opterećenje na podlogu, raste i normalna sila koju ona stvara.

Spomenimo i primjer iz odjeljka 2.2 (slika 2.7a) s čovjekom koji rukom upire u zid. Na tada postavljeno pitanje o tome kako neživi zid može mijenjati silu kojom djeluje na čovjekovu ruku, možemo sada odgovoriti da se radi o lokalnoj deformaciji atomskih slojeva na površini zida. Ta je deformacija nevidljiva za čovjekovo oko, ali ona ipak postoji. Stoga se javlja normalna sila zida na čovjekovu ruku, koja po iznosu odgovara upravo sili kojom čovjek upire u zid.

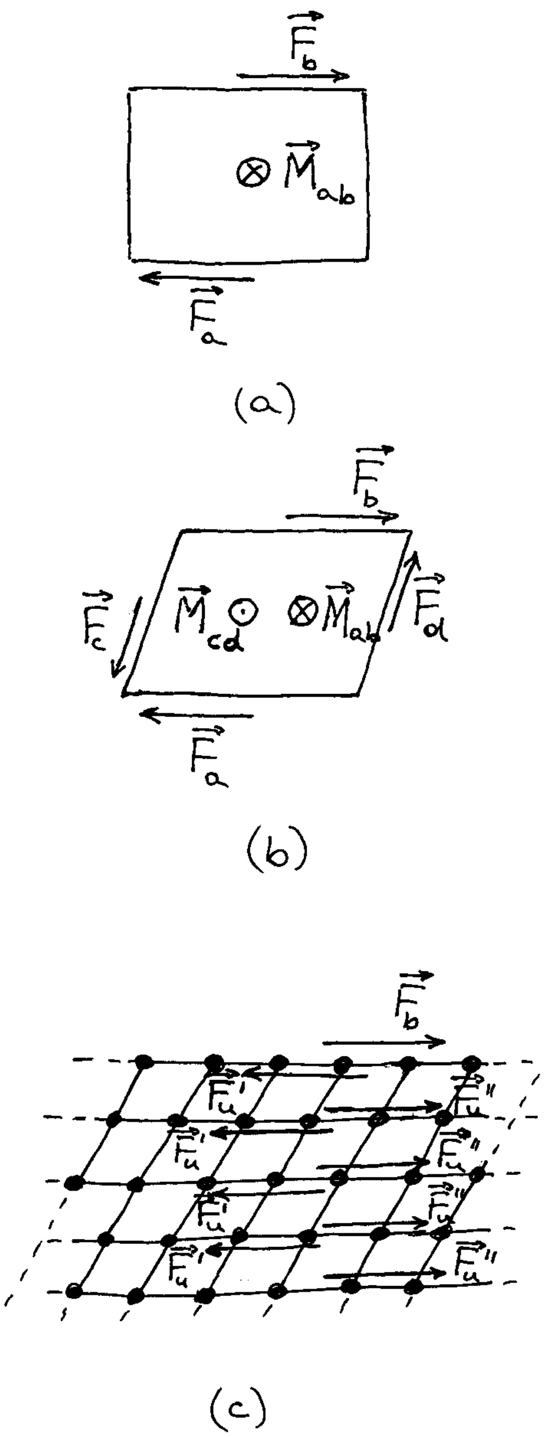
U svakom slučaju, normalna sila je posljedica unutarnjih međuatomskih sila, pa je i ona izvedena sila koja se temelji na elektromagnetskoj sili kao jednoj od osnovnih sila u prirodi.

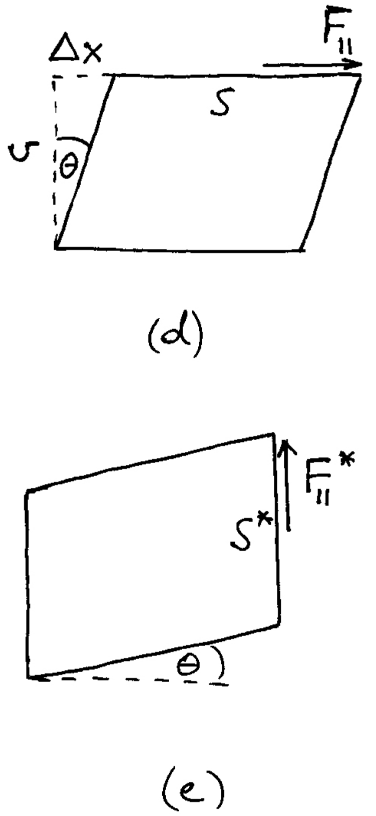
3.3.4 Elastično smicanje slojeva

Razmotrimo sada tijelo na koje djeluje par sila jednakih iznosa i suprotnih smjerova, ali ne leže na istom pravcu nositelju, nego na dvama paralelnim razmaknutim pravcima, kako prikazuje slika 3.14a. Sila $\vec{F}_a$ ima hvatište na donjoj plohi prikazanog tijela i djeluje paralelno s tom plohom, kao da je nastoji pomaknuti u određenu stranu. Sila $\vec{F}_b$ na sličan način djeluje na gornju plohu tijela, ali je nastoji pomaknuti na suprotnu stranu od donje plohe. Nije teško zaključiti iz svakodnevnog iskustva da bi u takvoj situaciji došlo do zakretanja (rotacije) tijela.

U poglavlju 7 detaljnije ćemo se baviti rotacijom krutog tijela. Ovdje samo navedimo da par sila $\vec{F}_a$ i $\vec{F}_b$, koje djeluju na razmaknutim paralelnim pravcima, stvaraju moment sile $\vec{M}_{ab}$, koji je okomit na ravninu u kojoj leže obje sile, što znači da je okomit na ravninu crtanja na slici 3.14a. Oko te osi nastala bi rotacija tijela nekom kutnom akceleracijom (v. odjeljak 2.5).

Ako želimo izbjeći rotaciju tijela, možemo na tijelo djelovati još jednim parom sila koji stvara suprotan moment sile, tj. nastoji zakrenuti tijelo u suprotnom smjeru. Situacija je prikazana na slici 3.14b. Pored para sila $\vec{F}_a$ i $\vec{F}_b$, djelujemo na tijelo i parom sila $\vec{F}_c$ i $\vec{F}_d$ koje imaju hvatišta na bočnim plohama i djeluju paralelno s tim plohama, ali na suprotne strane. Potonji par sila stvara moment sile $\vec{M}_{cd}$, koji je jednak po iznosu, ali suprotnog smjera od $\vec{M}_{ab}$. Ukupni moment sile iščezava ($\vec{M}_{ab} + \vec{M}_{cd} = 0$), što je uvjet da tijelo ne dobiva kutnu akceleraciju. Na slici 3.14b tijelo ne rotira u odabranom inercijalnom sustavu.





Slika 3.14: (a) Tijelo na koje djeluje par vanjskih sila duž nasuprotnih ploha počelo bi se zakretati. (b) Dva para sila stvaraju momente sila jednakih iznosa ali suprotnih smjerova. Tijelo ne rotira, ali se deformira. (c) Simbolički prikaz smicanja atomskih slojeva. Na svaki atomski sloj djeluju silama susjedni slojevi tako da se uspostavi ravnoteža u deformiranom stanju. (d) Prikaz parametara za analizu posmične deformacije. (e) Ista deformacija tijela može se alternativno prikazati kao da je nastala vertikalnim smicanjem atomskih slojeva.

Ipak, djelovanje dvaju momenata sila jednakih iznosa i suprotnih smjerova, ne ostaje bez učinka na tijelo. Ono se deformira kako prikazuje slika 3.14b. Ova se deformacija bitno razlikuje od istezanja ili stiskanja, koje smo obrađivali u prethodnim pododjeljcima. Da bismo je razumjeli, moramo pogledati uvećanu sliku 3.14c na kojoj su simbolički prikazani atomski slojevi tijela. Kod deformiranog tijela, susjedni atomski slojevi su pomaknuti paralelno jedan prema drugome. To se naziva *smicanje* (engl. *shear*) slojeva, odnosno *posmična deformacija.*

Na slici 3.14c prikazana je vanjska sila $\vec{F}_b$ koja djeluje na najgornji atomski sloj. No, atomi iz sljedećeg sloja djeluju silama na gornje atome i nastoje ih vratiti u prvobitne položaje. To djelovanje predstavlja unutarnju silu $\vec{F}_u^{\,\prime}$ na cjelokupni gornji atomski sloj. Atomi iz gornjeg sloja djeluju pak na atome iz donjeg sloja tako da ih nastoje povući u za sobom u stranu, što predstavlja silu $\vec{F}_u^{\,\prime\prime}$ na cjelokupni donji atomski sloj. Ovakve unutarnje sile se javljaju i kod svih drugih atomskih slojeva, od najgornjeg do najdonjeg. Na najdonji sloj djeluje završno vanjska sila $\vec{F}_a$.

Napomena: U deformaciji se postiže novo ravnotežno stanje, što znači da ukupna sila na svaki pojedini atomski sloj iščezava. Tako na najgornji atomski sloj djeluje vanjska sila $\vec{F}_b$ i unutarnja sila $\vec{F}_u^{\,\prime}$ koja dolazi od sloja ispod njega, te je $\vec{F}_b + \vec{F}_u^{\,\prime} = 0$. Na bilo koji niži sloj djeluje sila $\vec{F}_u^{\,\prime}$ koja dolazi od sloja ispod njega i sila $\vec{F}_u^{\,\prime\prime}$ koja dolazi od sloja iznad njega, te vrijedi $\vec{F}_u^{\,\prime} + \vec{F}_u^{\,\prime\prime} = 0$.

Makroskopski opis posmične deformacije možemo pratiti na slici 3.14d. Vanjsku silu $\vec{F}_b$ označili smo simbolom $\vec{F}_{||}$ kako bismo naglasili da ona djeluje paralelno s gornjom plohom. Za nastanak posmične deformacije bitan je iznos sile na jedinicu površine $F_{||}/S$, što se naziva *smicajuće naprezanje.* Deformaciju tijela mjerimo iznosom posmaka Δx gornje plohe u odnosu na njen prvobitni položaj. Iz slike 3.14d vidljivo je da će posmak Δx biti veći ako je visina v tijela veća. Stoga se definira *relativna posmična deformacija* omjerom $\Delta x/v$. Za malene iznose relativne posmične deformacije vrijedi linearna ovisnost

$$\frac{\Delta x}{v} = \frac{1}{Z}\,\frac{F_{||}}{S} \tag{3.31}$$

gdje je Z *modul elastičnog smicanja.* Kao primjer, možemo navesti da je za čelik $Z = 7,5\ 10^{10}\ \mathrm{Nm}^{-2}$, što je oko tri puta manje od Youngova modula elastičnosti Y, koji smo gore navodili za istezanje čelične šipke.

Relativnu posmičnu deformaciju možemo još izraziti i pomoću kuta θ koji je obilježen na slici 3.14d. Vidimo da je $\Delta x/v = tg\ \theta$. Za malene kutove vrijedi aproksimacija $tg\ \theta \approx \theta$, pa i jednadžbu (3.31) možemo napisati kao

$$\theta = \frac{1}{Z}\,\frac{F_{||}}{S} \tag{3.32}$$

Na slici 3.14c cjelokupna deformacija tijela je interpretirana kao smicanje horizontalnih atomskih slojeva od najdonjeg do najgornjeg. Zato je na slici 3.14d prikazana samo horizontalna sila na gornju plohu površine S. Međutim, tu istu deformaciju tijela mogli bismo jednakopravno interpretirati kao smicanje vertikalnih atomskih slojeva od lijevog do desnog kao na slici 3.14e. U tome slučaju ističemo ulogu sile $F^*_{||}$ na bočnu plohu površine S^*. Moramo uočiti da je deformirano tijelo na slici 3.14e identično onome na slici 3.14d, ali je prikazano zakrenuto za kut θ.

Torzija elastične šipke ili niti

Važan primjer smicanja atomskih slojeva nalazimo kod *torzije* (lat. *torquere - okretati, uvijati*) elastične šipke ili niti. Slika 3.15a prikazuje šipku u nedeformiranom stanju, kojoj je uzduž ucrtana jedna linija kao oznaka za kasnije praćenje deformacije. Ako na donji kraj šipke djelujemo parom sila $\vec{F}_a^{\,\prime}$ i $\vec{F}_a^{\,\prime\prime}$ koje stvaraju moment sile $\vec{M}_a$ duž osi šipke prema dolje, a na gornji kraj šipke istodobno djelujemo parom sila $\vec{F}_b^{\,\prime}$ i $\vec{F}_b^{\,\prime\prime}$ koje stvaraju moment sile $\vec{M}_b$ duž osi šipke prema dolje, nastaje torzija šipke. Na slici 3.15b vidi se uzdužna crta koja pokazuje kako se šipka deformirala.

Smicanje atomskih slojeva iz poprečnog presjeka šipke možemo pratiti simbolički na slici 3.15c. Prikazana su dva jednaka kružna isječka iz atomskih slojeva koji leže jedan povrh drugoga. Smicanje je najveće za atome na obodu, te se smanjuje prema središnjoj osi šipke oko koje nastaje torzija. Isto vrijedi za cijeli krug atomskog sloja. Jasno je da se kod relativnog zakreta jednog atomskog sloja prema drugome javljaju unutarnje sile koje nastoje povratiti sustav u prvobitno nedeformirano stanje. Te sile djeluju tangencijalno na kružnicu oko osi torzije, te stvaraju moment sile. Kod torzije se uspostavi novo ravnotežno stanje između vanjskog momenta sile i momenta unutarnjih sila.

Za praktične potrebe važno je upoznati odnos između momenta vanjske sile i kuta torzije neke elastične šipke. Slika 3.15b prikazuje kut torzije φ za koji se zakrene donja baza šipke u odnosu na gornju. Ako je radijus šipke R, obilježena točka na obodu donje baze zakrene se za luk $s = R\,\varphi$. Bočno od te linije zamislimo kružne isječke šipke kako prikazuje uvećano slika 3.15d. Posmična deformacija stvara kut nagiba θ prema vertikali na vanjskoj plohi šipke. Ako je debljina isječka duž vertikalne osi jednaka Δl, a posmak donje stranice prema gornjoj iznosi Δs, onda je $tg\,\theta \approx \theta = \Delta s/\Delta l$. Iz tog odnosa slijedi da je $\Delta s = \theta\,\Delta l$. Ako zbrojimo zakrete svih isječaka od gornje do donje baze šipke, dobijemo ukupni luk zakreta $s = \theta\, l$, gdje je l duljina šipke. Izveli smo, dakle, jednakost

$$R\,\varphi = \theta\, l \tag{3.33}$$

Postavlja se pitanje koliki je potreban moment sile da se postigne neki zadani kut torzije φ za danu elastičnu šipku. U tu svrhu razmotrimo smicanje jednog pojasa na kružnom isječku prikazanom na slici 3.15d. Pojas se nalazi na udaljenosti r od osi rotacije, tako da za njega relativna posmična deformacija iznosi

$$\vartheta = \frac{r}{R}\,\theta \tag{3.34}$$

Naime, posmične deformacije nema ($\vartheta = 0$) za pojas tik uz os torzije ($r = 0$), dok za pojas uz površinu šipke ($r = R$) deformacija doseže maksimalni iznos θ, koji je zadan relacijom (3.33). Na pojas možemo primijeniti opći izraz za elastičnu torziju iz jednadžbe (3.32)

$$\vartheta = \frac{1}{Z}\,\frac{dF_{||}}{dS} = \frac{1}{Z}\,\frac{dF_{||}}{(r\,d\psi)\,dr} \tag{3.35}$$

gdje je $d\psi$ vršni kut kružnog isječka, tako da je površina pojasa na udaljenosti r od osi torzije $dS = (r\,d\psi)\,dr$. Na gornju i donju plohu pojasa djeluje par sila, a iznos svake od njih smo označili s $dF_{||}$.

Iz jednadžbi (3.34) i (3.35) slijedi da je za zadanu deformaciju promatranog pojasa potrebno da iznos paralelne sile bude

$$dF_{||} = Z\,\theta\,\frac{1}{R}\,r^2\,dr\,d\psi \tag{3.36}$$

Moment te sile oko osi torzije iznosi

$$dM = r\,dF_{||} = Z\,\theta\,\frac{1}{R}\,r^3\,dr\,d\psi \tag{3.37}$$

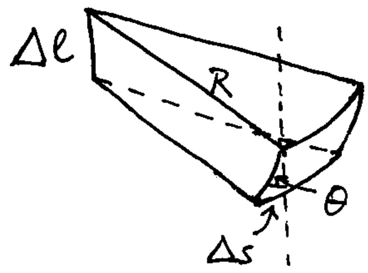
Sada možemo lako izračunati ukupni moment sile za zadanu torziju tako da zbrojimo momente sila dM za sve pojase u kružnome isječku, a zatim za sve isječke koji čine puni krug

$$M = \int dM = Z\,\theta\,\frac{1}{R}\int_0^R r^3\,dr\int_0^{2\pi} d\psi = \frac{\pi}{2}\,Z\,\theta\,R^3 \tag{3.38}$$

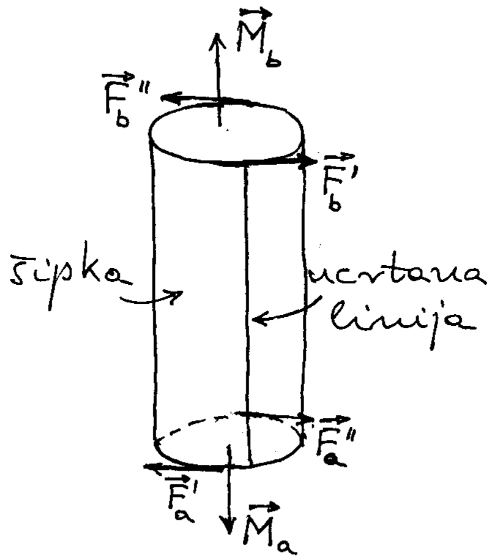
Kut torzije φ za šipku duljine l, radijusa R i modula elastičnog smicanja Z, dobivamo iz jednadžbi (3.33) i (3.38)

$$\varphi = \frac{2\,l}{\pi\,Z\,R^4}\,M \tag{3.39}$$

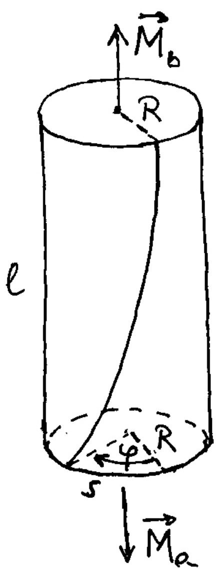
Kut torzije elastične šipke raste linearno s primije-



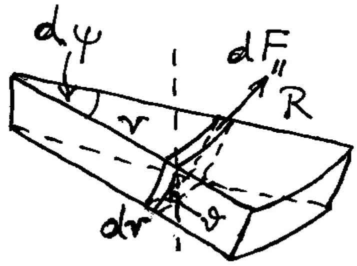
(c)



(a)



(b)



(d)

Slika 3.15: (a) Šipka cilindričnog oblika prije početka djelovanja parova sila na suprotnim krajevima. Ucrtana je uzdužna linija kao pokazatelj nedeformiranog stanja šipke. (b) Djelovanjem dvaju momenata sila jednakih iznosa ali suprotnih smjerova, dolazi do uvijanja šipke što se uočava na zavinutosti prethodno ucrtane linije. Kut φ predstavlja ukupni zakret jedne baze šipke prema drugoj. (c) Uvećani prikaz zamišljenog isječka šipke koji je doživio deformaciju smicanja donjeg sloja prema gornjemu. Uočava se kut θ između vertikale i novog smjera bočne linije na kraju isječka. (d) Isječak šipke na kojem je ucrtan zamišljeni pojas debljine dr na udaljenosti r od vrha isječka. Na gornju i donju horizontalnu plohu tog pojasa djeluju sile $dF_{||}$ na suprotne strane, uzrokujući deformaciju smicanja pojasa. Bočne linije pojasa otklonjene su od vertikale za kut ϑ.

njenim momentom sile. Za dani moment sile, kut torzije je veći za šipku veće duljine, a znatno se smanjuje s povećanjem njene debljine. Samo za jako tanku i dugačku nit dobivamo značajan kut torzije uz maleni moment sile. Ovo svojstvo se rabi kod osjetljivih torzijskih instrumenata. O jednom primjeru je bilo riječi u pododjeljku 3.2.1 gdje je opisan znameniti Cavendishov pokus.

3.3.5 Elastičnost opruge

Opruge imaju široku primjenu u praksi, pa je korisno detaljnije upoznati njihovo svojstvo elastičnosti. Na slici 3.16a prikazana je jedna opruga u svom prirodnom stanju, te u deformiranom stanju kada je rastegnuta uslijed djelovanja para vanjskih sila $\vec{F}_v'$ i $\vec{F}_v''$. Ova deformacija je naizgled slična istezanju elastičnog štapa ili niti, pa bi se moglo pomisliti da je povezana s Youngovim modulom elastičnosti kako je to opisano u pododjeljku 3.3.2. Međutim, pažljivije razmatranje ove deformacije na primjeru jednog zavoja opruge, koji je prikazan uvećano na slici 3.16b, postaje jasno da se radi o smicanju atomskih slojeva, a ne o povećavanju razmaka među slojevima. Naime, kada bismo pratili poprečne presjeke žice od početka do kraja jednog zavoja, ustanovili bismo da se u procesu deformacije oni razmiču paralelno jedan drugome u smjeru osi opruge. To se postiže tako da se uzastopce svaki atomski sloj u poprečnom presjeku posmakne prema prethodnome sloju za neki maleni iznos.

Možemo reći da vanjske sile djeluju na krajnje poprečne presjeke opruge i to paralelno s njima, tako da njihov iznos možemo označiti kao $F_{||}$. Posmično naprezanje je $F_{||}/S$, gdje je S poprečni presjek žice od koje je načinjena opruga. Smicanje slojeva se odvija na cijeloj duljini savijene žice. Ako opruga ima N zavoja, a njen radijus je R, duljina žice je približno $2\,\pi\,R\,N$. Ako se dva krajnja poprečna presjeka opruge razmaknu u deformaciji za Δl, onda to predstavlja ukupni posmak, pa možemo primijeniti jednadžbu (3.31) s time da zamislimo kao da je žica koja čini oprugu razmotana, te svojom duljinom $2\,\pi\,R\,N$ predstavlja ono što je na slici 3.14d označeno kao visina v tijela. Tako dobivamo

$$\frac{\Delta l}{2\,\pi\,R\,N} = \frac{1}{Z}\,\frac{F_{||}}{S} \tag{3.40}$$

Za dani iznos sile $F_{||}$, opruga se produlji za

$$\Delta l = \frac{2\,\pi\,R\,N}{Z\,S}\,F_{||} \tag{3.41}$$

Vidimo da se opruga produlji više ako ima veći radijus R i veći broj N zavoja, te ako je načinjena od tanje žice (manji S). Opruge su obično načinjene od čelika, tako da je modul smicanja Z zadan.

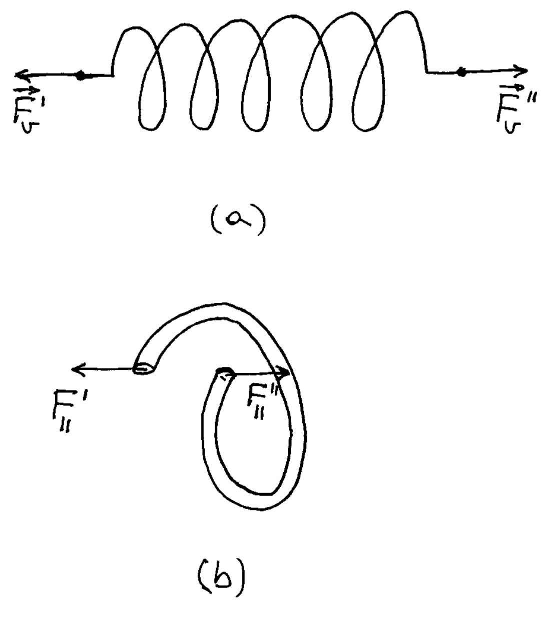
Hookeov zakon elastičnosti

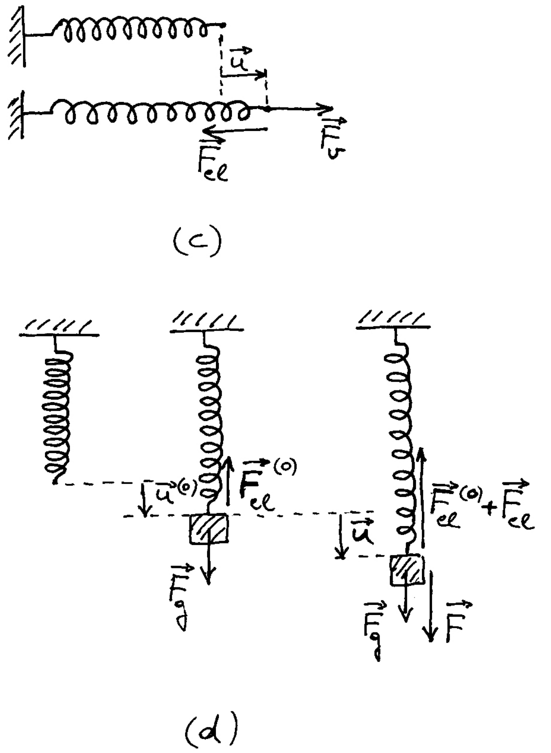
Neka je opruga jednim krajem pričvršćena za nepomični zid, dok je njen drugi kraj slobodan, kako prikazuje slika 3.16c. Primjenom vanjske sile $\vec{F}_v$ na slobodan kraj opruge možemo izvršiti njegov pomak za vektor $\vec{u}$ u smjeru vanjske sile. Pritom se javlja elastična sila opruge

$$\vec{F}_{el} = -K\vec{u} \tag{3.42}$$

gdje predznak minus ukazuje na to da elastična sila ima suprotan smjer od vektora pomaka $\vec{u}$.

Napomena: Na slici 3.16c nije prikazana sila kojom nepomični zid djeluje na oprugu, no ne smijemo zaboraviti da ta sila nužno postoji. Ona je jednaka po iznosu i suprotnoga smjera od vanjske sile $\vec{F}_v$ koja djeluje na slobodnom kraju opruge. Isto tako se javlja i elastična sila opruge koja je jednaka po iznosu i suprotnoga smjera od sile iz jednadžbe (3.42), ali nije prikazana na slici 3.16c.





Slika 3.16: (a) Opruga se rastegne uslijed djelovanja dviju vanjskih sila jednakih iznosa ali suprotnih smjerova. (b) Uvećani prikaz jednog zavoja opruge. Na svaki od njegovih krajnjih poprečnih presjeka djeluju plošne sile koje ih razmiču duž smjera osi opruge. Duž zavoja nastaje deformacija smicanja susjednih atomskih slojeva u poprečnim presjecima. (c) Djelovanjem vanjske sile opruga se produlji, a u njoj nastaje unutarnja elastična sila koja se toj deformaciji protivi. Vrijedi Hookeov zakon elastičnosti. (d) Ravnotežna stanja opruge u različitim uvjetima.

Linearnu ovisnost rastezanja opruge i elastične sile koja se pritom javlja ustanovio je Robert Hooke u drugoj polovici 17. stoljeća, pa se po njemu ona naziva *Hookeov zakon.* Veličina K se obično naziva *konstanta opruge.* U Hookeovo doba nije bila poznata atomska struktura tvari i mikroskopska slika deformacije, no danas možemo usporedbom s jednadžbom (3.41) utvrditi da je $K = Z\,S/(2\,\pi\,R\,N)$. Opruga ima veću konstantu K ako je izrađena od deblje žice (veći S). S druge strane, njena konstanta je manja ako zavoji imaju veći radijus R, te ako ima veći broj N zavoja.

Tijelo obješeno na oprugu

Neka je opruga učvršćena jednim krajem na nepomični strop a na njenom slobodnom kraju je obješeno tijelo mase m, kako prikazuje slika 3.16d. Na tijelo djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema dolje. Opruga se rastegne tako da se slobodan kraj pomakne za $\vec{u}^{(0)}$ prema dolje, te se pojavi elastična sila $\vec{F}_{el}^{(0)} = -K\vec{u}^{(0)}$ kojom opruga djeluje na tijelo prema gore. Ravnotežno stanje se uspostavi kod takvog produljenja opruge $\vec{u}^{(0)}$ da ukupna sila na tijelo iščezava ($\vec{F}_g + \vec{F}_{el}^{(0)} = 0$).

Ako na tijelo djelujemo dodatnom vanjskom silom $\vec{F}$ duž smjera opruge, doći će do dodatnog pomaka $\vec{u}$, te pojave dodatne elastične sile $\vec{F}_{el}$, što je sve prikazano na slici 3.16d. Za ukupni pomak i elastičnu silu mora također vrijediti Hookeov zakon

$$\vec{F}_{el}^{(0)} + \vec{F}_{el} = -K(\vec{u}^{(0)} + \vec{u}) \tag{3.43}$$

Uvažavajući činjenicu da je $\vec{F}_{el}^{(0)} = -K\vec{u}^{(0)}$, lako uviđamo da i za dodatne veličine zasebno vrijedi isti odnos iz Hookeova zakona $\vec{F}_{el} = -K\vec{u}$. To je posljedica linearnosti odnosa u Hookeovu zakonu.

Možemo, dakle, usredotočiti pažnju samo na dodatni pomak $\vec{u}$, odnosno računati kao da je početno ravnotežno stanje ono u kojemu tijelo miruje obješeno na donji kraj opruge. Ako vanjska sila $\vec{F}$ djeluje prema dolje, pomak $\vec{u}$ je također prema dolje, tj. opruga se rasteže. Elastična sila $\vec{F}_{el}$ ima smjer prema gore, tako da nastoji vratiti oprugu u prvobitno ravnotežno stanje. U slučaju kada bi vanjska sila $\vec{F}$ djelovala prema gore, imao bi i pomak $\vec{u}$ isti smjer, pa bi se opruga stezala u odnosu na prethodno ravnotežno stanje. Elastična sila $\vec{F}_{el}$ imala bi tada smjer prema dolje (suprotno od $\vec{F}_{el}^{(0)}$).

Spajanje opruga u seriju

Neka su nam na raspolaganju dvije različite opruge sa konstantama K_1 i K_2. Možemo ih upotrijebiti zajedno tako da ih povežemo u seriju, te razmotrimo svojstva nastale cjeline.

Slika 3.17a prikazuje serijski spojene opruge s time da je prva opruga učvršćena jednim krajem na nepomični zid, a na kraju druge opruge djeluje neka vanjska sila $\vec{F}$ koja uzrokuje ukupno produljenje opruga za $\vec{u} = \vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. Stoga se javlja elastična sila $\vec{F}_{el}$ koja nastoji stegnuti opruge na prvobitnu ravnotežnu duljinu. Razumije se, i nepomični zid

djeluje na opruge vanjskom silom, no ona nije prikazana na slici 3.17a. Isto tako nije prikazana ni druga elastična sila koja djeluje u paru s prvom i steže opruge.

Za daljnju analizu bitno je uočiti da je kod serijskog spoja dviju opruga elastična sila $\vec{F}_{el}$ jednaka za obje opruge, bez obzira na njihovu različitost. Naime, elastična sila se pojavljuje kao napetost koja se nužno proteže od jednog do drugog kraja bilo koje rastegnute elastične konstrukcije. Ovo je općenita tvrdnja koja slijedi iz uvjeta ravnoteže, tj. činjenice da na bilo koji djelić rastegnute elastične konstrukcije djeluju dvije sile jednakih iznosa i suprotnih smjerova, a dolaze od ostatka konstrukcije s jedne i druge strane promatranog djelića. Uvažavajući još i treći Newtonov zakon, lako možemo dokazati tvrdnju o kontinuitetu napetosti duž rastegnute elastične konstrukcije.

Provedimo na ovome konkretnom slučaju detaljan dokaz o jednakosti elastične sile $\vec{F}_{el}$ u dvjema različitim oprugama spojenim u seriju. Razmotrimo najprije drugu oprugu. Na nju djeluje vanjska sila $\vec{F}$ s jedne strane, te sila koja dolazi od prve opruge i ima također ulogu vanjske sile prema drugoj opruzi, te nužno mora biti jednaka $-\vec{F}$ da bi druga opruga bila u ravnoteži. No, prema trećem Newtonovu zakonu, druga opruga nužno djeluje na prvu silom reakcije $-(-\vec{F})$. Time smo zapravo utvrdili da na prvu oprugu djeluje sila $\vec{F}$, te se i u njoj mora pojaviti ista elastična sila kao i u drugoj opruzi.

Zbog različitosti opruga, njihova produljenja ne će biti jednaka uz istu elastičnu silu. Zato pišemo

$$\vec{u}_1 = -\frac{1}{K_1}\,\vec{F}_{el} \tag{3.44}$$

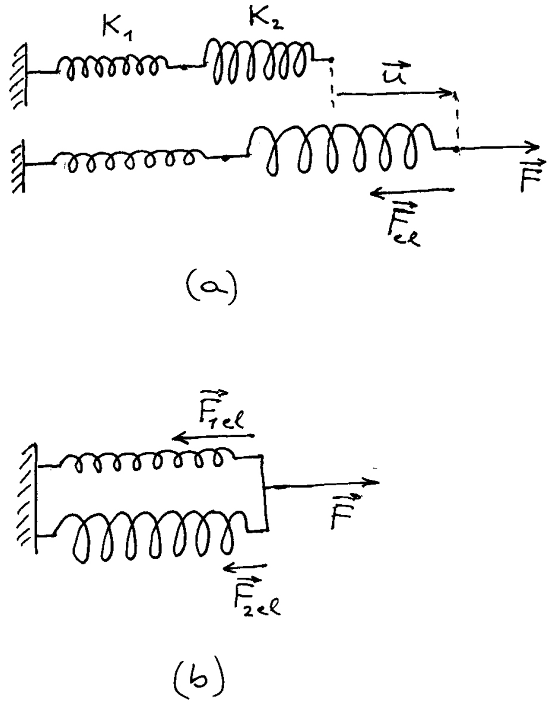
$$\vec{u}_2 = -\frac{1}{K_2}\,\vec{F}_{el} \tag{3.45}$$

Interesira nas ukupno produljenje dviju opruga spojenih u seriju, pa zbrajanjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = -(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2})\,\vec{F}_{el} \tag{3.46}$$

Sada možemo reći da bismo dvije opruge spojene u seriju mogli zamijeniti jednom jedinom oprugom kojoj bi konstanta K bila određena relacijom

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \tag{3.47}$$



Slika 3.17: (a) Spajanje opruga u seriju. Kod rastezanja cijelog sustava nastaje jedna te ista elastična sila duž njega. (b) Spajanje opruga u paralelu. Opruge se rastegnu za jednak iznos, ali elastične sile u njima mogu biti različite.

Zamjenska opruga bi uz isto ukupno produljenje $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ proizvela jednaku elastičnu silu $\vec{F}_{el}$.

Kao poseban primjer navedimo još da kod spajanja u seriju dviju jednakih opruga, koje imaju konstantu K, dobivamo ekvivalent jedne opruge koja ima konstantu $K/2$, tj. upola je slabija od pojedinačne opruge. Obrazloženje je jednostavno i uvjerljivo ako uočimo da se kod spoja u seriju svaka opruga produlji, te nastane dvostruko produljenje u odnosu prema onome kada je uključena samo jedna opruga uz istu vanjsku silu.

Spajanje opruga u paralelu

Razmotrimo sada spajanje dviju različitih opruga u paralelu. Ono što je kod paralelnog spoja zajedničko objema oprugama jest njihovo produljenje $\vec{u}$. To je lako uočljivo na slici 3.17b i ne treba se posebno dokazivati. Zbog različitosti opruga, u svakoj od njih će, uz isto produljenje, nastati unutarnja elastična sila drugačijeg iznosa

$$\vec{F}_{1\,el} = -K_1\,\vec{u} \tag{3.48}$$
$$\vec{F}_{2\,el} = -K_2\,\vec{u} \tag{3.49}$$

Kod paralelnog spoja moramo zbrojiti elastične sile dviju opruga jer se njihovom rezultantom postiže ravnoteža prema vanjskoj sili $\vec{F}$ koja je prikazana na slici 3.16g. Stoga pišemo

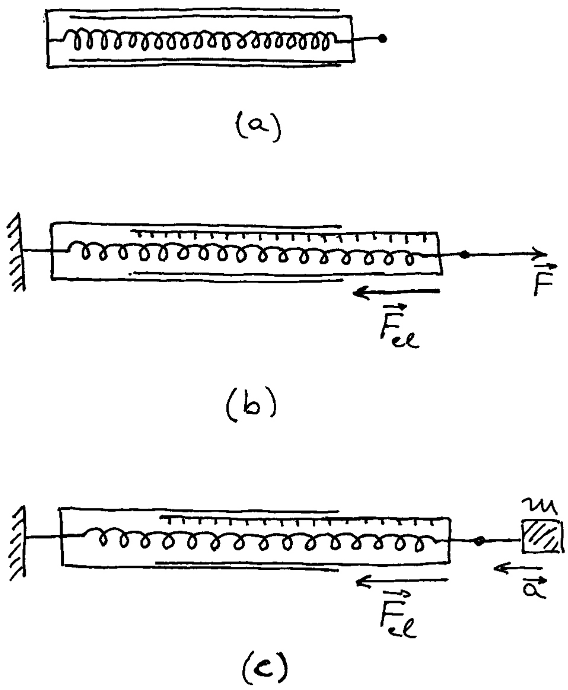
$$\vec{F}_{1\,el} + \vec{F}_{2\,el} = -(K_1 + K_2)\,\vec{u} \tag{3.50}$$

Očito je da bismo dvije opruge spojene u paralelu mogli zamijeniti jednom jedinom oprugom, koja bi imala konstantu K određenu prema relaciji

$$K = K_1 + K_2 \tag{3.51}$$

Kod spajanja opruga u paralelu, zbrajaju se njihove konstante, tj. dobivamo ekvivalent jedne jače opruge. Elastična sila u ekvivalentnoj zamjenskoj opruzi jednaka je zbroju $\vec{F}_{el} = \vec{F}_{1\,el} + \vec{F}_{2\,el}$.

Dodajmo ovome razmatranju još jedan pogled na danu situaciju. Mogli bismo smatrati kao da se vanjska sila $\vec{F}$, koja djeluje na dvije paralelno spojene opruge, formalno dijeli na dvije vanjske sile $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ od kojih svaka djeluje na odgovarajuću oprugu. Razdioba sila je takva da se zadovolji $\vec{F}_{1\,el} = -\vec{F}_1$ i $\vec{F}_{2\,el} = -\vec{F}_2$.



Slika 3.18: (a) Prikaz dinamometra u presjeku. (b) Dinamometar je jednim krajem pričvršćen o nepomični zid, a na drugi kraj djeluje neka vanjska sila. Simbolički su prikazane oznake baždarenog dinamometra. (c) Načelna mogućnost baždarenja dinamometra uz primjenu drugoga Newtonova zakona.

Dinamometar

Na bazi elastične opruge može se konstruirati *dinamometar* kao jednostavan uređaj za mjerenje sile. Na slici 3.18a prikazan je princip konstrukcije dinamometra. Glavni element dinamometra čini jedna opruga. Ona je smještena u dvama šupljim cilindrima koji su malčice različitih radijusa tako da jedan može ulaziti unutar drugoga. Krajevi opruge su učvršćeni na nasuprotne cilindre s unutrašnje strane tako da se izvlačenjem cilindara jednog iz drugog rasteže sama opruga.

Dinamometar mora biti prethodno *baždaren*. To znači da se primjenjuje poznata vanjska sila i ucrtava na vanjskoj stijenci užeg cilindra do koje mjere se izvukao iz šireg cilindra. Primjer je prikazan na slici 3.18b.

Logično je postaviti pitanje kako bismo mogli neovisno utvrditi iznos sile koja bi nam zatim poslužila za baždarenje dinamometra. Sigurno je da bismo neki novi dinamometar mogli baždariti pomoću nekog ranije baždarenog dinamometra, no to nas ipak vodi na principijelno pitanje kako obaviti baždarenje prvoga dinamometra. Sjetimo se da je sila definirana pomoću Newtonovih zakona, te da se u njima ne spominje dinamometar ni elastična deformacija opruge. Sukladno drugome Newtonovu zakonu, silu možemo mjeriti tako što izmjerimo akceleraciju tijela poznate mase na koje djeluje ta sila.

Na slici 3.18c prikazana je načelna mogućnost takvog baždarenja dinamometra. Dinamometar je jednim krajem učvršćen na nepomični zid, a na drugome njegovu kraju je vezano tijelo poznate mase m. Zamislimo idealne uvjete u kojima tijelo može klizati na horizontalnoj, savršeno glatkoj površini bez trenja. Ako dinamometar najprije rastegnemo povlačenjem tijela pomoću vanjske sile, a zatim tijelo pustimo, ono će se gibati pod utjecajem elastične sile $\vec{F}_{el}$. Ako uspijemo izmjeriti akceleraciju $\vec{a}$ tijela u trenutku kada je dinamometar rastegnut za neki pomak $\vec{u}$, možemo utvrditi da je

tada na tijelo djelovala sila

$$\vec{F}_{el} = m\,\vec{a} \tag{3.52}$$

To je temelj za baždarenje. Produljenju dinamometra za iznos $|\vec{u}|$ odgovara sila iznosa $|\vec{F}_{el}|$. Ako mjerenje akceleracije izvodimo kod različitih pomaka $\vec{u}$, dobit ćemo pripadajuće vrijednosti elastične sile, pa možemo ucrtati cijelu skalu na dinamometru.

Ova rasprava ima više načelno, nego praktično značenje. Bitno je uočiti da ne možemo putem dinamometra provjeriti valjanost drugoga Newtonova zakona. Naime, ako smo dinamometar baždarili uz pretpostavku valjanosti drugoga Newtonova zakona, nije onda logično da se tako baždareni dinamometar upotrijebi za provjeravanje toga istoga zakona. Prisjetimo se da smo to već istaknuli povodom rasprave o Newtonovim zakonima u odjeljku 2.2.

3.3.6 Opća teorija elastičnosti

U dosadašnjim smo razmatranjima upoznali samo jednostavne slučajeve elastičnih deformacija, koji se svode na istezanje ili smicanje atomskih slojeva. U prvome slučaju, elastičnost tijela je izražena putem Youngova modula Y, a u drugome je važan modul elastičnog smicanja Z. Međutim, naprezanje elastičnog tijela može biti složenije, tj. sile mogu djelovati na tijelo tako da dolazi istodobno do istezanja i do smicanja atomskih slojeva. Tada je i deformacija tijela složenija, a svojstvo elastičnosti tijela ne možemo izraziti samo jednim parametrom. U takvim se slučajevima primjenjuje opća teorija elastičnosti kojom se mogu rješavati slučajevi naprezanja i deformacija raznih konstrukcija u građevinarstvu, strojarstvu, brodogradnji, zrakoplovnoj tehnici, itd. Ovdje ćemo iznijeti samo neke naznake opće teorije elastičnosti, koja je inače jako složena.

U općoj teoriji elastičnosti polazi se od promatranja naprezanja i deformacije jednog zamišljenog djelića u unutrašnjosti elastičnog tijela. Naprezanje tog djelića tijela uzrokuju okolni dijelovi tijela koji su u kontaktu s promatranim djelićem. Razumije se, ti okolni dijelovi tijela su također izloženi naprezanju uslijed kontakata sa svojim susjedima, a sve zapravo potiče od djelovanja vanjskih sila na nekim mjestima na površini tijela. Naprezanje i deformacija postaju tenzorske veličine za koje valja postaviti uvjete ravnoteže i kontinuiteta na zamišljenim prerezima unutar tijela. Analitičko je rješenje moguće samo za jednostavnije oblike tijela (npr. grede, ploče), dok se u ostalim realnim slučajevima primjenjuju kompjuterski programi za nalaženje numeričkih rješenja koja daju naprezanje i deformacije u svakoj točki konstrukcije.

3.4 Sila trenja

Trenje je iskustveno poznata pojava o kojoj ovisi naš svakodnevni život. Primjerice, bez trenja na podlozi ne bismo se mogli kretati. Trenje smo uzimali u obzir u raspravama o Newtonovim zakonima u odjeljku 2.2, ali nismo ulazili u raspravu o prirodi tog međudjelovanja, što namjeravamo učiniti upravo u ovome odjeljku.

3.4.1 Otpor proklizavanju

Počnimo raspravu s razmatranjem tijela koje leži na nekoj horizontalnoj podlozi, te na njega krenemo djelovati nekom horizontalnom vanjskom silom $\vec{F}$ nastojeći ga pomaknuti iz stanja mirovanja. Iz svakodnevnoga iskustva s pomicanjem raznih tijela po nekim podlogama, znamo da se tijelo neće pomaknuti ako na njega djelujemo premalenom silom. Tek kada dovoljno povećamo silu kojom djelujemo na tijelo, ono se pomakne. Moramo za ovu pojavu dati fizikalno objašnjenje utemeljeno na Newtonovim zakonima.

Slika 3.19a prikazuje niz situacija u kojima na tijelo djelujemo sve većom i većom vanjskom silom $\vec{F}$, a ono ipak miruje u inercijalnom sustavu. Iz prvoga Newtonova zakona znamo da je ustrajno mirovanje tijela moguće samo u slučajevima kada na tijelo ne djeluje nikakva sila, ili pak ako vektorski zbroj svih sila (ukupna sila) na tijelo iščezava. Stoga u ovome slučaju moramo zaključiti da sila $\vec{F}$ ne može biti jedina sila koja djeluje na tijelo, tj. na njega nužno djeluje još jedna sila, iako u prvi mah ne razabiremo otkud ona potječe. Označimo tu silu kao $\vec{F}_s$, te napišimo uvjet mirovanja tijela

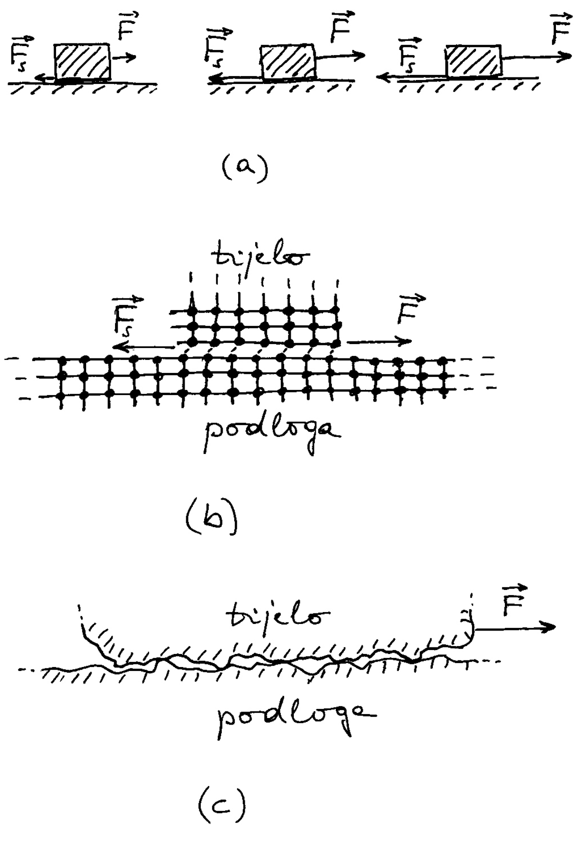
$$\vec{F}_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_s = -\vec{F} \tag{3.53}$$

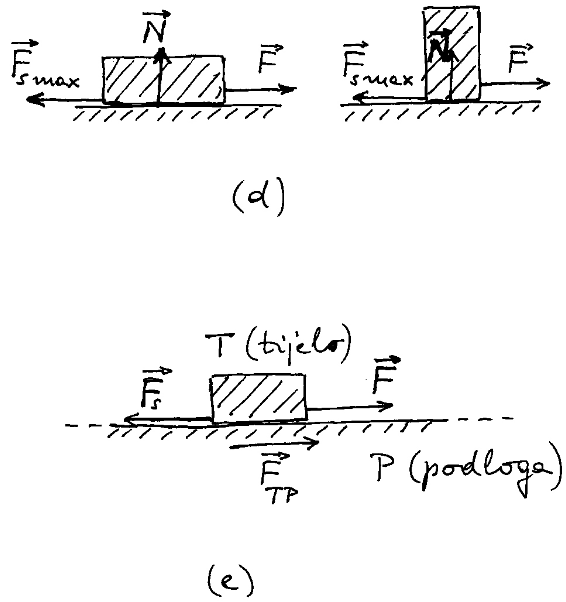
Sila $\vec{F}_s$ jednaka je po iznosu i suprotnog je smjera od vanjske sile $\vec{F}$, pa je tako i prikazana na slici 3.19a. Sila $\vec{F}_s$ nije unaprijed zadana time što je tijelo položeno na podlogu. Ako nema vanjske sile

$\vec{F}$, nema ni sile $\vec{F}_s$. Kako raste iznos vanjske sile $\vec{F}$, nužno raste i iznos sile $\vec{F}_s$, tako da bi tijelo moglo ostati u stanju mirovanja.

U fizikalnoj literaturi je uobičajeno nazivati $\vec{F}_s$ *silom statičkog trenja.* Ovo je ponekad zbunjujući izraz jer se sila $\vec{F}_s$ javlja dok još nema relativnog gibanja tijela prema podlozi, pa nema ni trenja. Stoga bi je bilo prikladnije nazivati silom otpora proklizavanju, no zbog izbjegavanja zbrke u korištenju druge literature, ostat ćemo kod izraza "sila statičkog trenja" kao uvriježenog naziva.

Prirodu sile $\vec{F}_s$ možemo objasniti mikroskopskim uvidom u dodirne plohe tijela i podloge, te razmatranjem atomske, odnosno molekularne strukture tvari. Razmotrimo najprije idealiziran slučaj glatkih površina tijela i podloge kako prikazuje slika 3.19b. Iako između dodirnih atomskih slojeva tijela i podloge ne postoje onako čvrste atomske veze kao kod slojeva u dubini tijela, odnosno podloge, ipak postoje slabije vrste veza, najčešće na bazi polarnosti molekula. Vanjska sila $\vec{F}$ djeluje na cijelo tijelo, no analizu možemo pojednostavniti ako zamislimo da ona djeluje izravno na donji atomski sloj. U ovisnosti o iznosu te sile, donji atomski sloj tijela se malo posmakne u odnosu na susjedni gornji atomski sloj podloge. Smicanje atomskih slojeva uvijek izaziva pojavu unutarnjih sila. Tako gornji atomski sloj podloge djeluje na donji atomski sloj tijela unutarnjom silom, koju u ovome slučaju možemo smatrati silom $\vec{F}_s$. Što je vanjska sila $\vec{F}$ veća, raste i opisana deformacija posmaka, pa i sila $\vec{F}_s$, tako da se uvijek uspostavi novo stanje ravnoteže prema jednadžbi (3.53). Tijelo ostaje u svome stanju mirovanja na podlozi.





Slika 3.19: (a) Tijelo položeno na ravnu horizontalnu podlogu miruje čak i ako na njega djeluje neka (ne prevelika) vanjska sila $\vec{F}$. Razlog leži u istodobnoj pojavi sile statičkog trenja $\vec{F}_s$. (b) Simbolički prikaz atomskih slojeva tijela i podloge u dodiru. Uslijed vanjske sile $\vec{F}$ donji atomski sloj tijela posmakne se u odnosu prema gornjem atomskom sloju podloge, te se među slojevima pojavi elastična sila $\vec{F}_s$ kojom se uspostavi novo stanje ravnoteže. (c) Uslijed hrapavosti površina tijela i podloge, dodir ploha se ostvaruje na malenim dijelovima ukupne površine. (d) Maksimalna sila statičkog trenja ne ovisi o veličini plohe kojom neko tijelo leži na podlozi. (e) Sila statičkog trenja djeluje uzajamno između tijela i podloge sukladno trećemu Newtonovu zakonu ($\vec{F}_s = -\vec{F}_{TP}$).

Međutim, daljnjim porastom vanjske sile dolazimo do neke granične vrijednosti sile $\vec{F}_{s\,max}$ kada nastupi kidanje veza između dodirnih atomskih slojeva tijela i podloge, te se tijelo počne gibati. Iznos ove maksimalne sile statičkog trenja ovisi o iznosu sile kojom tijelo djeluje okomito na podlogu, odnosno sili reakcije kojom podloga djeluje uzvratno na tijelo, što smo nazvali normalnom silom $\vec{N}$. Naime, što je iznos normalne sile veći, više se približe atomski slojevi tijela i podloge, te su veće sile između njih.

Dodajmo još da u praksi uvijek postoje sitne neravnine dviju ploha, tako da se kontakt ostvaruje samo na mjestima pojedinih izbočina, kako to simbolički pokazuje slika 3.19c. Dodirni dio površine obično iznosi svega 10^{-4} od ukupne neravne površine. Što je veći iznos normalne sile N, dodirujuće izbočine se više deformiraju (spljošćuju) tako da efektivna dodirna ploha raste. Time raste i iznos sile $\vec{F}_{s\,max}$.

Brojnim eksperimentima utvrđena je približno linearna ovisnost između iznosa maksimalne sile statičkog trenja i iznosa normalne sile, pa se može pisati

$$F_{s\,max} = \mu_s\, N \tag{3.54}$$

gdje je μ_s koeficijent statičkog trenja koji ovisi o vrsti tvari i podloge. Budući da obje veličine $F_{s\,max}$ i N imaju dimenziju sile, koeficijent statičkog trenja μ_s je bezdimenzionalan broj. Njegova vrijednost je manja od jedinice (najčešće oko 0,5-0,7), te je iznos maksimalne sile statičkog trenja manji od iznosa normalne sile. U nekim slučajevima, kao npr. za tijelo na glatkom ledu, μ_s je mnogo manji od jedinice (oko 0,1), te je lako pokrenuti tijelo.

Ovisi li statičko trenje o veličini dodirne plohe tijela i podloge?

U jednadžbi (3.54) ne pojavljuje se veličina dodirne plohe tijela i podloge. Na prvi pogled nam se to čini neobičnim jer intuitivno očekujemo da bi veća ploha trebala dovesti do povećanog trenja uz istu normalnu silu. Međutim eksperimenti pokazuju da je za isto tijelo, položeno različitim svojim plohama na podlogu (npr. kao na slici 3.19d), potrebna uvijek jednaka vanjska sila da bi ga pokrenula iz stanja mirovanja, tj. da je sila $F_{s\,max}$ uvijek jednaka za to tijelo, bez obzira na veličinu odabrane dodirne plohe s podlogom. Razumije se, normalna sila N je u svim tim slučajevima ista jer je jednaka po iznosu težini tijela.

Objašnjenje ovog eksperimentalnog opažanja je jednostavno ako se prisjetimo atomskih slojeva na granici tijela i podloge. Ako je dodirna ploha manja, povećava se deformacija atomskih slojeva jer se ista normalna sila N rasporedi na manji broj atoma. Vrijedi i obrat s većom dodirnom plohom i manjom deformacijom atomskih slojeva zbog većeg broja uključenih atoma. Napomenimo još da slično objašnjenje vrijedi i kod usporedbe savršeno glatkih i ponešto hrapavih površina kod kojih je efektivna dodirna površina reducirana na izbočine.

Je li statičko trenje između tijela i podloge uzajamno?

U prethodnom smo razmatranju obraćali pažnju samo na tijelo, te bilježili sile koje na njega djeluju. Međutim, prema trećemu Newtonovu zakonu mora za svaku silu postojati i reakcija. U mikroskopskom razmatranju nalazimo da se kod smicanja atomskih slojeva mora pojaviti i sila kojom donji atomski sloj tijela djeluje na gornji atomski sloj podloge. Ona predstavlja silu kojom tijelo (T) djeluje na podlogu (P), pa je na slici 3.19e označavamo kao $\vec{F}_{TP}$. Zacijelo i silu $\vec{F}_{TP}$ možemo smatrati silom statičkog trenja, samo što ona djeluje na podlogu, dok sila $\vec{F}_s$ djeluje na tijelo. Trenje je uvijek uzajamno djelovanje, tj. koliko tijelo djeluje na podlogu, toliko i podloga djeluje na tijelo sukladno trećemu Newtonovu zakonu.

Možemo još uočiti da je sila $\vec{F}_{TP}$ potpuno jednaka po iznosu i smjeru vanjskoj sili $\vec{F}$, te izgleda kao da se djelovanje vanjske sile prenosi preko nepomičnog tijela na podlogu. Naime, dok se tijelo ne pomiče po podlozi, možemo smatrati kao da tijelo i podloga čine jednu cjelinu na koju djeluje vanjska sila $\vec{F}$. Ona se poput elastičnog naprezanja prenosi s tijela na podlogu.

Napomena: Obično smatramo da je podloga nekako vezana za površinu Zemlje, pa vanjska sila $\vec{F}$ djeluje zapravo na cijeli sustav tijela, podloge i Zemlje. Zbog ogromne mase Zemlje, akceleracija tog sustava ostaje zanemariva.

Održavanje tijela na kosini

Na slici 3.20a prikazano je tijelo na kosini koja čini kut θ s horizontalom. Sila $\vec{F}_g$ kojom Zemlja privlači

tijelo nije u ovome slučaju okomita na podlogu na kojoj se tijelo nalazi. Analiza problema se može izvesti analogno prethodno obrađenome slučaju tijela na horizontalnoj podlozi ako uočimo da silu $\vec{F}_g$ možemo rastaviti na dvije komponente, jednu okomitu na plohu kosine $\vec{F}_{g\perp}$ i drugu paralelnu s kosinom $\vec{F}_{g||}$. Podloga djeluje na tijelo normalnom silom $\vec{N}$ tako da nastane ravnoteža u smjeru okomitom na plohu kosine ($\vec{F}_{g\perp} + \vec{N} = 0$). Druga komponenta gravitacijske sile $\vec{F}_{g||}$ ima istu ulogu kao vanjska sila $\vec{F}$ u slučaju tijela na horizontalnoj podlozi. Ona nastoji pomaknuti tijelo duž smjera kosine. No, prvi učinak je pojava smicanja dodirnih atomskih slojeva tijela i kosine, tako da nastane sila statičkog trenja $\vec{F}_s$ uz koju je moguća ravnoteža $\vec{F}_{g||} + \vec{F}_s = 0$ duž smjera kosine. Tijelo stoga miruje na kosini.

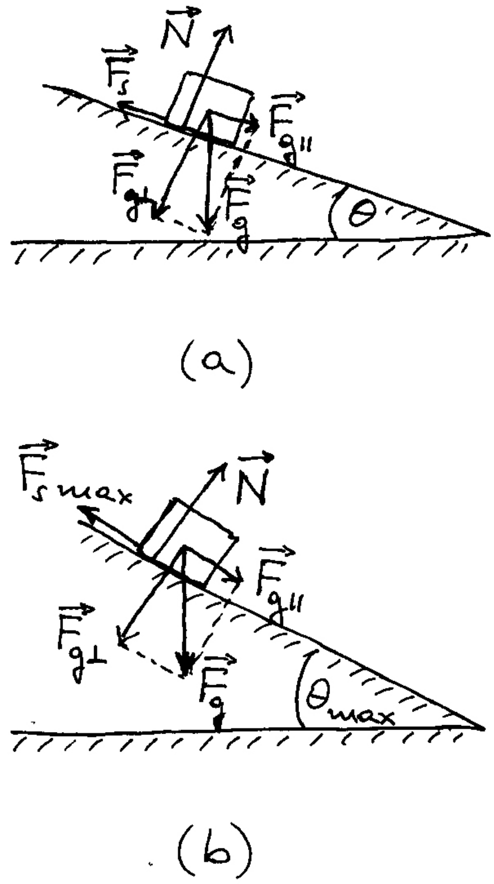
Zamislimo da se nagib kosine mijenja povećavanjem kuta θ. Komponenta gravitacijske sile koja je okomita na plohu kosine $\vec{F}_{g\perp}$ smanjuje se po iznosu. Time se smanjuje i sila kojom tijelo djeluje okomito na podlogu, pa i reakcija podloge u obliku normalne sile $\vec{N}$, tako da okomito na plohu kosine uvijek imamo ravnotežno stanje ($\vec{F}_{g\perp} + \vec{N} = 0$). Komponenta gravitacijske sile duž kosine $\vec{F}_{g||}$ raste po iznosu, tako da se povećava i sila statičkog trenja $\vec{F}_s$ sve dok njen iznos ne postigne maksimalnu moguću vrijednost $F_{s\,max}$. Tada nastupa granični slučaj proklizavanja tijela niz kosinu.

Označimo s θ_{max} maksimalan kut kosine do kojega tijelo ostaje na kosini u stanju mirovanja, tj. kada je ispunjen uvjet ravnoteže $\vec{F}_{g||} + \vec{F}_{s\,max} = 0$, odnosno u iznosima sila $F_{g||} = F_{s\,max}$. Prema slici 3.20b nalazimo da paralelna komponenta gravitacijske sile iznosi $F_{g||} = F_g \sin\theta_{max}$. Maksimalna sila statičkog trenja dana je uvijek jednadžbom (3.54), gdje normalna sila za ovaj slučaj poprima iznos $N = F_g \cos\theta_{max}$. Stoga uvjet ravnoteže za iznose sila duž kosine možemo napisati

$$F_g \sin\theta_{max} = \mu_s \, F_g \cos\theta_{max} \qquad (3.55)$$

Vidimo da se gravitacijska sila F_g može pokratiti, tj. uvjet ravnoteže ne ovisi o težini, odnosno masi tijela. Jednadžbu (3.55) možemo napisati u jednostavnijem obliku

$$\mathrm{tg}\,\theta_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{s}} \qquad (3.56)$$



Slika 3.20: (a) Tijelo miruje na kosini manjeg nagiba. (b) Kod kritičnog kuta kosine, sila statičkog trenja dosiže svoju maksimalnu vrijednost, te nakon toga dolazi do proklizavanja.

Maksimalan kut kosine do kojega tijelo ostaje na kosini u stanju mirovanja ovisi samo o koeficijentu statičkog trenja μ_s, koji pak ovisi o tvarima od kojih su načinjeni tijelo i podloga kosine. Jednadžbu (3.56), uz opisani postupak podizanja nagiba kosine, možemo iskoristiti kao pogodnu metodu za određivanje koeficijenta statičkog trenja za odabrane tvari.

Ovdje je poučno spomenuti primjer automobila na strmoj cesti. Za gumu na suhom asfaltu vrijedi približno $\mu_s \approx 1$. Ako su sva četiri kotača ukočena, automobil može mirovati na cesti maksimalnog nagiba $\theta_{max} \approx 45^o$. Međutim, to je krajnje opasna situacija. Ako želimo pokrenuti automobil na uobičajen način, moramo otpustiti

papučicu kvačila kojim prenosimo rad motora na pogonsku osovinu, te istodobno otpustiti kočnicu koja zadržava sva četiri kotača. Problem nastaje zbog toga što većina automobila ima pogon samo na jednome paru kotača, pa se sila $F_{s\,max}$ svede samo na te kotače. Ako uzmemo da na jedan par kotača otpada otprilike polovica ukupne normalne sile, tj. $(F_g/2)\cos\theta_{max}$, slijedi uvjet $\mathrm{tg}\,\theta_{\max} = \mu_{\mathrm{s}}/2$, što daje manju vrijednost za maksimalni nagib ceste na kojoj je moguće gibanje automobila. Uočimo da mogućnost gibanja nije ovdje ograničena snagom motora, nego koeficijentom statičkog trenja gume i asfalta.

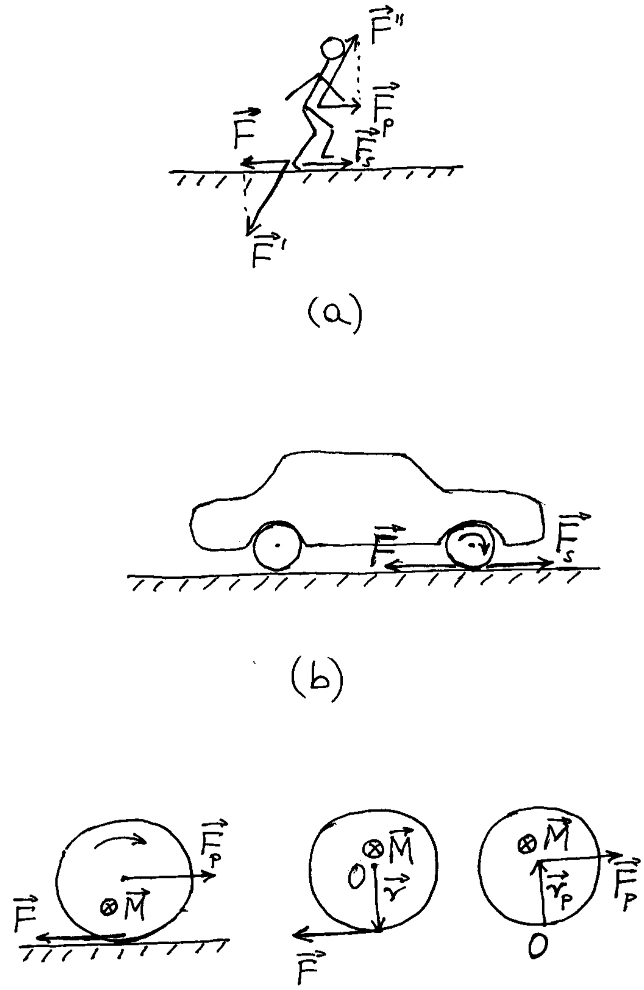
Otpor proklizavanju kod hodanja

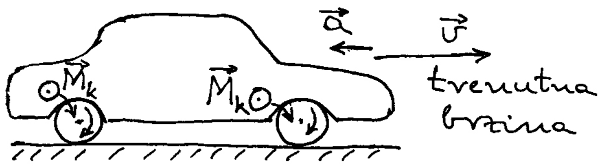
Otpor proklizavanju, koji smo nazvali statičkom silom trenja, ima presudnu ulogu u svakodnevnome kretanju čovjeka. Slika 3.21a prikazuje čovjeka koji korača po ravnoj podlozi. Moramo objasniti zašto u ovome slučaju govorimo o statičkoj sili trenja, iako čovjek ne miruje. Naime, kretanje čovjeka po podlozi nije isto kao i vuča nekog tijela uslijed djelovanja vanjske sile na to tijelo. Čovjek nije kruto tijelo. Naprotiv, djelovanjem vlastitih mišića čovjek može micati ruke i noge, ugibati ih i ispružiti kada to želi. Drugim riječima, čovjek je tijelo koje može mijenjati svoj oblik djelovanjem unutarnjih sila.

Pokretanjem noge koja trenutno upire u podlogu (slika 3.21a), čovjekovo stopalo se pomiče relativno prema glavnini tijela. Kada bi podloga bila jako klizava, stopalo bi otklizalo unatrag, dok se glavnina čovjekova tijela ne bi pomaknula. Kretanje čovjeka bilo bi tada nemoguće. Na našu sreću, svakodnevno se uglavnom nalazimo u normalnim okolnostima gdje, zahvaljujući statičkoj sili trenja, ne dolazi do proklizavanja stopala po podlozi. Fizikalnu situaciju možemo analizirati tako da smatramo kao da na samo stopalo (u dodiru s podlogom) djeluje sila gornjeg dijela noge koja nastoji izvesti pokret. To je sila $\vec{F}\,'$ koja nastoji gurnuti stopalo. Sa stajališta čovjeka u cjelini, sila $\vec{F}'$ predstavlja jednu od *unutarnjih sila* čovjekova tijela koju stvaraju mišići noge. Unutarnje sile bilo kojeg sustava uvijek se javljaju u paru s jednakim iznosima i suprotnim smjerovima. Tako možemo reći da drugi kraj pokretne noge djeluje na glavninu čovjekova tijela silom $\vec{F}\,''$.

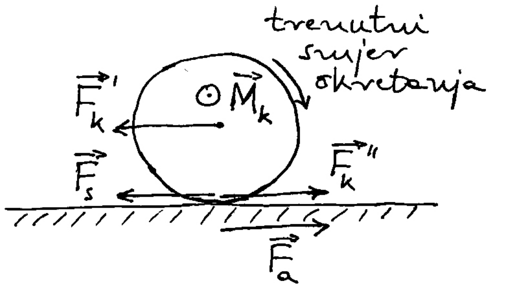
Za objašnjenje gibanja čovjeka dovoljno je analizirati horizontalne komponente sila $\vec{F}'$ i $\vec{F}''$, tj. sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_p$ označene na slici 3.21a. Dakle, sila $\vec{F}$ djeluje na stopalo nastojeći ga gurnuti unatrag. Sada možemo primijeniti sve ono što smo prethodno objašnjavali kod otpora proklizavanju tijela na podlozi. Stopalo miruje u odnosu na podlogu zato jer na njega djeluje i sila statičkog trenja $\vec{F}_s$ u suprotnu stranu (u desnu stranu na slici 3.21a), tako da ukupna sila na stopalo iščezava ($\vec{F} + \vec{F}_s = 0$).

S druge pak strane, sila $\vec{F}_p$ je jedina (horizontalna) sila koja djeluje na pokretanje glavnine čovjekova tijela. Kao što vidimo, potpuno objašnjenje kretanja čovjeka po podlozi nije tako jednostavno kako se moglo u prvi mah pomisliti.





(d)



(e)

Slika 3.21: (a) Čovjek u pokretu na horizontalnoj podlozi s trenjem. Djelovanjem vlastitih mišića čovjek stvara unutarnje sile $\vec{F}\,'$ i $\vec{F}\,''$. Slika naglašava samo horizontalne komponente tih sila u svrhu objašnjenja pokretanja čovjeka. (b) Automobil u vožnji na cesti. Na dio gume koji je u dodiru s tlom djeluje ostatak kotača silom $\vec{F}$ i tlo silom $\vec{F}_s$. (c) Uvećani prikaz kotača na koji djeluje pogonska osovina momentom sile $\vec{M}$, koji je ekvivalentan djelovanju para sila $\vec{F}$ i $\vec{F}_p$. Dva pomoćna crteža prikazuju ekvivalentne izračune momenta sile za različite izbore ishodišta. (d) Automobil u kočenju. Kočnice djeluju momentom sile $\vec{M}_k$ na kotače. (e) Moment sile $\vec{M}_k$ ekvivalentan je djelovanju para sila $\vec{F}_k'$ i $\vec{F}_k''$. Automobilska guma djeluje na asfalt silom $\vec{F}_a$, dok asfalt djeluje na dodirni dio gume silom statičkog trenja $\vec{F}_s$.

Otpor proklizavanju kod vožnje automobila

Razmotrimo sada problem akceleracije automobila na cesti. I u ovome je slučaju važna sila statičkog trenja, iako automobil ne miruje nego se giba. Slika 3.21b prikazuje pobliže ovu situaciju. Automobilski motor putem prijenosnog mehanizma pokreće vrtnju pogonske osovine na kojoj su učvršćeni kotači. Ako pažnju usmjerimo na dio automobilske gume koji je u dodiru s tlom, možemo smatrati kao da na taj djelić gume djeluje ostatak kotača silom $\vec{F}$ prema natrag (u lijevu stranu na slici 3.21b). Kada bi cesta bila jako klizava, taj bi dio automobilske gume proklizao po cesti, a isto bi se dogodilo uzastopno i s ostalim dijelovima automobilske gume kako bi redom dolazili u dodir s tlom. Drugim riječima, automobilska bi se guma okretala, dok bi sam automobil stajao na mjestu, tj. vožnja bi bila nemoguća.

Međutim, u normalnim okolnostima, tlo djeluje na dodirni dio automobilske gume silom statičkog trenja $\vec{F}_s$ prema naprijed (u desnu stranu na slici 3.21b), tako da ukupna sila na dodirni dio automobilske gume iščezava, te ona trenutno ostaje u stanju mirovanja u odnosu prema cesti. Kotač se zbog djelovanja automobilskog motora ipak nastoji zakrenuti, a to se može ostvariti jedino tako da se sama pogonska osovina pomakne prema naprijed.

Gornji je zaključak korisno provjeriti malo strožim teorijskim razmatranjem problema. Rotaciju pogonske osovine uzrokuje moment sile $\vec{M}$, označen na slici 3.21c, koji nastaje zbog rada automobilskog motora, te ga smatrajmo za trenutak zadanim. Na slici 3.21c prikazan je također par sila $\vec{F}$ i $\vec{F}_p$, koji predstavlja ekvivalentan način izražavanja zadanog momenta sile $\vec{M}$. U to se možemo uvjeriti kroz razmatranje sljedećih dvaju slučajeva. Kada bi automobil bio podignut nekom dizalicom uvis, osovina kotača bi mirovala, a kotač bi se mogao slobodno vrtjeti bez trenja. U tome bismo slučaju moment sile $\vec{M}$ računali tako da ishodište stavimo u središte kotača (pomoćni crtež na slici 3.21c) kao nepomičnu točku, te od ishodišta povučemo vektor $\vec{r}$ do hvatišta sile $\vec{F}$ na donjoj točki kotača. Moment sile $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ bi tada uzrokovao ubrzavanje vrtnje (kutnu akceleraciju) kotača. U slučaju vožnje automobila po cesti, nepomičnu točku predstavlja trenutno mjesto dodira automobilske gume sa tlom, pa je mjerodavno računati moment sile u odnosu na tu točku. Iz nje povučemo vektor $\vec{r}_p$ do pogonske osovine, pa zadani moment sile postižemo smatrajući kao da na pogonsku osovinu djeluje sila $\vec{F}_p$ kako je prikazano u drugom pomoćnom crtežu na slici 3.21c, tj. $\vec{M} = \vec{r}_p \times \vec{F}_p$. Sila $\vec{F}_p$ mora po iznosu biti jednaka sili $\vec{F}$ da bi se u oba izračuna dobio isti zadani moment sile $\vec{M}$. Budući da je pogonska osovina učvršćena za karoseriju automobila, to se i sila $\vec{F}_p$ (pokretačka sila) prenosi na automobil u cjelini. Time možemo fizikalno obrazložiti nastanak akceleracije automobila na cesti.

Koliku maksimalnu akceleraciju može postići automobil?

Očito je da snažniji motor može dati veći moment sile $\vec{M}$ na kotače. Međutim, postoji ograničenje u iznosu statičke sile trenja $F_{s\,max} = \mu_s\, N$. Ako iznos sile $\vec{F}$ prijeđe ovu vrijednost, nastane proklizavanje gume, te se kotač ubrzano vrti i nema više sile $\vec{F}_p$ koja bi ubrzavala automobil. Dakle, maksimalni iznos sile koja ubrzava automobil može iznositi $F_p = \mu_s\, N$. Za gumu na suhom asfaltu je $\mu_s \approx 1$, dok za normalnu silu na pogonske kotače (samo jedan par) možemo uzeti $N \approx mg/2$, gdje je m masa automobila. Iz drugoga Newtonova zakona slijedi da je maksimalna akceleracija automobila ograničena na $a = F_p/m = g/2$. Lako je izračunati da bi uz ovoliku akceleraciju (oko 5 ms^{-2}) automobil mogao, krečući iz stanja mirovanja, postići brzinu od 100 km/h za svega 5,6 s. Dobro je poznato da većina osobnih automobila postiže brzinu od 100 km/h za 9-11 s, što znači da ograničenje za veće ubrzanje njihove mase leži u ograničenoj snazi automobilskoga motora. Jedino trkaći automobili imaju dovoljno snažan motor, a uz to i relativno malenu masu, tako da bi s lakoćom mogli postići brzinu od 100 km/h za 5,6 s. Štoviše, ovi automobili postižu navedenu brzinu i za kraće vrijeme (oko 3 s) ali uz uporabu posebnih guma koje se prethodno ugrijavaju tako da se lagano lijepe uz trkaću pistu, odnosno postižu veći koeficijent statičkog trenja ($\mu_s \approx 2$).

Što se zbiva kod kočenja u vožnji automobila?

Kada stisnemo kočnice prilikom vožnje automobila, unutarnjim mehanizmom usporavamo vrtnju kotača. Ako je cesta suha i nema proklizavanja automobilske gume po njoj, usporavanje vrtnje kotača znači ujedno i usporavanje gibanja automobila. Slika 3.21d prikazuje automobil u kočenju na prednjim i stražnjim kotačima. Mehanizam za kočenje stvara zapravo moment sile kočenja $\vec{M}_k$ koji smanjuje brzinu vrtnje kotača. Taj moment sile kočenja možemo ekvivalentno prikazati parom sila $\vec{F}_k'$ i $\vec{F}_k''$ kako je to učinjeno na uvećanoj slici 3.21e.

Obratimo pažnju najprije na silu $\vec{F}_k''$ kojom mehanizam za kočenje djeluje na donju točku automobilske gume. Ako nema proklizavanja gume po cesti, javlja se statičko trenje. Naime, automobilska guma djeluje na asfalt silom $\vec{F}_a$, koja je jednaka sili $\vec{F}_k''$, a asfalt djeluje na automobilsku gumu silom reakcije $\vec{F}_s = -\vec{F}_a$, sukladno trećemu Newtonovu zakonu. Prema tome, ukupna sila na donju točku automobilske gume dolazi od mehanizma za kočenje i od djelovanja asfalta, te iznosi $\vec{F}_k'' + \vec{F}_s = 0$, tj. iščezava. Na pogonsku osovinu djeluje pak samo sila $\vec{F}_k'$ u smjeru suprotnom trenutnoj brzini automobila. Budući da je pogonska osovina učvršćena za karoseriju, sila $\vec{F}_k'$ zaustavlja gibanje automobila.

Suvremeni automobili većinom imaju ugrađen sustav ABS (engl. *Anti-lock Braking System*) koji regulira kočenje i povećava sigurnost. Ako se neki od kotača nađe na klizavom dijelu ceste, onda nestane (ili se bitno smanji) sila $\vec{F}_s$ na donju točku kotača, te ga snažna sila kočenja $\vec{F}_k''$ brzo zaustavlja u vrtnji. Kotač tada klizi po dijelu ceste i ne pridonosi zaustavljanju automobila kao što to čine drugi kotači. Uslijed toga dolazi do zanošenja automobila u stranu, što predstavlja opasnost za vožnju. Da bi se to izbjeglo, sustav ABS ima senzore koji na svakome kotaču prate brzinu okretanja i čim kontrolni procesor ustanovi da se neki od kotača ne okreće jednakom brzinom kao i ostali, trenutno otpusti hidrauličke kočnice na svim kotačima. To je dovoljno da se na čas počne normalno okretati i kotač na klizavom dijelu ceste, a zatim regulacija sustava ABS opet uspostavi kočenje na sva četiri kotača. Prema potrebi, prekidanje i uspostava kočenja se ponavlja više puta i to vrlo brzo (čak nekoliko puta u sekundi). Time se osigurava da automobil zadrži smjer gibanja i kod kočenja u nepovoljnim uvjetima na klizavoj cesti. Osim toga, ABS je efikasniji u smanjivanju brzine automobila jer umjesto klizanja gume uspostavlja u većoj mjeri kočenje statičkom silom trenja. Postoje i novije, te složenije verzije sustava kočenja.

3.4.2 Trenje kod klizanja

Sila statičkog trenja opisana u prethodnome pododjeljku može dosegnuti neku maksimalnu vrijednost $\vec{F}_{s\,max}$ za dano tijelo i podlogu. Ako vanjska sila $\vec{F}$ nadmaši tu vrijednost, dođe do proklizavanja tijela po podlozi. U prvi mah, mogli bismo zaključiti da pritom dolazi do potpunog raskidanja veza između atomskih slojeva tijela i podloge, te da bi se zatim tijelo moglo gibati po podlozi sasvim slobodno. No, iz iskustva znamo da guranje tijela po nekoj podlozi ne ide bez otpora. Uistinu, čak i kada se

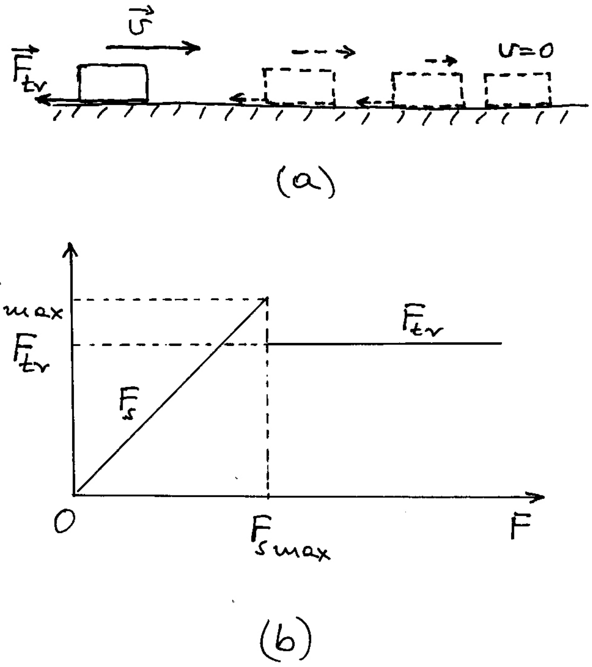
tijelo pokrene na podlozi, opstaje sila kojom podloga nastoji zaustaviti gibanje tijela, a nazivamo je *silom trenja* $\vec{F}_{tr}$. Važno je uočiti da sila trenja na tijelo ima smjer koji je *uvijek suprotan* trenutnoj brzini tijela koje klizi po podlozi.

Da trenje kao pojavu uistinu moramo smatrati silom, tj. da ono odgovara definiciji sile u smislu Newtonovih zakona, možemo ustanoviti jednostavnim pokusom. Tijelu na podlozi dademo na neki način određenu brzinu, a zatim ga pustimo. Iz iskustva nam je poznato da će se brzina tijela smanjivati dok ono konačno ne stane, kao što to prikazuje slika 3.22a. Čim se brzina tijela mijenja u nekom inercijalnom sustavu, moramo zaključiti da na to tijelo djeluje neka rezultantna sila, a ona je na slici 3.22a prikazana kao sila $\vec{F}_{tr}$.

Priroda sile trenja nije jednostavna i zadire u šire područje fizike. Ovdje ćemo dati pojednostavljenu sliku o procesima koji dovode do makroskopske sile trenja između dviju površina. Prisjetimo se opisa sitnih izbočina na nesavršenim površinama tijela i podloge o kojima je bilo govora u prethodnome pododjeljku. Možemo zamisliti da se, u slučaju kada se tijelo giba, vrhovi izbočina na dnu tijela stalno sudaraju s vrhovima izbočina na površini podloge. Pri svakome sudaru nastaje trenutna deformacija vrhova, koja se zatim ispravlja nakon prolaska jednog vrha preko drugoga. Taj ogroman broj sitnih sudara djeluje kao mehanizam zaustavljanja gibanja tijela, pa ga možemo ekvivalentno izraziti pomoću jedne makroskopske sile $\vec{F}_{tr}$, koja je uvijek suprotna trenutnome smjeru gibanja tijela.

Čak i kada su površine tijela i podloge idealno glatke, možemo očekivati silu trenja jer dodirni atomski slojevi tijela i podloge uvijek zadržavaju neko privlačno međudjelovanje. Kako se tijelo pomiče, neki atomi podloge gube kontakt s tijelom, ali zato neki novi atomi podloge stupaju u kontakt s atomima tijela. Tako se zajedno s tijelom premiješta i segment u kojemu dolazi do prolaznog smicanja atomskih slojeva, pa i pojave sile $\vec{F}_{tr}$ koja nastoji zaustaviti gibanje tijela.

Eksperimentalno je utvrđeno da se sila trenja $\vec{F}_{tr}$ ne mijenja s brzinom klizanja tijela po podlozi. U tome je velika razlika između nje i sile statičkog trenja $\vec{F}_s$. Dok iznos sile $\vec{F}_s$ raste kod povećavanja vanjske sile $\vec{F}$ sve do maksimalne vrijednosti $\vec{F}_{s\,max}$, sila trenja $\vec{F}_{tr}$ ostaje približno konstantna kada se tijelo jednom pokrenulo. Grafički prikaz ovisnosti tih sila o vanjskoj sili dan je kvalitativno na slici



Slika 3.22: (a) Trenje prepoznajemo kao silu jer ono mijenja brzinu tijela. (b) Iznos sile statičkog trenja F_s mijenja se s iznosom vanjske sile F koja nastoji pokrenuti tijelo. Kada vanjska sila nadvlada maksimalnu silu statičkog trenja $F_{s\,max}$, nastaje gibanje tijela u kojemu se javlja nešto manja sila trenja F_{tr}.

3.22b. Sila trenja $\vec{F}_{tr}$ nešto je manja od maksimalne sile statičkog trenja $\vec{F}_{s\,max}$ i dana je približno izrazom

$$F_{tr} = \mu_{tr}\, N \tag{3.57}$$

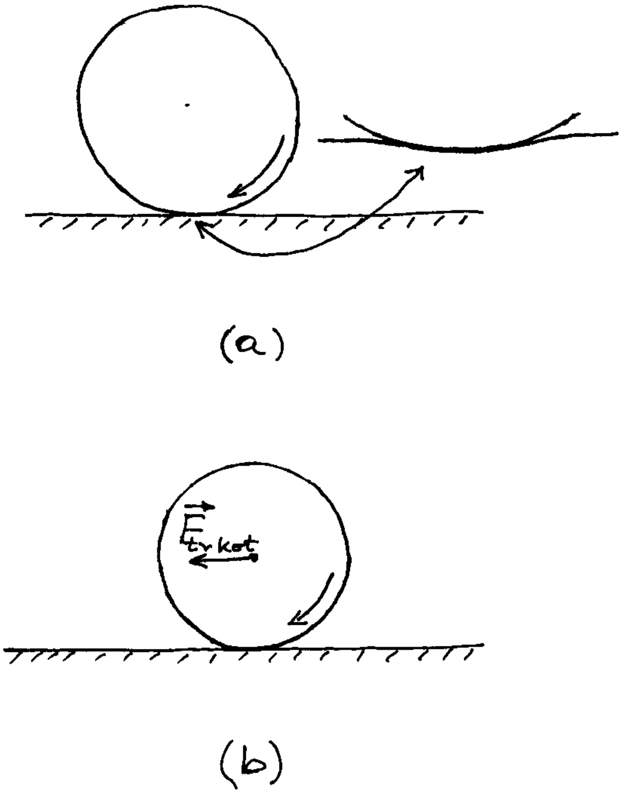
gdje μ_{tr} predstavlja *koeficijent trenja*, koji ovisi o vrsti materijala od kojih su načinjeni tijelo i podloga, a N je iznos normalne sile.

Korisno je upamtiti približne vrijednosti koeficijenta trenja u nekim tipičnim slučajevima. Za klizanje metalnih tijela po glatkome ledu, koeficijent trenja je mnogo manji od jedinice ($\mu_{tr} \approx 0,1$). Kod trenja suhih glatkih površina za većinu tvari (metal, drvo, plastika, staklo) koeficijent trenja se kreće oko vrijednosti $0,5$. Za gumu na suhom asfaltu je koeficijent trenja nešto manji od jedinice ($\mu_{tr} \approx 0,8$).

Lako je na temelju drugoga Newtonova zakona ustanoviti kakvo gibanje tijela može nastupiti kod istodobnog djelovanja vanjske sile $\vec{F}$ i sile trenja $\vec{F}_{tr}$.

Uzmimo da vanjska sila djeluje u smjeru trenut-

nog gibanja tijela. Ako je iznos vanjske sile $\vec{F}$ veći od iznosa sile trenja $\vec{F}_{tr}$, ukupna sila $\vec{F}_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_{tr}$ ima smjer vanjske sile, odnosno trenutne brzine tijela, pa se iznos brzine tijela povećava. Kada je iznos vanjske sile točno jednak iznosu sile trenja, ukupna sila na tijelo iščezava, pa se ono giba konstantnom brzinom. To je čest slučaj u praksi kada guramo ili vučemo neko tijelo po podlozi. Ako pak vanjska sila postane manja od sile trenja, ukupna će sila na tijelo imati smjer suprotan trenutnoj brzini tijela, te će ono smanjivati svoju brzinu.



Slika 3.23: (a) Kotrljanje valjka (kotača) na glatkoj horizontalnoj podlozi. Pomoćni crtež prikazuje uvećanu sliku dijela na kojemu se dodiruju kotač i podloga. (b) Ispravno postavljanje hvatišta sile trenja kotrljanja.

3.4.3 Trenje kod kotrljanja

Kotrljanje je u praksi vrlo korisno kada želimo umanjiti trenje u svrhu transporta nekog tereta. Postavlja se pitanje postoji li neka sila koju možemo identificirati kao trenje kod kotrljanja. Svakome je poznato da se kugla, koju zakotrljamo po ravnoj horizontalnoj podlozi, uvijek usporava i konačno zaustavi. Prema drugome Newtonovu zakonu, promjenu brzine tijela moramo pripisati djelovanju neke sile na to tijelo. Sasvim je prikladno da je nazovemo *sila trenja kod kotrljanja.* Priroda sile $\vec{F}_{tr\,kot}$ je također složena i njeno objašnjenje zahtijeva poznavanje neravnotežnih procesa u termodinamici, koji se izučavaju kasnije tijekom studija fizike. Ovdje možemo iznijeti samo pojednostavljenu sliku i tvrdnje iz područja termodinamike koje moramo za sada primiti bez posebnog dokazivanja.

Da bismo bolje shvatili što se događa kod kotrljanja, korisno je najprije utvrditi postoji li makar idealizirani slučaj kod kojega se ne bi pojavila sila trenja kotrljanja. Razmotrimo u tu svrhu kotrljanje pravilnog valjka (kotača) na glatkoj horizontalnoj podlozi (slika 3.23a), uz to da su oboje načinjeni od savršeno elastičnih materijala. Zbog težine valjka dolazi do elastične deformacije na mjestu dodira valjka i podloge, koja možda nije vidljiva prostim okom, ali ipak postoji, te je na slici 3.23a prikazana u jako uvećanom mjerilu na pomoćnom crtežu. Deformacija se sastoji u laganom ulegnuću podloge i malenoj spljoštenosti valjka na mjestu dodira s podlogom. Na atomskoj razini, dolazi do lokalnog stiskanja atomskih slojeva pri površini valjka i podloge. U procesu kotrljanja, valjak se zakreće i time dolazi do stiskanja atomskih slojeva podloge na mjestu na koje valjak upravo nailazi (tik ispred valjka), a stišće se i dio valjka koji se kod rotacije spušta na podlogu. Za ova stiskanja potrebno je djelovanje sile, a ona dolazi od težine valjka i njegova gibanja. Prema trećemu Newtonovu zakonu, atomski slojevi koji se stišću djeluju silom reakcije na valjak, a ta sila djeluje tako da pokušava zaustaviti kotrljanje valjka, tj. daljnje stiskanje atomskih slojeva. Međutim, valja uzeti u obzir da valjak u kotrljanju napušta dodir s drugim dijelom podloge (tik iza valjka). Pritom se razmaci između atomskih slojeva povećavaju vraćajući se u prvobitno nedeformirano stanje. Razmicanje atomskih slojeva nastaje uslijed djelovanja unutarnjih elastičnih sila, a rezultat je sila koja podiže uvis stražnji dio kotača, odnosno potiče njegovo kotrljanje. Ukupno uzevši, djelovanje sila na prednjoj i stražnjoj strani dodirujućeg dijela valjka i podloge, uzajamno poništavaju svoje učinke na gibanje valjka. Stoga bi se u takvim idealiziranim uvjetima

valjak mogao kotrljati bez zaustavljanja, tj. ne bi bilo sile trenja kotrljanja.

Umjesto idealiziranih uvjeta, uvijek u praksi nalazimo tijela koja nisu savršeno elastična i kod kojih se proces naglog deformiranja ne odvija jednako kao kasniji povratak u nedeformirano stanje. Naime, atomski slojevi na mjestu koje valjak u svojemu kotrljanju upravo napušta (tik iza valjka), ne ispravljaju svoju deformaciju (stisnutost) dovoljno brzo, te djeluju na valjak manjom potisnom silom nego što je sila kojom valjak mora djelovati da bi deformirao (stiskao) atomske slojeve na mjestu na koje upravo nailazi (tik ispred valjka). Ukupni učinak tih mikroskopskih procesa je usporavanje gibanja valjka, pa ih možemo ekvivalentno predstaviti jedom makroskopskom silom koja djeluje suprotno trenutnom smjeru gibanja cijelog valjka, a nazivamo je silom trenja kod kotrljanja.

Postavlja se pitanje gdje je ispravno postaviti hvatište sile $\vec{F}_{tr\,kot}$ kod crtanja slike s kotrljajućim valjkom. Vidjeli smo da se procesi koji dovode do zaustavljanja kotrljanja odvijaju na mjestu kontakta valjka i podloge, no bilo bi pogrešno staviti hvatište sile $\vec{F}_{tr\,kot}$ na to mjesto. Naime, kotrljanje se ne ostvaruje kao klizanje jedne dodirne površine po drugoj, pa sila $\vec{F}_{tr\,kot}$ na mjestu dodira ne bi imala učinka na zaustavljanje kotrljanja. Sila $\vec{F}_{tr\,kot}$ ima učinak smanjivanja brzine kojom se pomiče os valjka, pa je jedino ispravno zamisliti da se njeno hvatište nalazi u centru mase valjka kako to prikazuje slika 3.23b. Smjer sile $\vec{F}_{tr\,kot}$ je uvijek suprotan trenutnome smjeru gibanja tijela koje se kotrlja.

Za iznos sile trenja kotrljanja vrijedi približno empirijska relacija

$$F_{tr\,kot} = \mu_k\, N \tag{3.58}$$

gdje je N je iznos normalne sile, a μ_k predstavlja *koeficijent trenja kotrljanja*, koji ovisi o vrsti materijala od kojih su načinjeni tijelo i podloga.

Za vrlo elastične materijale, kao što je npr. čelik, imamo izuzetno malen koeficijent trenja kotrljanja $\mu_k \approx 2\ 10^{-3}$, što je čak tristo puta manje od koeficijenta trenja μ_{tr} kod klizanja čelika na čeliku. Iz ovog podatka vidimo koliko je efekt kotrljanja koristan u transportu robe. Razumljivo je da se željezničke tračnice i kotači vagona izrađuju od čelika kako bi se postigao maleni koeficijent trenja kotrljanja i uštede energije.

Možemo se još osvrnuti i na gibanje automobila kod kojega imamo kotrljanje kotača s automobilskim gumama. Ako automobil dovedemo do neke brzine na ravnoj cesti i isključimo pogon motora, automobil će se usporavati zbog triju uzroka. Prvi je u otporu zraka kroz koji se automobil giba. Taj otpor raste s brzinom gibanja automobila (detaljnije u sljedećem pododjeljku). Drugi uzrok možemo potražiti u trenju koje uvijek postoji u osovini kotača, no ono je obično jako maleno. Treći je uzrok u trenju kotrljanja automobilskih kotača na cesti. Automobilske gume su uslijed težine automobila spljoštene na mjestu dodira s podlogom, što je vidljivo prostim okom čak i kada su gume dobro napumpane. Zbog toga je koeficijent trenja kotrljanja automobilske gume na asfaltu $\mu_k \approx 2\ 10^{-2}$, što je čak deset puta veće od slučaja sa željezničkim kotačima na tračnicama, pa je kamionski transport manje ekonomičan od željezničkoga, barem što se tiče troškova za energente.

3.4.4 Otpor gibanju kroz fluid

Gibanje tijela kroz fluid (plin ili tekućina) je svakodnevna pojava. Kod svakog bržeg gibanja tijela kroz zrak primjećuje se otpor gibanju, dakle pojava sile koja je suprotna trenutnoj brzini tijela. Kod gibanja kroz tekućinu (npr. vodu), sila zaustavljanja je značajna i kod relativno malenih brzina gibanja tijela. Ovdje ne ćemo detaljnije ulaziti u prirodu ove sile, nego samo spominjemo da ona proizlazi iz molekularnih interakcija. Jednostavniji modeli za obradu cijelog procesa polaze od proučavanja gibanja slojeva fluida, što će uvodno biti izloženo u poglavlju 9, a detaljnije se teorijski obrađuje u području *hidrodinamike*. Ovdje ćemo navesti samo jednostavne empirijske zakonitosti.

Otpor kod malenih brzina gibanja tijela kroz fluid

Kod malenih brzina gibanja nekog tijela kroz fluid utvrđeno je empirijski da je sila otpora tome gibanju proporcionalna brzini, tj. da približno vrijedi relacija

$$F_{fl} = k\, v \tag{3.59}$$

gdje je v iznos brzine tijela a k je konstanta koja ovisi o obliku i veličini tijela i svojstvima fluida.

Gibanje tijela mase m pod utjecajem neke vanjske sile $\vec{F}$ nije jednako u fluidu kao što bi bilo u idealiziranim uvjetima u vakuumu. Kod pokretanja tijela iz stanja mirovanja, njegova akceleracija je $\vec{a} = \vec{F}/m$, no čim tijelo stekne neku brzinu na njega djeluje ukupna sila $\vec{F}_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_{fl}$. Budući da $\vec{F}_{fl}$ ima suprotan smjer od vanjske sile $\vec{F}$, iznos ukupne sile se smanjuje, pa time i akceleracija postaje manja. Drugim riječima, tijelo se i dalje ubrzava, ali uz sve manju i manju akceleraciju. Brzina teži prema graničnoj vrijednosti v_g kod koje je ispunjen uvjet

$$\vec{F}_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_{fl} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{F}{k} \tag{3.60}$$

Kao primjer ovakva gibanja možemo navesti ispuštanje kamena tik ispod površine mirne vode (mora ili jezera) i promatranje njegova tonjenja (slika 3.24a). Na kamen djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema dolje, ali i sila uzgona $\vec{F}_u$ prema gore (detaljnije o sili uzgona u poglavlju 9). Ukupna sila na kamen iznosi $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_u$, te ima smjer prema dolje. Ta sila daje kamenu mase m početnu akceleraciju $\vec{a}_0 = \vec{F}/m$, tj. akceleraciju kojom započne njegovo tonjenje.

Kako kamen počne tonuti, tj. stječe brzinu, pojavljuje se sila otpora fluida $\vec{F}_{fl}$ koja djeluje prema gore, tako da se mijenja ukupna sila $\vec{F}_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_{fl}$ koja djeluje na kamen. Prema drugome Newtonovu zakonu, dobivamo da je iznos akceleracije kamena

$$a = \frac{F_{uk}}{m} = \frac{F - kv}{m} \tag{3.61}$$

Ova jednadžba sadrži cjelokupnu informaciju o gibanju kamena jer je ona iskaz drugoga Newtonova zakona. Međutim, nama je prikladnije imati vremenske ovisnosti pojedinih kinematičkih veličina (put, brzina i akceleracija), a to znači da moramo dobiti rješenja iz jednadžbe (3.61). Odmah možemo uočiti da se u toj jednoj jednadžbi nalaze dvije nepoznanice (brzina i akceleracija), pa njeno algebarsko rješavanje nije moguće. No, postoji dobro poznata veza između promjene brzine i akceleracije ($dv = adt$) koju možemo iskoristiti kao drugu jednadžbu. Stoga diferenciramo lijevu i desnu stranu jednadžbe (3.61), te dobivamo

$$da = -\frac{k}{m}dv = -\frac{k}{m}adt \tag{3.62}$$

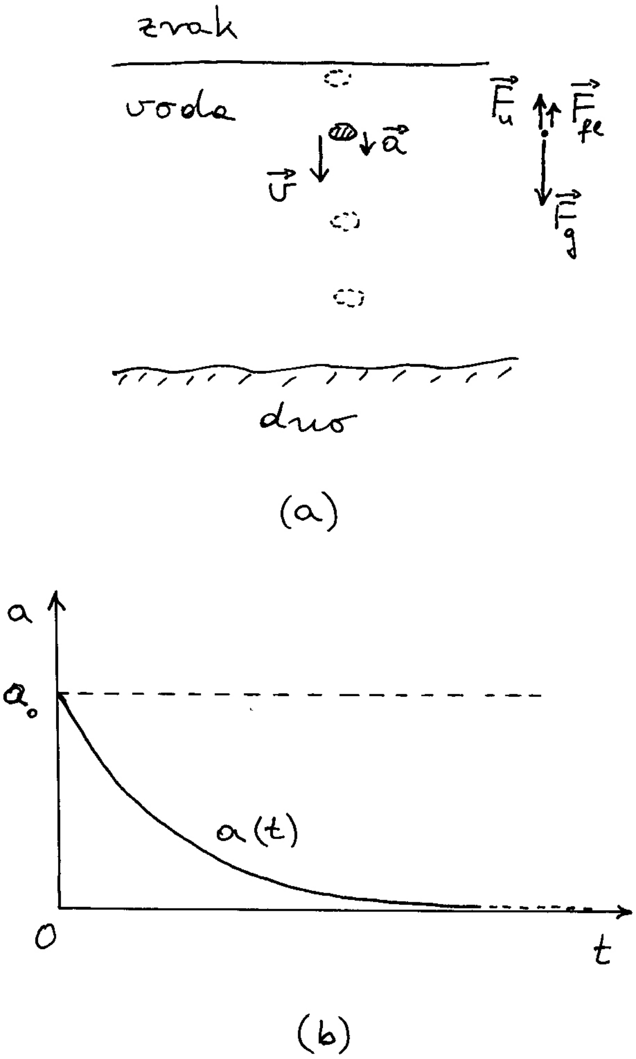
Dobili smo diferencijalnu jednadžbu koja sadrži samo akceleraciju i vrijeme kao varijable. Možemo sada odvojiti varijablu a na lijevu, a vrijeme t na desnu stranu jednadžbe, te integrirati od početnog stanja u $t = 0$, kada akceleracija iznosi a_0, do nekog proizvoljnog trenutka t s akceleracijom a

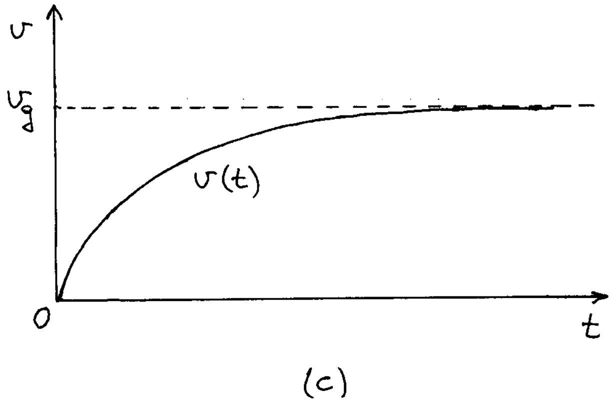
$$\int_{a_0}^{a} \frac{da}{a} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \quad \Longrightarrow \quad \ln\frac{a}{a_0} = -\frac{k}{m}t \tag{3.63}$$

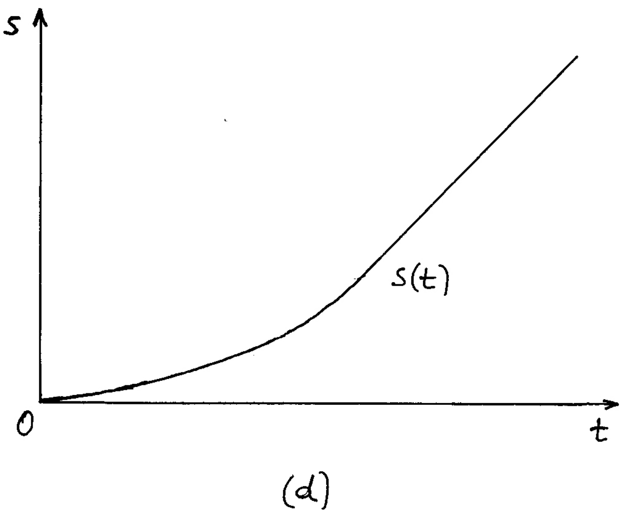
Konačno rješenje za vremensku ovisnost akceleracije glasi

$$a(t) = a_0 e^{-(k/m)t} \tag{3.64}$$

Akceleracija eksponencijalno opada od početne vrijednosti a_0 prema nuli. Grafički prikaz dan je na







Slika 3.24: (a) Gibanje kamena koji je ispušten tik ispod površine vode. Dijagram sila na kamen prikazan je na pomoćnom crtežu. (b) Akceleracija kamena koji tone opada od početne vrijednosti prema nuli. (c) Brzina kamena raste od nule i približava se graničnoj vrijednosti. (d) Put koji kamen prevaljuje od površine vode u dubinu. Ovisnost s(t) postane približno linearna kada brzina kamena praktički dosegne graničnu vrijednost.

slici 3.24b. Akceleracija nikada ne postane točno jednaka nuli, ali postane zanemarivo malena nakon isteka vremena t kada je postignuta nejednakost $(k/m)t >> 1$. Drugim riječima, kamen zapravo nastavlja tonuti sve brže, ali naglost povećavanja brzine se smanjuje i teži prema nuli. Konačno izgleda kao da se brzina tonjenja ne povećava, tj. kao da kamen tone stalnom (graničnom) brzinom.

Točnu vremensku ovisnost brzine možemo sada lako dobiti daljnjim postupkom integriranja

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_0^t a(t)dt = \int_0^t a_0 e^{-(k/m)t} dt \\ &= -a_0 \frac{m}{k}(e^{-(k/m)t} - 1) \end{aligned} \tag{3.65}$$

Uzimajući u obzir da je početna brzina $v(0) = 0$, te izraze za početnu akceleraciju $a_0 = F/m$, te graničnu brzinu $v_g = F/k$, možemo pisati

$$v(t) = v_g(1 - e^{-(k/m)t}) \tag{3.66}$$

Drugi član u zagradi jednak je jedinici za $t = 0$, a eksponencijalno trne kako vrijeme teče. Stoga brzina raste od nule i eksponencijalno se približava graničnoj vrijednosti v_g. Grafički prikaz vremenske ovisnosti brzine dan je na slici 3.24c.

Vremensku ovisnost prevaljenog puta kamena koji tone također možemo dobiti integriranjem

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(t)dt = v_g t + v_g \frac{m}{k}(e^{-(k/m)t} - 1) \tag{3.67}$$

Nakon dovoljno dugog vremena, eksponencijalni član praktički utrne (postane zanemariv prema jedinici), te samo prvi član ostane kao vremenski promjenljiv. Kamen tada tone praktički jednolikom brzinom v_g, što se vidi na grafičkom prikazu krivulje $s(t)$ (slika 3.24d), koja nakon većeg isteka vremena prelazi u pravac nagiba v_g.

Napomena: Jednadžbu (3.61) mogli bismo riješiti i tako da akceleraciju a na lijevoj strani zamijenimo ekvivalentnim izrazom dv/dt, te dobijemo jednadžbu koja sadrži samo brzinu i vrijeme. Prepuštamo čitatelju ove knjige da je riješi i dobije izraz za $v(t)$ koji je identičan jednadžbi (3.66), a zatim i vremenske ovisnosti akceleracije $a(t)$ i prevaljenog puta $s(t)$.

Otpor gibanju tijela velikim brzinama kroz zrak

Kod gibanja u zraku, tijelo može postići velike brzine gibanja. To se svakodnevno događa npr. kod slobodnog pada tijela ili u vožnji automobila na autocesti. Empirijski je utvrđeno da kod velikih brzina sila otpora raste kvadratično s brzinom gibanja tijela

$$F_{fl} = D\,v^2 \tag{3.68}$$

gdje je D konstanta koja ovisi i obliku i veličini tijela, a približno se može uzeti da je proporcionalna najvećem presjeku tijela okomitom na smjer gibanja.

Najzanimljivije je razmotriti skok padobranca iz aviona. Sila kojom ga privlači Zemlja iznosi $F_g = mg$, gdje je m masa čovjeka. Uzgon u zraku možemo zanemariti (v. poglavlje 9), pa se granična brzina postiže kada je ispunjen uvjet

$$mg = D\,v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_g = \sqrt{\frac{mg}{D}} \tag{3.69}$$

Neposredno nakon skoka iz aviona, padobranac slobodno pada bez otvorenog padobrana. U tome slučaju, konstanta D ima približno vrijednost $0,2$ kg/m. Ako je njegova masa oko 75 kg, dobiva se $v_g \approx 60$ ms^{-1}, što je poprilično velika brzina (oko 216 km/h). Pad na tlo uz toliku brzinu bio bi smrtonosan, te padobranac otvara padobran koji ima oko sto puta veći poprečni presjek okomito na smjer padanja nego što ga ima sam čovjek. Konstanta D se uz otvoreni padobran poveća oko sto puta, pa se granična brzina smanji oko deset puta. Pri spuštanju na tlo, padobranac ima brzinu od oko 6 ms^{-1}, što je još uvijek značajna brzina koja odgovara slobodnom skoku s visine od oko 1,8 m. Pojedini športski i rekreacijski padobrani mogu imati znatno veći poprečni presjek, dok vojni desantni padobrani mogu biti manji ako su namijenjeni za brže slijetanje i smanjivanje neželjenih učinaka neprijateljske paljbe.

Navedimo još i primjer brze vožnje automobila na autocesti. Zanimljivo je odrediti brzinu kod koje otpor zraka predstavlja silu jednaku onoj od trenja kotrljanja

$$D\,v^2 = \mu_k N \tag{3.70}$$

gdje je $N = mg$, a m masa automobila. Za automobilsku gumu na asfaltu je koeficijent trenja kotrljanja $\mu_k \approx 2\ 10^{-2}$, a konstanta D za automobil širine oko 1,6 m i visine oko 1,4 m iznosi oko $0,6$ kgm^{-1}. Neka je masa automobila i vozača oko 1500 kg, pa dobivamo brzinu od oko 22 ms^{-1} (oko 80 km/h). Kod manjih brzina prevladava trenje kotrljanja, dok kod brzina uobičajenih na autocestama prevladava otpor zraka.

Poglavlje 4

REFERENTNI SUSTAVI

Za opisivanje raznih gibanja koja smo razmatrali u prethodnim poglavljima, bilo je potrebno najprije odrediti neku točku kao ishodište O koordinatnog sustava u odnosu prema kojemu smo određivali položaje tijela u pojedinim vremenskim trenucima. No, gibanje je relativan pojam jer položaje istoga tijela možemo određivati i u odnosu prema nekoj drugoj točki O' koja se u vremenu pomiče relativno prema točki O. U potonjem će slučaju gibanje tijela izgledati sasvim drugačije. U ovome ćemo poglavlju razraditi relativnost gibanja i utvrditi kako možemo matematički povezati kinetičke veličine (položaj, brzina i akceleracija) koje su mjerene u odnosu na dva različita koordinatna sustava.

Osobito je važno pitanje odnosa sile i gibanja tijela promatranog u nekom koordinatnom sustavu. Utvrdit ćemo da je nužno razlikovati dvije skupine referentnih koordinatnih sustava koje nazivamo *inercijalni* i *neinercijalni* sustavi. Newtonovi zakoni, koji utvrđuju odnos sile i gibanja, vrijede samo u inercijalnim sustavima, pa te sustave najčešće odabiremo za opis fizikalnog procesa. No, ponekad je važno znati kako izgleda opis gibanja viđen iz nekog neinercijalnog sustava, pa ćemo i tome posvetiti pažnju u ovome poglavlju.

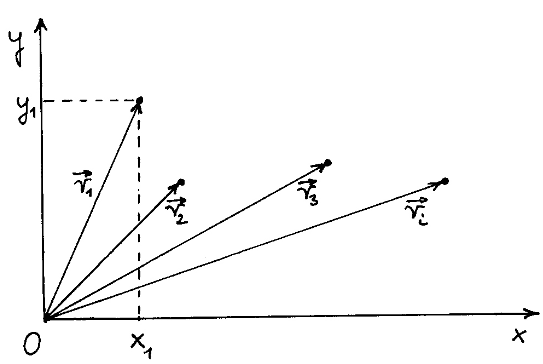
4.1 Relativnost gibanja

Relativnost gibanja doživljavamo u svakodnevnome životu, te nam taj pojam nije stran. Ako polagano šećemo ulicom, brži će nam prolaznik odmaknuti. Ako pak potrčimo, isti će prolaznik zaostajati iza nas. Za matematičku obradu relativnih gibanja potrebno je prethodno uvesti neke nove pojmove i razjasniti načine prikazivanja relativnih gibanja na crtežima.

4.1.1 Pojam referentnog sustava

Svako gibanje tijela odvija se u prostoru i vremenu. Stoga je potrebno utvrditi postupak određivanja položaja tijela (u čestičnome modelu) u prostoru i vremenskog trenutka kada se tijelo nalazilo u tome položaju. U tu svrhu uvodi se pojam *referentnog sustava*, koji uključuje odabir nekog ishodišta i koordinatnih osi u svrhu određivanja položaja tijela, te odabir nekog trenutka koji će nam predstavljati $t = 0$, kako bismo u odnosu na njega određivali trenutke ostalih događaja.

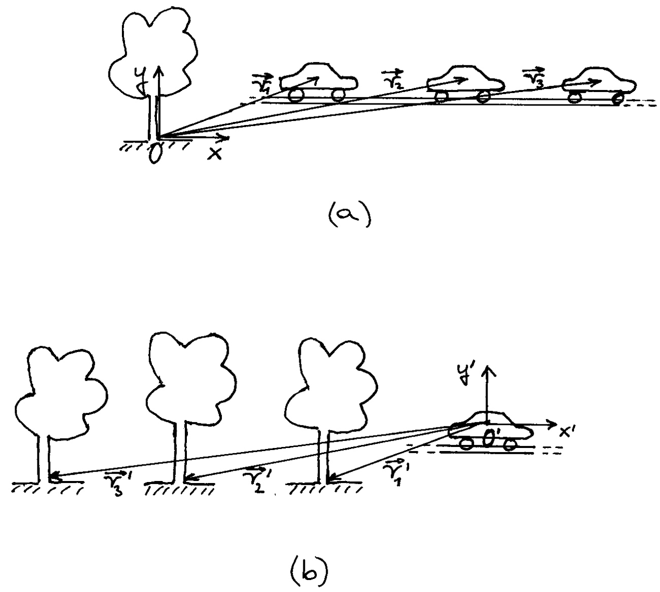
Primjer referentnog sustava i gibanja tijela (čestice) dan je na slici 4.1. Radi jednostavnosti prikaza pretpostavljeno je da se gibanje tijela odvija samo u jednoj ravnini, te su u nju položene osi referentnog koordinatnog sustava Oxy. Razumije se, vremensku os ne možemo prikazati na slici 4.1, ali pretpostavljamo da je trenutak $t = 0$ odabran, te označavamo položaje tijela u ostalim trenucima.



Slika 4.1: Za utvrđivanje položaja tijela (čestice) u pojedinim trenucima potrebno je prethodno odabrati neki referentni sustav (koordinatni sustav i vremensku skalu).

Položaj tijela u trenutku t_1 iskazujemo bilo pomoću vektora $\vec{r}_1$, koji se proteže od ishodišta O do mjesta na kojemu se tijelo nalazi, ili pomoću dviju veličina (x_1, y_1), koje predstavljaju udaljenosti tijela od ishodišta, gledajući zasebno duž osi x i y. Isto vrijedi i za položaje tijela u drugim vremenskim trenucima.

Pogled na sliku 4.1 može ostaviti dojam kao da postoji nekakav "apsolutni" prostor u kojemu je određen položaj referentnog koordinatnog sustava Oxy. Međutim, prazan prostor ne daje mogućnost određivanja nekog položaja. Naime, u praznom prostoru ne znamo "u odnosu na što" bismo postavili ishodište O, te da li je ono "nepomično". Gledajući sliku 4.1 možemo samo reći da je ishodište O nepomično na samome papiru. No, crtanje slike na papiru ima za nas smisla ako taj crtež predočuje neko realno gibanje u materijalnome svijetu koji nas okružuje.



Slika 4.2: (a) Položaji automobila u vremenskim trenucima t_1, t_2 i t_3 u odnosu na ishodište koordinatnog sustava postavljenog u podnožju stabla. Gledatelj slike se postavlja u ulogu promatrača koji miruje na Zemlji. (b) Alternativan prikaz u kojemu je ishodište O' trajno na istome mjestu u slici. Gledatelj slike se postavlja u ulogu promatrača pred kojim automobil miruje, a Zemlja i stablo odmiču u lijevo. Gledatelj se može zamisliti i u ulozi osobe koja sjedi u automobilu te promatra stablo i nalazi njegove položaje u vremenskim trenucima t_1, t_2 i t_3.

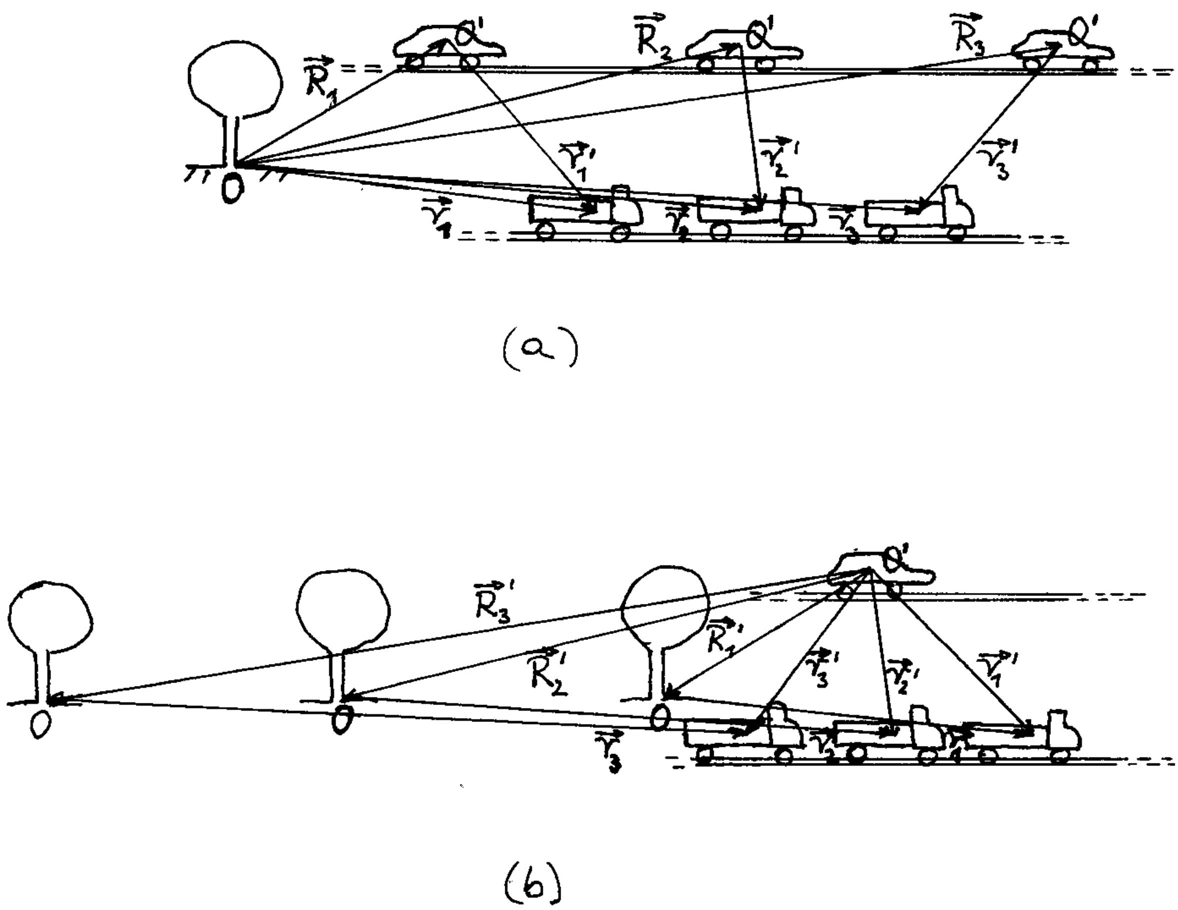
Referentni sustavi u okruženju

Očito je da raspravu o referentnim sustavima moramo povezati s realnijim situacijama u kojima postoje i okolna tijela, a ne samo tijelo čije gibanje želimo promatrati. Na slici 4.2a prikazana je jednostavna situacija u kojoj se automobil giba po ravnoj cesti na površini Zemlje. Ishodište O koordinatnog sustava postavljeno je nepomično na površini Zemlje u podnožju nekog stabla. Pretpostavljeno je da smo odabrali neki trenutak kao $t = 0$, te možemo određivati trenutke u kojima je automobil bio na određenim položajima na cesti. Na slici 4.2a prikazana su kao primjer tri takva položaja automobila u odgovarajućim vremenskim trenucima t_1, t_2 i t_3. Ovakav način prikazivanja ostavlja dojam kao da Zemlja "uistinu miruje", a automobil se "uistinu giba". Zapravo se radi samo o tome da Zemlja i stablo miruju nacrtani na papiru koji imamo pred sobom, pa nam to djeluje sugestivno da i sebe zamislimo kao promatrača koji stoji mirujući na Zemlji.

Pokušajmo sada analizirati kako bi nam izgledalo promatranje kada bismo sebe zamislili u automobilu, te kako bismo to promatranje prikazali nekim crtežom na papiru. Postavimo u tu svrhu ishodište O' drugog koordinatnog sustava tako da bude stalno vezano uz automobil, te nacrtajmo sliku 4.2b u kojoj automobil s ishodištem O' trajno miruje na papiru. Gledajući sada papir možemo se uživjeti u ulogu promatrača koji sjedi u automobilu. Na slici se vide položaji stabla u odnosu prema ishodištu O' u istim prethodno utvrđenim trenucima t_1, t_2 i t_3. Zamišljamo da se u tom prikazu cijela Zemlja, skupa sa stablom i asfaltom ispod automobila, pomiče tijekom vremena u lijevu stranu. Vektore položaja stabla obilježavamo kao $\vec{r}_i^{\,\prime}$ $(i = 1, 2, 3)$, a povlačimo ih iz točke O' prema položajima stabla u trenucima t_i. Ti se vektori položaja razlikuju od onih u slici 4.2a samo po smjeru, tj. $\vec{r}_i^{\,\prime} = -\vec{r}_i$.

4.1.2 Promatranje gibanja trećeg tijela u dvama referentnim sustavima

U prethodnoj smo raspravi analizirali gibanje točke O' naprama točki O, odnosno obrnuto. Proširimo sada raspravu na gibanje nekoga trećeg tijela u od-



Slika 4.3: (a) Pogled promatrača koji miruje u sustavu S s ishodištem O vezanim uz stablo. Vide se položaji drugog sustava $S^{'}$ s ishodištem $O^{'}$ koje je vezano uz automobil, te položaji promatranog kamiona u vremenskim trenucima t_1, t_2 i t_3. (b) Pogled promatrača koji miruje u sustavu $S^{'}$. Kamion se u odnosu na njega pomiče kao da se giba "natraške".

nosu prema točkama O i $O^{'}$. Na slici 4.3a prikazana je ponovo površina Zemlje sa stablom i točkom O u njegovu podnožju, tako da izgleda "kao da miruju". Zapravo, psihološki postavljamo sebe u ulogu promatrača koji miruje u odnosu na stablo, kao što smo to već radili u slučaju slike 4.2a. Automobil uz koji je vezana točka $O^{'}$ prikazan je u gibanju, tj. prolazi u pojedinim trenucima t_i $(i = 1, 2, 3)$ kroz položaje koje sada označavamo vektorima $\vec{R}_i$. Usredotočimo pažnju na kamion (treće tijelo) koji vozi sporije paralelnom cestom. Njegove položaje u trenucima t_i određujemo vektorima $\vec{r}_i$ koji imaju početak u točki O. Na slici su prikazani i vektori $\vec{r}_i^{\,'}$ koji povezuju trenutne položaje ishodišta $O^{'}$ i kamiona. Vidimo da uvijek vrijedi odnos

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{r}_i^{\,'} \tag{4.1}$$

Možemo ovaj odnos vektora zapisati tako da naglasimo njegovu valjanost u bilo kojem trenutku t

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}^{\,'}(t) \tag{4.2}$$

Da bismo vizualizirali promatranje iz drugog koordinatnog sustava, nacrtajmo sliku 4.3b u kojoj se automobil s ishodištem O' nalazi uvijek na istome mjestu na papiru. Promatrajući tu sliku doživljavamo sebe kao promatrača pred kojim automobil miruje, a možemo se zamisliti i kao osobu koja sjedi u automobilu i promatra stablo s ishodištem O i kamion na paralelnoj cesti. Uočimo da se u tom viđenju kamion giba "natraške". Položaj kamiona u trenutku t_i određen je vektorom $\vec{r}_i^{\,\prime}$ koji polazi iz ishodišta O'. Za položaje ishodišta O imamo vektore $\vec{R}_i^{\,\prime}$. Nalazimo da vrijedi vektorska relacija

$$\vec{r}_i^{\,\prime} = \vec{R}_i^{\,\prime} + \vec{r}_i \tag{4.3}$$

Isto vrijedi općenito u svakom trenutku t, pa možemo napisati

$$\vec{r}^{\,\prime}(t) = \vec{R}^{\,\prime}(t) + \vec{r}(t) \tag{4.4}$$

Uspoređujući vektore $\vec{R}^{\,\prime}$ i $\vec{R}$ u slikama 4.3a i b, vidimo da uvijek vrijedi

$$\vec{R}^{\,\prime} = -\vec{R} \tag{4.5}$$

tako da jednadžbu (4.4) možemo napisati u obliku

$$\vec{r}^{\,\prime}(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \tag{4.6}$$

Lako je uočiti da su jednadžbe (4.2) i (4.6) matematički ekvivalentne.

Napomena: Slike 4.3a i 4.3b prikazuju jednu te istu fizikalnu realnost. Svaki od vektora $\vec{r}_i$ zadržava svoj iznos i smjer u obje slike. Radi se samo o translacijama vektora. Isto vrijedi i za vektore $\vec{r}_i^{\,\prime}$.

Pojam promatrača u referentnom sustavu

Uobičajeno je govoriti o "*promatraču u referentnom sustavu*" koji prati gibanje nekog tijela. Ovaj bi izraz mogao značiti da se neki promatrač uistinu nalazi u ishodištu dotičnoga koordinatnog sustava, te pogledom prati gibanje nekog tijela, a uza se ima i sat za mjerenje vremena. To je zgodan način razmišljanja, te često možemo i sebe zamisliti u takvoj ulozi.

Međutim, pojam "promatrača" u nekom referentnom sustavu S nije nužno personaliziran. Pod pojmom "promatrača" zapravo se podrazumijeva postojanje eksperimentalnih uređaja pomoću kojih je moguće određivati položaje promatranoga tijela u odnosu prema ishodištu dotičnog referentnog koordinatnog sustava, te mjerenja vremena. Kada pak govorimo o gibanju istoga tijela sa stajališta "promatrača" u drugome referentnom sustavu S', podrazumijevamo da nam isti, ili neki drugi, mjerni uređaji mogu davati podatke o položajima toga tijela u odnosu prema ishodištu O' tijekom vremena.

Relativnost brzine gibanja i akceleracije

Osvrnimo se ponovo na zbivanja prikazana na slici 4.3a u kojoj ishodište O miruje, što je pogled promatrača u sustavu S. Ako želimo utvrditi brzinu promatranog kamiona u tom sustavu, možemo derivirati jednadžbu (4.2) po vremenu, pa dobivamo

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}^{\,\prime}(t) \tag{4.7}$$

Veličina $\vec{v}(t)$ predstavlja brzinu kamiona u trenutku t za promatrača u sustavu S. Ishodište O' giba se brzinom $\vec{V}(t)$ u odnosu prema ishodištu O. Ove dvije brzine prikazane su na slici 4.4a, koja daje pogled promatrača u sustavu S.

Veličina $\vec{v}^{\,\prime}(t)$ u jednadžbi (4.7) predstavlja brzinu kojom se kamion giba u odnosu na ishodište O'. To je, dakle, brzina kamiona za promatrača u sustavu S'. Nju nije prikladno unositi u sliku 4.4a, koja je namijenjena za pogled promatrača u sustavu S, a ne za onoga u sustavu S'. Unošenjem dviju brzina za isto tijelo (kamion) nastala bi zbrka u interpretaciji slike.

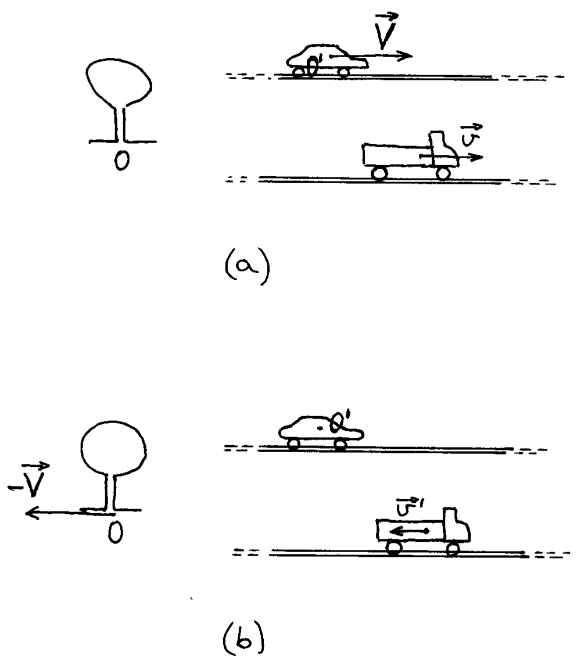
Razmotrimo sada alternativni prikaz prema kojemu na papiru miruje automobil s ishodištem O', kao što smo to već imali na slici 4.3b, tj. na način kako ta gibanja vidi promatrač u sustavu S'. Brzinu promatranog kamiona za tog promatrača možemo dobiti ako deriviramo jednadžbu (4.6) po vremenu

$$\vec{v}^{\,\prime}(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t) \tag{4.8}$$

Na slici 4.4b prikazana je u nekome trenutku brzina kamiona $\vec{v}^{\,\prime}(t)$ u odnosu na ishodište O' koje miruje. Ne treba nas čuditi što kamion ima brzinu usmjerenu "natraške". Tako to izgleda za promatrača u sustavu S'. Ishodište O ima za njega brzinu $-\vec{V}(t)$, a isto se odnosi i na cijelu Zemlju te asfalt ispod auta i kamiona.

Napomena: Na slici 4.4b nije prikladno prikazati brzinu $\vec{v}(t)$ kojom se kamion giba u odnosu

prema ishodištu O jer je to brzina kamiona za promatrača u sustavu S, pa njena interpretacija u ovoj slici ne bi bila jasna.



Slika 4.4: (a) Promatrač u sustavu S s ishodištem O vezanim uz stablo opaža brzinu kretanja kamiona i brzinu drugog referentnog sustava S'. (b) Promatrač u sustavu S' opaža brzinu udaljavanja stabla uz koje je vezan sustav S i brzinu kamiona koji se doimlje kao da "nazaduje".

Mogli bismo dalje nastaviti s deriviranjem jednadžbi (4.7) i (4.8) po vremenu te dobiti odnose za akceleracije u odnosu na jedno i na drugo ishodište, no to ćemo ostaviti za kasnije razmatranje u ovome poglavlju.

4.2 Inercijalni sustavi

U prethodnom smo odjeljku 4.1 ustanovili da gibanje istoga tijela može izgledati sasvim različito ako se kinematičke veličine (položaj, brzina i akceleracija) određuju u različitim referentnim sustavima koji se gibaju jedan prema drugome. Kada bismo mogli utvrditi neki referentni sustav koji bi imao istaknutija svojstva od ostalih, mogli bismo ga smatrati "glavnim" ili "apsolutnim", pa bi i određivanje gibanja tijela u odnosu prema takvome sustavu bilo "apsolutno". No, to nije moguće, tj. ne nalazimo kriterij po kojemu bi neki referentni sustav bio apsolutno izdignut nad svima ostalima.

Ipak, nisu svi mogući referentni sustavi potpuno ravnopravni. Vidjet ćemo da možemo naći kriterij po kojemu možemo svrstati svaki od mogućih referentnih sustava u jednu od dvije skupine koje nazivamo *inercijalni sustavi* i *neinercijalni sustavi.* U ovome odjeljku bavit ćemo se pobliže prvom skupinom, a o drugoj će biti riječi u sljedećem odjeljku 4.3.

4.2.1 Definicija inercijalnog referentnog sustava

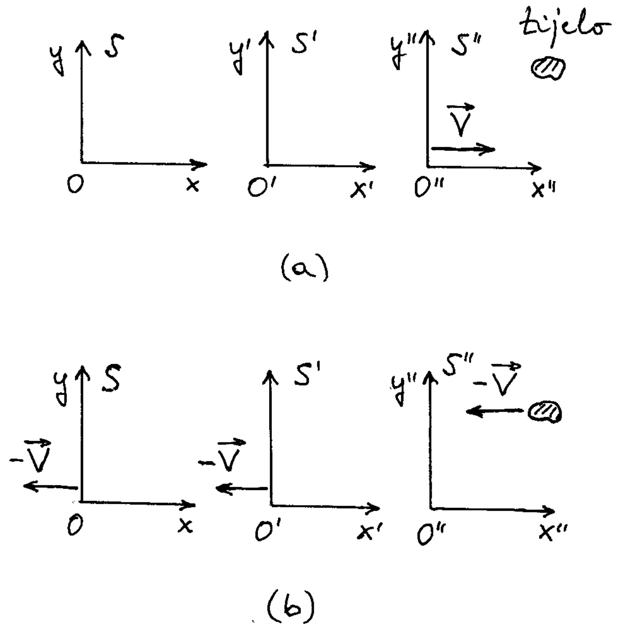
U raspravi o Newtonovim zakonima u poglavlju 2 uveli smo već pojam inercijalnog referentnog sustava. Možemo još jednom ponoviti definiciju:

> ***Svaki referentni sustav u kojemu vrijedi prvi Newtonov zakon svrstavamo u inercijalne referentne sustave.***

To znači da bilo koje tijelo, na koje ne djeluje nikakva sila (slobodno tijelo), nužno miruje ili se giba jednoliko po pravcu u odnosu prema ishodištu toga koordinatnog sustava.

Jasno nam je odmah da mora postojati beskonačno mnoštvo inercijalnih sustava. Naime, kada utvrdimo jedan inercijalni sustav S u odnosu prema kojemu neko slobodno tijelo miruje, lako nalazimo nebrojeno mnoštvo drugih sustava kojima su ishodišta samo pomaknuta u odnosu na ishodište O prvoga sustava, ali inače miruju u odnosu prema njemu. Na slici 4.5a prikazani su sustavi S i S' kao primjeri navedenog mnoštva takvih sustava u kojima slobodno tijelo miruje, te ih smatramo inercijalnima.

Nadalje je na slici 4.5a prikazan i sustav S'', koji se u odnosu prema sustavu S giba konstantnom brzinom $\vec{V}$. I taj je sustav inercijalan jer se u odnosu prema njemu promatrano slobodno tijelo giba jednoliko po pravcu. U to se možemo lako uvjeriti ako nacrtamo sliku 4.5b u kojoj je ishodište O'' sustava S'' prikazano kao točka koja miruje na papiru, tj. kao pogled promatrača u sustavu S''. Promatrano slobodno tijelo ima konstantnu brzinu $-\vec{V}$, pa konstatiramo da je S'' uistinu inercijalan sustav.



Slika 4.5: (a) Slobodno tijelo miruje u inercijalnim sustavima S i S' koji su pomaknuti jedan prema drugome. Sustav S'' giba se prema njima brzinom $\vec{V}$. (b) Promatrač u sustavu S'' opaža gibanje slogodnog tijela konstantnom brzinom $-\vec{V}$. Istom se brzinom gibaju i sustavi S i S'.

Razumije se, takvih sustava kao što je S'' ima beskonačno mnogo. Svaki od njih može se gibati nekom drugom konstantnom brzinom u odnosu prema sustavu S. Promatrač iz takva sustava vidio bi da se slobodno tijelo giba nekom konstantnom brzinom, pa moramo zaključiti da su svi ti sustavi inercijalni.

Odnos Newtonovih zakona i inercijalnih referentnih sustava

Kao što smo vidjeli, prvi Newtonov zakon nam služi kao kriterij za utvrđivanje inercijalnih referentnih sustava. Razmotrimo sada drugi Newtonov zakon. U njemu se govori o promjeni gibanja tijela uslijed djelovanja sile. Međutim, ne navodi se referentni sustav prema kojemu bi trebalo mjeriti položaje tijela tijekom vremena kako bi se utvrdila promjena gibanja tijela. U prvi bi nam se mah moglo učiniti da drugi Newtonov zakon ima "univerzalnu" valjanost, tj. da se može primjenjivati u svim referentnim sustavima, bilo inercijalnima ili neinercijalnima. No, ta je pomisao varljiva.

Do ispravnog zaključka možemo doći uz sljedeću provjeru. Ako promatrač u nekom referentnom sustavu utvrdi da drugi Newtonov zakon vrijedi kod promatranja raznih gibanja, onda se očekuje da će mu vrijediti uvijek i za bilo koji iznos sile na tijelo, pa i za poseban slučaj kada je iznos sile jednak nuli, tj. kada sile uopće nema. Tada bi akceleracija tijela morala biti jednaka nuli, što znači da tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Uočavamo da taj posebni slučaj u primjeni drugoga Newtonova zakona predstavlja poveznicu prema prvome Newtonovu zakonu, a time i prema inercijalnim sustavima. Drugim riječima, ako u nekom referentnom sustavu vrijedi drugi Newtonov zakon, onda vrijedi i prvi Newtonov zakon, što u konačnici znači da drugi Newtonov zakon vrijedi samo u inercijalnim sustavima.

Treći Newtonov zakon ne govori o gibanju tijela, pa se pitanje referentnog sustava niti ne postavlja. Uzajamno međudjelovanje (akcija i reakcija) dvaju tijela postoji bez obzira na to iz kojega referentnog sustava (inercijalnog ili neinercijalnog) promatramo dotična dva tijela. Kažemo da treći Newtonov zakon vrijedi u svim referentnim sustavima.

Galileijev princip relativnosti

Galileo Galilei je raspravljao o relativnosti gibanja i isticao primjere koji su u ono doba mogli biti provjeravani. Tako je tvrdio da putnik zatvoren u prostoriju na brodu, koji plovi jednolikom brzinom po mirnome moru, ne bi ni po čemu mogao ustanoviti da li taj brod miruje, ili pak plovi nekom stalnom brzinom. Kuglica, koja bi bila postavljena tako da miruje na ravnome stolu, mirovala bi bez obzira na brzinu broda. Ako bi se u drugome pokusu kuglica ispustila iz ruke točno iznad sredine stola, padala bi ravno prema sredini stola i tamo udarila. Sva druga događanja iz prirodnoga svijeta, od ponašanja cvijeća u vazi pa do npr. leta muhe u toj prostoriji, odvijala bi se jednako kao i u brodu koji miruje. Galilei je ustvrdio da su zakoni fizike isti u svim referentnim sustavima koji se jedan prema drugome gibaju stalnom brzinom. To danas nazivamo *Galileijevim principom relativnosti.*

Nakon uvođenja Newtonove formulacije mehanike, mogli bismo nekadašnji Galileijev princip rela-

tivnosti izraziti suvremenijim jezikom. Taj je princip ekvivalentan tvrdnji da Newtonovi zakoni, kao temeljni zakoni fizike, vrijede u svim inercijalnim sustavima, kao što je gore već rečeno.

Napomena: U Galileijevo doba nije bio formuliran prvi Newtonov zakon, pa ni pravi pojam inercijalnog referentnog sustava. Galilei je uzimao referentni sustav vezan uz površinu Zemlje u kojemu se samo približno (unutar točnosti mjerenja u Galileijevo doba) može utvrditi zakonitost kao u pravome inercijalnom sustavu.

4.2.2 Galileijeve transformacije

Sasvim općenito, gibanje nekog tijela možemo pratiti u bilo kojem referentnom sustavu. Već smo u jednadžbi (4.2) pokazali kako poznavanjem vektora $\vec{R}(t)$ kao relativnog gibanja sustava S' prema sustavu S, te poznavanjem vektora položaja tijela $\vec{r}\,'(t)$ u sustavu S', možemo izračunati vektor položaja istoga tijela $\vec{r}(t)$ u odnosu na sustav S. Vrijedi i obrat u jednadžbi (4.6).

Ovdje ćemo se ograničiti *samo na inercijalne sustave*. Ako se sustav S' giba stalnom brzinom $\vec{V}$ u odnosu prema sustavu S, s time da su im se ishodišta poklopila u $t = 0$, imamo

$$\vec{R}(t) = \vec{V}t \tag{4.9}$$

pa se transformacije vektora položaja istoga tijela mjerenih u dvama inercijalnim sustavima pišu

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{V}t \quad , \quad \vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{V}t \tag{4.10}$$

gdje je $\vec{V}$ konstantan vektor. Transformacije brzina istoga tijela mjerenih u dvama inercijalnim sustavima možemo dobiti deriviranjem jednadžbe (4.10) ili pozivanjem na općenitije jednadžbe (4.7) i (4.8) uz specifikaciju stalne brzine $\vec{V}$ sustava S' u odnosu prema sustavu S

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V} \quad , \quad \vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V} \tag{4.11}$$

Korisno je još i utvrditi transformaciju za akceleracije istoga tijela koje se mogu utvrditi mjerenjima u dvama inercijalnim sustavima. Deriviranjem jednadžbi (4.11) dobivamo

$$\vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t) \tag{4.12}$$

jer derivacija konstantnog vektora $\vec{V}$ daje nulu. Ovaj smo rezultat dobili formalno matematičkim putem. No, mogli smo ga dobiti i čisto fizikalnim rasuđivanjem. Prema drugome Newtonovu zakonu, akceleracija tijela ovisi o djelovanju sile na to tijelo. Budući da u Newtonovoj fizici sila na tijelo ne ovisi o izboru referentnog sustava, a ne mijenja se niti masa tijela, moraju obje akceleracije biti jednake. Pri tome podrazumijevamo da u oba referentna sustava vrijedi drugi Newtonov zakon, što znači da izvedeni zaključak vrijedi samo ako su oba referentna sustava inercijalna.

Napomena: U gornjem je razmatranju pretpostavljeno da za promatrače u oba referentna sustava vrijeme teče "jednako". To znači da bismo formalno mogli pisati $t = t'$ s time da su ishodišta bila poklopljena u $t = t' = 0$. Moramo odmah upozoriti da ova pretpostavka vrijedi jako dobro za brzine koje su mnogo manje od brzine svjetlosti. To je područje primjenjivosti Newtonovih zakona. Kod brzina koje postaju usporedive s brzinom svjetlosti postoji odstupanje o kojemu će biti riječi u teoriji relativnosti u poglavlju 11.

Primjer za primjenu Galileijevih transformacija

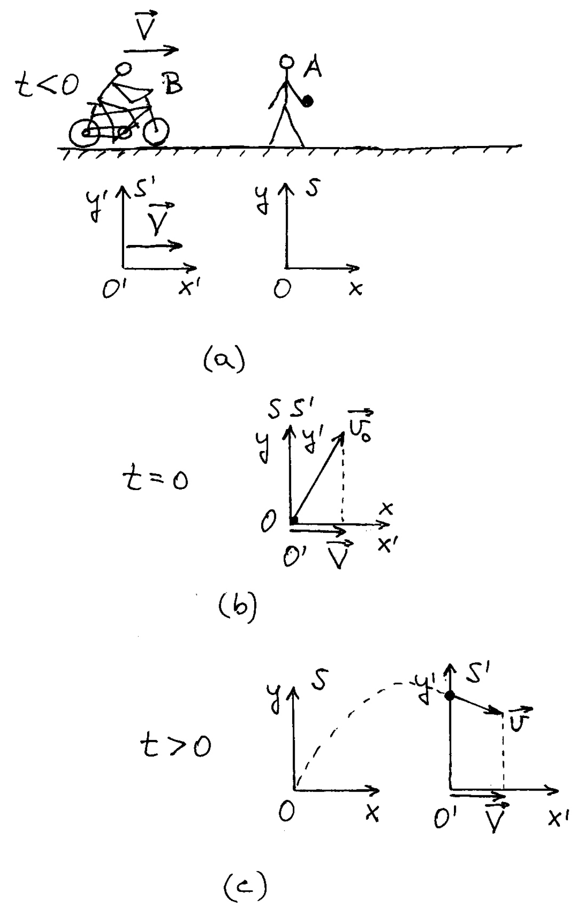
Kao ilustraciju gore opisanog principa relativnosti gibanja i transformacija kinematičkih veličina iz jednog inercijalnog sustava u drugi, razmotrimo događaj prikazan uzastopno na slikama 4.6a-c. Osoba A stoji na travnjaku pokraj puteljka i drži u ruci lopticu dok osoba B vozi bicikl nekom konstantnom brzinom $\vec{V}$. Neka je uz osobu A vezan koordinatni sustav Oxy, dok je uz osobu B vezan drugi koordinatni sustav $O'x'y'$. Stoga možemo tijek događanja pratiti prikazujući samo koordinatne sustave, što olakšava crtanje na slici 4.6. Trenutak kada osoba B na biciklu mimoilazi osobu A (slika 4.6b) odaberimo kao $t = t' = 0$. U tom trenutku osoba A baca lopticu brzinom $\vec{v}_0$ koja je tako odabrana da se njena komponenta duž osi x podudara s brzinom kojom osoba B vozi bicikl. Iz slike 4.6c je vidljivo da će za osobu A (promatrač u sustavu S), gibanje loptice izgledati kao kosi hitac.

Položaji loptice mjereni u odnosu prema dvama referentnim sustavima S i S' u istome trenutku ($t = t'$) povezani su jednadžbom (4.10), koju pišemo po komponentama

$$x = x' + Vt \qquad x' = x - Vt \tag{4.13}$$
$$y = y' \qquad y' = y \tag{4.14}$$

Svaki promatrač mjeri brzinu loptice u svome referentnom sustavu, a za uzajamnu vezu dobivamo

$$v_x = v_x' + V \qquad v_x' = v_x - V \tag{4.15}$$
$$v_y = v_y' \qquad v_y' = v_y \tag{4.16}$$



Slika 4.6: (a) Biciklist vozi konstantnom brzinom $\vec{V}$ po stazi pokraj koje stoji osoba A koja drži lopticu. Osobama A i B možemo pridružiti referentne sustave S i S' te tako pratiti daljnje zbivanje. (b) Trenutak u kojemu se podudaraju dva referentna sustava. Loptica dobiva početnu brzinu $\vec{v}_0$ kojoj je projekcija na horizontalnu os jednaka brzini $\vec{V}$. (c) Nakon nekog vremena promatrač u sustavu S (osoba A) opaža lopticu u silaznoj putanji s brzinom koja i nadalje ima projekciju na horizontalnu os jednaku brzini $\vec{V}$.

Iz ranijeg razmatranja o kosom hicu (odjeljak 2.3), znamo da se komponenta brzine duž osi x ne mijenja tijekom vremena, tj. $v_x = v_{0x}$, a zbog odabranog uvjeta $v_{0x} = V$ prilikom bacanja loptice imamo zaključno

$$v_x = V \qquad v_x' = 0 \tag{4.17}$$
$$v_y = v_y' \qquad v_y' = v_y \tag{4.18}$$

Dok se za osobu A loptica giba duž osi x stalnom brzinom V, osoba B ne opaža njeno gibanje duž osi x'. Obje osobe opažaju jednake trenutne brzine loptice duž svojih vertikalnih osi y i y'. Te se komponente brzine mijenjaju tijekom vremena na isti način jer su akceleracije jednake

$$a_y = a_y' \qquad a_y' = a_y \tag{4.19}$$

Napomena: Slike 4.6a-c nacrtane su onako kako događaje vidi osoba A, tj. promatrač u referentnom sustavu S. Prepuštamo čitatelju da sam nacrta niz slika u kojima bi bilo prikazano viđenje osobe B, tj. promatrača u referentnom sustavu S'.

4.2.3 U potrazi za idealnim inercijalnim sustavom u realnome svijetu

Iz dosadašnjeg razmatranja možemo zaključiti da bi nam bilo dovoljno kada bismo mogli pouzdano utvrditi barem jedan inercijalni referentni sustav, jer bismo zatim u odnosu na taj sustav mogli utvrditi još jedan inercijalni sustav, a onda i beskonačno mnoštvo njih. Međutim, početni zadatak nije jednostavan jer bismo morali biti sigurni da na promatrano tijelo ne djeluje nikakva sila, a u realnome svijetu uvijek ima okolnih tijela čije djelovanje na promatrano tijelo nije moguće isključiti.

Ipak, imajmo na umu da sva poznata djelovanja jednoga tijela na drugo opadaju s njihovom međusobnom udaljenosti, pa na tome tragu možemo ići prema nekoj idealizaciji. Izvedimo najprije zamišljeni pokus s tri kuglice koje negdje daleko u Svemiru bacimo duž triju okomitih osi. Udaljavanjem jedne od druge, uzajamna gravitacijska privlačenja postaju zanemariva, pa ako bismo mjerenjem ustanovili da se kuglice gibaju relativno jedna prema drugoj stalnim brzinama, mogli bismo reći da spomenuti sustav triju okomitih osi predstavlja inercijalan referentni sustav. Razumije se, i

sustav kojemu bi ishodište bilo vezano uz jednu od kuglica, tako da ona u njemu miruje, bio bi inercijalan jer bi se ostale dvije kuglice gibale u tome sustavu nekim konstantnim brzinama.

Zamišljeni bi pokus dao željeni ishod samo u slučaju kada bi ostala tijela u svemiru davala iščezavajuću rezultantnu silu na kuglice. U protivnom bi svaka kuglica imala neku zakrivljenu putanju, pa se ne bi mogle gibati jednoliko po pravcu jedna prema drugoj. Postoji li takvo mjesto u Svemiru gdje bi se mogao izvesti opisani pokus s povoljnim ishodom, ili takvoga mjesta nema, ne možemo zasigurno znati. U fizici je korisno razmišljati o zamišljenim pokusima, ali isto tako i o pokusima koji su realno ostvarivi, makar i ne bili idealni.

Krenimo sada od pokusa na površini Zemlje. Ako je tijelo položeno na horizontalnu podlogu, možemo reći da je vektorski zbroj sila koje na njega djeluju praktički jednak nuli. Naime, dominantne sile na to tijelo su gravitacijska sila Zemlje $\vec{F}_g$ prema dolje i normalna sila podloge $\vec{N}$ prema gore. Gravitacijske sile ostalih okolnih tijela također postoje, ali su toliko malene da ih možemo praktički zanemariti. Ako tijelo postavimo u stanje mirovanja na podlozi, ono će i nadalje ostati na istome mjestu na podlozi. To nam se čini sukladnim prvome Newtonovu zakonu, pa bismo bili skloni reći da je referentni sustav vezan uz površinu Zemlje inercijalan.

Međutim, znamo da se Zemlja dnevno okreće oko osi, pa i tijelo na površini Zemlje izvodi kružno gibanje. Centripetalna akceleracija iznosi $a_c = \omega^2 r = (2\pi/T)^2 r$, gdje je r radijus kružnice. Za tijelo na ekvatoru moramo uvrstiti $r = r_Z$, pa je $a_c \approx 0,034$ ms^{-2}. Radi se o vrlo malenoj akceleraciji. Na većim geografskim širinama φ, centripetalna akceleracija je još manja zbog manjeg radijusa kružnice $r = r_Z \cos\varphi$ po kojoj se tijelo dnevno giba. Ako smo spremni zanemariti tako malene akceleracije, možemo referentni sustav vezan uz površinu Zemlje smatrati približno inercijalnim sustavom. To često i radimo te dobivamo opažanja koja možemo opisati Newtonovim zakonima koji su primjenjivi samo u inercijalnim sustavima.

Ipak, postoje eksperimenti na površini Zemlje koji, ako se promatraju iz sustava čvrsto vezanog uz površinu Zemlje, pokazuju odstupanje od Newtonovih zakona. O njima će biti mnogo govora na kraju ovoga poglavlja. Za sada recimo da savršeniji izbor inercijalnog sustava predstavlja onaj kojemu bi ishodište bilo u središtu Zemlje, a njegove osi ne bi pratile rotaciju Zemlje oko vlastite osi. U takvome referentnom sustavu bilo bi ispravno utvrđeno da tijelo na površini Zemlje ne miruje nego izvodi kružno gibanje, te bi se mogla izmjeriti odgovarajuća centripetalna akceleracija i utvrditi da na tijelo djeluje neka rezultantna sila koja igra ulogu centripetalne sile. Niz opažanja koja se navode na kraju ovoga poglavlja podliježu Newtonovim zakonima ako se promatraju iz ovoga sustava. Stoga bi taj sustav zacijelo bolje odgovarao idealnom inercijalnom sustavu.

Međutim, cijela Zemlja ima godišnju ophodnju oko Sunca, tj. giba se približno po kružnici sa centripetalnom akceleracijom $a_c \approx 0,006$ ms^{-2}. Ako želimo biti do te mjere precizni, možemo postaviti ishodište referentnog sustava u središte Sunca, te ostvariti jako dobru aproksimaciju idealnoga inercijalnog sustava.

Daljnja poboljšanja išla bi prema postavljanju ishodišta referentnog sustava u središte galaksije ili prema nekoj drugoj točki u Svemiru. Sva gibanja u Svemiru nisu danas još poznata, a nije poznata niti ukupna masa i energija u Svemiru, tako da nije moguće dati konačan odgovor u potrazi za idealnim inercijalnim referentnim sustavom.

4.3 Neinercijalni sustavi i fiktivne sile

U prethodnom smo odjeljku definirali inercijalne referentne sustave kao one u kojima vrijedi prvi Newtonov zakon. Sada možemo jednostavno svrstati sve druge referentne sustave u *neinercijalne*. To su, dakle, svi oni referentni sustavi u kojima ne vrijedi prvi Newtonov zakon.

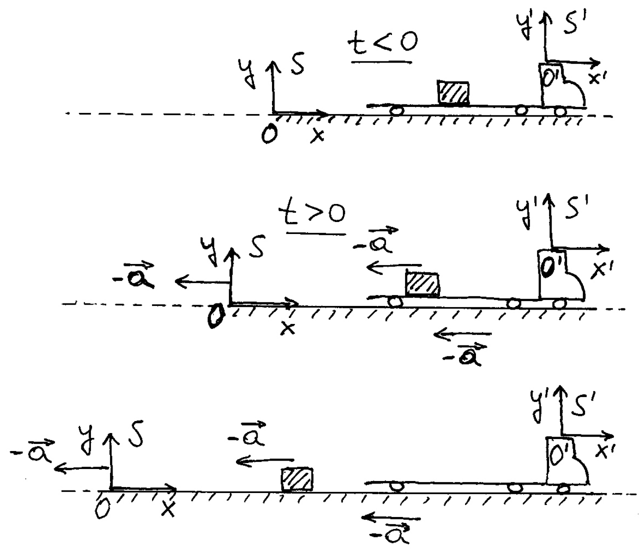
Odaberimo jedan inercijalni i jedan neinercijalni referentni sustav iz kojih ćemo promatrati neki fizikalni proces ili stanje. Interesira nas kakve veze možemo uspostaviti između kinematičkih i dinamičkih varijabli u dvama sustavima. Razmotrit ćemo najprije jednostavnije slučajeve u kojima neinercijalni sustav ima konstantnu akceleraciju (duž nekog pravca) odnosu prema inercijalnime, a kasnije ćemo razmotriti slučajeve u kojima neinercijalni sustav rotira u odnosu prema inercijalnome. Svi ostali općenitiji slučajevi mogli bi se u načelu obraditi kao kombinacije prethodnih dvaju.

4.3.1 Sustavi ubrzani na pravcu

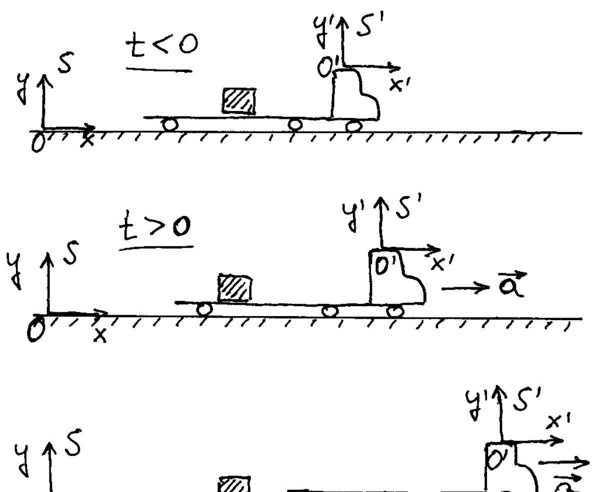
Kao zorni prikaz neka nam posluži slika 4.7a u kojoj uzimamo sustav vezan uz površinu Zemlje kao približno inercijalan referentni sustav S, a promatrano se tijelo nalazi na dugačkoj kamionskoj platformi, za koju pretpostavljamo da je idealno glatka i klizava. Dok kamion miruje ($t < 0$) tijelo na njegovoj platformi ostaje u stanju mirovanja prema sustavu S, sukladno prvome Newtonovu zakonu. Ako uz platformu kamiona vežemo i neki drugi referentni sustav $S^{'}$, promatrano tijelo miruje i u odnosu prema tome sustavu.

Međutim, ako od trenutka $t = 0$ kamion krene iz mirovanja u jednoliko ubrzano gibanje akceleracijom $\vec{a}$, referentni sustav $S^{'}$ vezan uz njegovu platformu postane neinercijalan. Tako su na slici 4.7a prikazane situacije nakon uzastopnih intervala Δt na način kako bi to vidio promatrač u inercijalnom referentnom sustavu S vezanom uz površinu Zemlje. Tijelo i dalje miruje jer na njega ne djeluje nikakva sila budući da (po pretpostavci) nema trenja s platformom kamiona. Nakon nekog vremena, platforma se pomakne u desno toliko da tijelo ostane bez podloge, te može slobodno pasti na tlo.

U slici 4.7b prikazan je pogled promatrača u neinercijalnom sustavu $S^{'}$ koji je vezan uz platformu kamiona. Na papiru je taj sustav uvijek na istome mjestu, dok sustav S (sa Zemljom) i promatrano tijelo odmiču ubrzano u lijevo. Njihova akceleracija je $-\vec{a}$. Iako na tijelo ne djeluje nikakva sila, za promatrača u neinercijalnom sustavu ono ne miruje, niti se giba jednoliko po pravcu. Očito je da se kod opažanja u neinercijalnom sustavu ne može primjenjivati ni prvi ni drugi Newtonov zakon.



(b)



(a)

Slika 4.7: (a) Promatrač u sustavu S opaža da tijelo ostaje na istome mjestu (duž osi x) čak i kada kamion ubrzano krene ($t > 0$) jer je platforma zamišljena kao idealno glatka i klizava te na tijelo ne djeluje nikakva realna sila. (b) Promatrač u sustavu $S^{'}$ opaža ubrzano gibanje tijela za $t > 0$, iako na tijelo ne djeluje neka realna sila. Sustav $S^{'}$ je tada neinercijalan.

Fiktivna sila u neinercijalnom sustavu

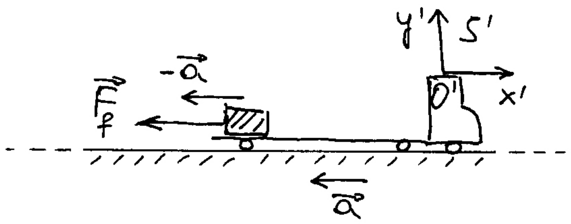
Ako za promatrača u neinercijalnom sustavu ne vrijede Newtonovi zakoni, a nismo upoznali nikakve druge zakone gibanja, onda nam ne bi preostalo drugo do li ustanoviti da dotični promatrač nema ama baš nikakve mogućnosti izračunavanja i predviđanja gibanja tijela. No, stvari ipak nisu tako nepovoljne. Ovdje ćemo pokazati da se može primijeniti jedno dopunsko matematičko pravilo kojim se promatraču u neinercijalnom sustavu otvara mogućnost računanja i predviđanja gibanja tijela.

Promatrajući iznova sliku 4.7b lako uočavamo da

bi se promatrač u neinercijalnom sustavu mogao formalno poslužiti drugim Newtonovim zakonom ukoliko bi u mašti zamislio da na tijelo djeluje neka sila koja mu daje akceleraciju $-\vec{a}$. Za tu *fiktivnu silu* (lat. *fictus - izmišljen*) mora vrijediti

$$\vec{F}_f = -m\,\vec{a} \tag{4.20}$$

Slika 4.8 upravo prikazuje pogled promatrača u neinercijalnom sustavu i njegov način rješavanja problema. Dovoljno je da taj promatrač računski uvede silu $\vec{F}_f$, te zatim može formalno primijeniti drugi Newtonov zakon i dobiti ispravno rješenje za gibanje tijela u svojem (neinercijalnom) referentnom sustavu.



Slika 4.8: Pokušaj promatrača u neinercijalnom sustavu S' da objasni gibanje tijela primjenom drugoga Newtonova zakona. To mu uspijeva ukoliko samo računski uvede postojanje sile $\vec{F}_f$ (fiktivna sila).

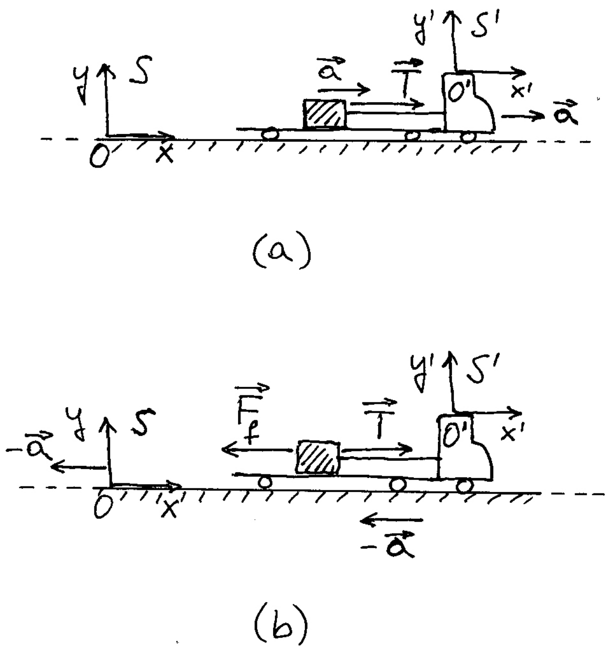
Napomena: Mogli bismo reći da promatrač u neinercijalnom sustavu mora dva puta prekršiti zakone fizike. Prvi prekršaj je u tome što primjenjuje Newtonove zakone koji ne vrijede u njegovu sustavu, a drugi je prekršaj u izmišljanju sile koja zapravo ne postoji. No, ako to napravi na način propisan jednadžbom (4.20), dobiva ispravan rezultat gibanja, viđen iz svojega referentnog sustava.

Razmotrimo sada slučaj u kojemu je tijelo na platformi kamiona vezano užetom za kabinu kao što prikazuje slika 4.9a. Za promatrača u inercijalnom sustavu S, kamion se giba jednoliko ubrzano akceleracijom $\vec{a}$, a isto se tako ubrzano giba i tijelo vezano užetom. Primjenjujući drugi Newtonov zakon na tijelo, promatrač zaključuje da ono ima akceleraciju zato što na njega djeluje (realna) sila napetosti užeta koja iznosi $\vec{T} = m\,\vec{a}$.

Pogled promatrača u neinercijalnom sustavu S' vezanom uz platformu kamiona dan je na slici 4.9b. Za njega tijelo miruje. Taj promatrač lako može ustanoviti da je uže napeto, tj. sila napetosti užeta nije nestala, te djeluje na tijelo. Promatrač, dakle, ustanovljuje da prvi i drugi Newtonov zakon ne vrijede u neinercijalnom referentnom sustavu. No, on bi i u tome sustavu mogao barem formalno primijeniti Newtonove zakone ako izmisli dodatnu silu $\vec{F}_f$, tako da ukupna sila na tijelo iščezava

$$\vec{F}_f + \vec{T} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_f = -m\,\vec{a} \tag{4.21}$$

Uočavamo da je ova fiktivna sila ista kao i ona koju



Slika 4.9: (a) Promatrač u inercijalnom sustavu S opaža tijelo koje se giba ubrzano jer ga vuče napeti konopac, koji je drugim krajem vezan uz kabinu kamiona, a sam kamion se kreće ubrzano. (b) Za promatrača u neinercijalnom sustavu S', tijelo na platformi kamiona miruje, iako je konopac napet i djeluje na tijelo silom $\vec{T}$. Primjena drugoga Newtonova zakona je formalno moguća uz dodavanje fiktivne (izmišljene) sile $\vec{F}_f$.

smo već imali u jednadžbi (4.20). Ona ovisi o masi tijela i akceleraciji neinercijalnog sustava u kojemu se nalazi promatrač.

Napomena: Sila $\vec{T}$ kojom uže djeluje na tijelo je stvarna sila. Za nju vrijedi treći Newtonov zakon, tj. tijelo djeluje na uže silom reakcije, koja je jednaka po iznosu, ali suprotnoga smjera od sile $\vec{T}$. Nasuprot tome, sila $\vec{F}_f$ ne može biti stvarna jer ne proizlazi iz djelovanja nekog drugog tijela na promatrano tijelo. Stoga ne postoji ni sila reakcije jer uopće nema drugoga tijela na koje bi reakcija mogla djelovati. Vidimo da nam provjera s trećim Newtonovim zakonom može poslužiti da prepoznamo je li neka sila stvarna ili ne.

Možemo sada generalizirati tvrdnje iz prethodnih posebnih slučajeva. Uzmimo općenito da na tijelo mase m djeluje neka (stvarna) sila $\vec{F}$ koja mu u inercijalnom sustavu S daje akceleraciju $\vec{a} = \vec{F}/m$ (slika 4.10a). Na istoj je slici prikazan i proizvoljno odabrani neinercijalni sustav S', koji se ubrzava akceleracijom $\vec{a}_{ni}$ u odnosu prema inercijalnom sustavu. Promatrano tijelo ima neku akceleraciju i u odnosu prema sustavu S', ali na slici 4.10a prikazujemo samo akceleraciju $\vec{a}$ jer ta slika daje pogled promatrača iz sustava S.

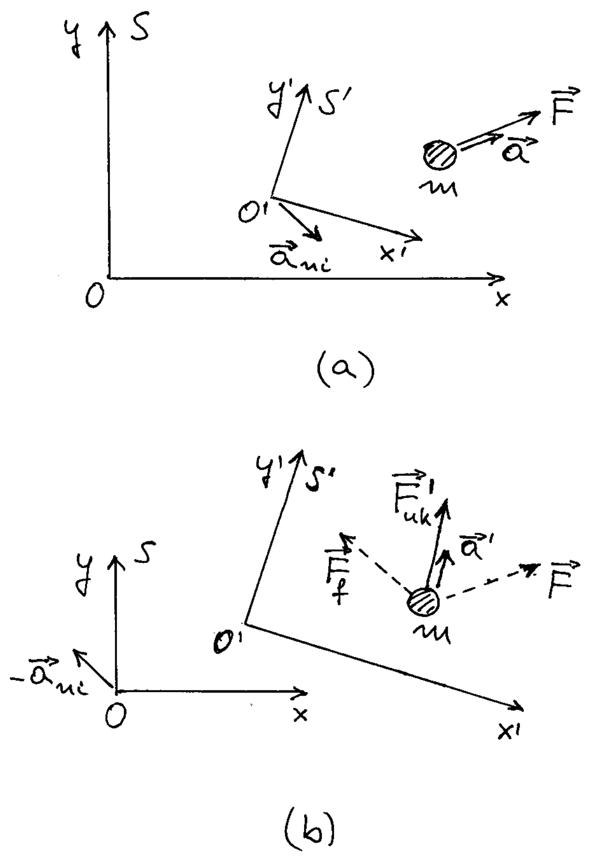
Da bismo odredili akceleraciju $\vec{a}\,'$ tijela u odnosu na neinercijalni sustav S', poslužimo se općim relacijama koje smo izvodili u odjeljku 4.1 za odnos kinematičkih veličina u bilo kojim dvama referentnim sustavima. Deriviranjem jednadžbe (4.2) po vremenu dobili smo jednadžbu (4.7) za odnos brzina, koju ovdje možemo prepisati

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{ni}(t) + \vec{v}\,'(t) \tag{4.22}$$

gdje je $\vec{v}_{ni}(t)$ vremenski promjenljiva brzina neinercijalnog sustava S' u odnosu prema sustavu S. Deriviranjem jednadžbe (4.22) po vremenu dobivamo odnos akceleracija

$$\vec{a} = \vec{a}_{ni} + \vec{a}\,' \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{ni} \tag{4.23}$$

Akceleraciju $\vec{a}\,'$ možemo prikazati na slici 4.10b koja daje pogled promatrača u neinercijalnom sustavu S'. Na njoj je prikazana i stvarna sila $\vec{F}$ koja djeluje na tijelo. Očito je da akceleracija $\vec{a}\,'$ ne slijedi iz sile $\vec{F}$ prema drugome Newtonovu zakonu.



Slika 4.10: (a) Pogled promatrača u inercijalnom sustavu S koji opaža da tijelo mase m ima akceleraciju $\vec{a}$ jer na njega djeluje sila $\vec{F}$. Neinercijalni sustav S' se ubrzava akceleracijom $\vec{a}_{ni}$. (b) Pogled promatrača u neinercijalnom sustavu S' za kojega sustav S ima akceleraciju $-\vec{a}_{ni}$, dok tijelo ima akceleraciju $\vec{a}\,'$. Ako taj promatrač želi izračunati opaženu akceleraciju $\vec{a}\,'$ formalnom primjenom drugoga Newtonova zakona, mora stvarnoj sili $\vec{F}$ dodati fiktivnu (izmišljenu) silu $\vec{F}_f$ tako da dobije ukupnu silu $\vec{F}\,'_{uk}$.

To je i očekivano jer za promatrača u neinercijalnom sustavu ne vrijedi drugi Newtonov zakon. Ako taj promatrač želi formalno primijeniti drugi Newtonov zakon, mora izmisliti silu $\vec{F}_f$ tako da dobije ukupnu silu u neinercijalnom sustavu S'

$$\vec{F}\,'_{uk} = \vec{F} + \vec{F}_f \tag{4.24}$$

koja tijelu može dati opaženu akceleraciju u sustavu S'

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{F}\,'_{uk}}{m} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_f}{m} = \vec{a} + \frac{\vec{F}_f}{m} \qquad (4.25)$$

Uzmemo li u obzir jednadžbu (4.23), fiktivna sila mora biti

$$\vec{F}_f = -m\,\vec{a}_{ni} \qquad (4.26)$$

Kao važan zaključak, možemo reći da svakom tijelu u neinercijalnom sustavu možemo pridijeliti fiktivnu silu prema pravilu iz jednadžbe (4.26). Fiktivne sile za razna tijela su različite u ovisnosti o njihovim masama. S druge strane, fiktivna sila na isto tijelo je različita od jednog do drugog neinercijalnog sustava u ovisnosti o akceleraciji $\vec{a}_{ni}$ kojom se taj sustav ubrzava u odnosu prema inercijalnom sustavu.[1]

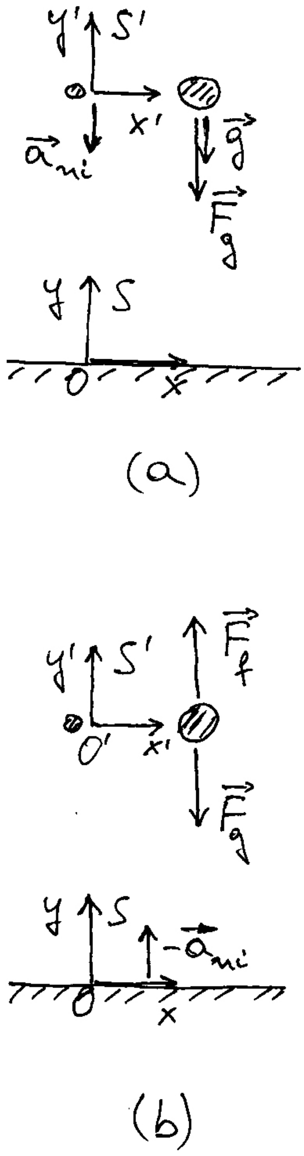
Tijelo u slobodnom padu

Kao primjer za analizu gibanja tijela u inercijalnom i neinercijalnom referentnom sustavu može nam poslužiti slobodan pad prikazan na slici 4.11a. Za promatrača u inercijalnom sustavu S vezanom uz površinu Zemlje, promatrano tijelo mase m ima akceleraciju $\vec{g}$ zato što na njega djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prikazana na slici 4.11a. Pored promatranog tijela, prikazano je na slici 4.11a još jedno tijelo u slobodnom padu. Ono također ima akceleraciju $\vec{g}$ u odnosu prema inercijalnom sustavu S, pa ako uz to tijelo vežemo neinercijalan sustav S', njegova će akceleracija biti $\vec{a}_{ni} = \vec{g}$.

Viđenje promatrača u neinercijalnom sustavu S' prikazano je na slici 4.11b. Za njega promatrano tijelo miruje, iako na njega djeluje stvarna sila $\vec{F}_g$. Da bi formalno mogao primijeniti Newtonove zakone, mora izmisliti silu $\vec{F}_f = -m\,\vec{a}_{ni} = -m\,\vec{g}$. Ukupna sila na tijelo tada iščezava ($\vec{F}_g - m\,\vec{g} = 0$), pa su formalno zadovoljeni Newtonovi zakoni.

Razumije se, promatraču u neinercijalnom sustavu S' izgleda kao da mu se Zemlja približava akceleracijom $-\vec{a}_{ni}$, kako to prikazuje slika 4.11b.

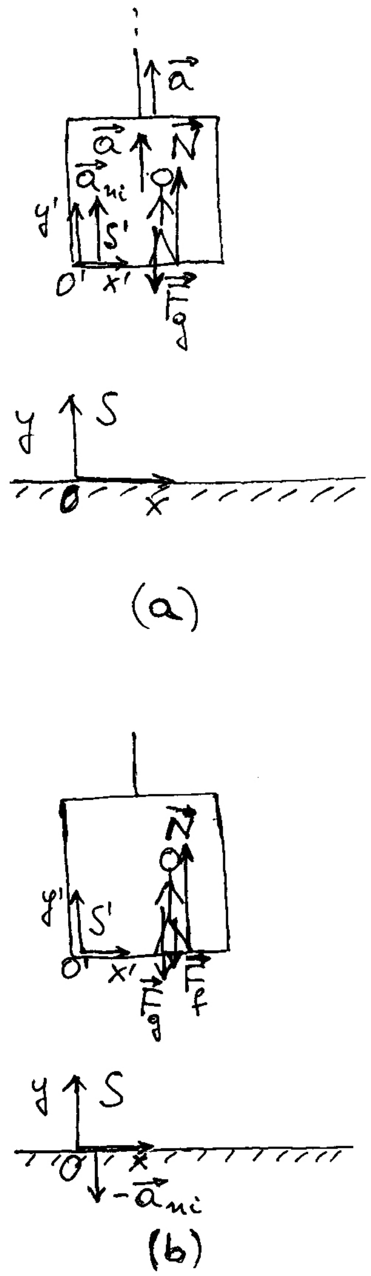
[1] Za fiktivne se sile u nekim udžbenicima fizike upotrebljava izraz *inercijalne sile*. Njime se želi naglasiti da porijeklo te sile ne dolazi od nekog stvarnog međudjelovanja tijela, nego tu silu formalno uvodi promatrač u neinercijalnom sustavu da bi tijelo u njegovu promatranju povratilo svojstvo inercije, kojega inače nema u neinercijalnom sustavu.



Slika 4.11: (a) Pogled promatrača u inercijalnom sustavu S na tijelo koje slobodno pada. Paralelno s promatranim tijelom, pada još jedno tijelo uz koje je vezan neinercijalni sustav S'. (b) Pogled promatrača iz neinercijalnog sustava S'. Za njega promatrano tijelo miruje, pa za formalnu primjenu drugoga Newtonova zakona mora postojećoj sili $\vec{F}_g$ dodati fiktivnu (izmišljenu) silu $\vec{F}_f$.

Čovjek u dizalu

Odnose u neinercijalnom sustavu možemo doživjeti vozeći se u dizalu tijekom njegova ubrzavanja. Slika



Slika 4.12: (a) Pogled iz inercijalnog sustava S na čovjeka u dizalu koje se ubrzava uvis. Na čovjeka djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ i normalna sila podloge $\vec{N}$. Rezultanta tih sila daje čovjeku akceleraciju $\vec{a}$. (b) Pogled iz neinercijalnog sustava $S^{'}$ u liftu na istog čovjeka. Ako se u tome sustavu želi formalno primijeniti drugi Newtonov zakon, potrebno je dodati fiktivnu silu $\vec{F}_f$.

4.12a prikazuje dizalo koje se ubrzano podiže uvis akceleracijom $\vec{a}$ jer ga vuče čelično uže odgovarajućom silom (nije naznačena na slici 4.12a). Radi se o pogledu promatrača iz inercijalnog sustava S vezanog uz površinu Zemlje. Neka čovjek u dizalu bude tijelo na koje usredotočujemo pažnju. Razumije se, čovjek također ima istu akceleraciju $\vec{a}$ kao i dizalo. Ona se ostvaruje tako što na čovjeka djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema dolje i normalna sila $\vec{N}$ kojom podloga dizala djeluje na čovjeka prema gore, pa imamo

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g + \vec{N}}{m} \tag{4.27}$$

Na slici 4.12a prikazane su obje sile. Razumije se, da bi čovjek imao akceleraciju prema gore, mora normalna sila podloge biti veća po iznosu od gravitacijske sile.

Ako uz dizalo vežemo referentni sustav $S^{'}$, dobivamo neinercijalni sustav koji ima akceleraciju $\vec{a}_{ni} = \vec{a}$. Sustav $S^{'}$ je također prikazan na slici 4.12a.

Slika 4.12b prikazuje pogled iz neinercijalnog sustava $S^{'}$ vezanog uz samo dizalo. Sasvim razumljivo, dizalo i čovjek u njemu miruju u tom sustavu, dok se inercijalni sustav S ubrzava akceleracijom $-\vec{a}$. Na čovjeka djeluju stvarne sile $\vec{F}_g$ i $\vec{N}$. Ako se želi formalno primijeniti drugi Newtonov zakon u sustavu $S^{'}$, potrebno je izmisliti silu $\vec{F}_f$ tako da bude

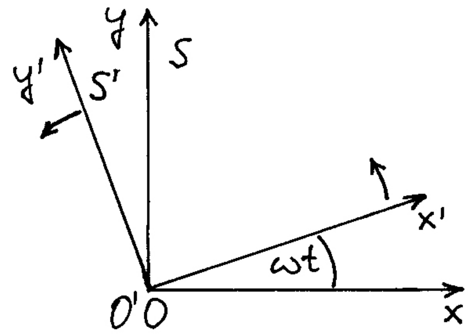
$$\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_f = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_f = -(\vec{F}_g + \vec{N}) = -m\vec{a}_{ni} \tag{4.28}$$

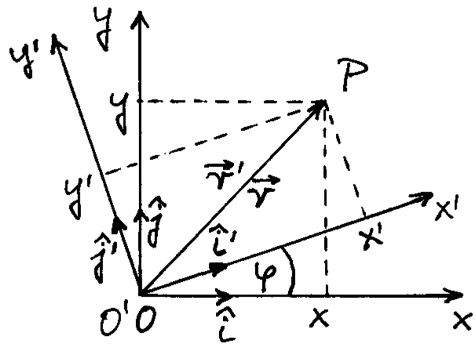
gdje je istaknuto da se radi o akceleraciji neinercijalnog sustava $\vec{a}_{ni}$.

4.3.2 Rotirajući sustavi

Razmotrimo sada referentni sustav $S^{'}$ kojemu se ishodište $O^{'}$ ne pomiče u odnosu prema ishodištu O inercijalnog sustava S, ali sustav $S^{'}$ rotira, tj. smjerovi osi $x^{'}$ i $y^{'}$ zakreću se tijekom vremena u odnosu prema osima x i y. Najjednostavniji primjer dobivamo ako se ishodišta O i $O^{'}$ trajno poklapaju, a osi jednoga i drugoga sustava su poklopljene samo u trenutku $t = 0$. K tome još, ograničimo se na jednostavan slučaj u kojemu sustav $S^{'}$ rotira konstantnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$ oko osi z, odnosno $z^{'}$ koja se s njom trajno poklapa. Slika 4.13a prikazuje oba koordinatna sustava u nekom kasnijem trenutku $t > 0$. Osi z i $z^{'}$ su okomite na ravninu crtnje.

Na slici 4.13b prikazana su ponovo oba referentna sustava s time da je dodana neka točka P u pros-





Slika 4.13: (a) Osi sustava S i $S^{'}$ točno su se poklapale u $t=0$, a slika prikazuje stanje u nekom kasnijem trenutku t. Sustav S koji miruje smatramo inercijalnim. (b) Točka P ima različite koordinate u dvama koordinatnim sustavima.

toru. Vektor položaja točke P isti je u oba referentna sustava jer se oshodišta O i $O^{'}$ poklapaju. Pišemo, dakle

$$\vec{r}^{\,'} = \vec{r} \tag{4.29}$$

Međutim, rastavljanje tih vektora po komponentama različito je u dvama koordinatnim sustavima kako prikazuje slika 4.13b. U sustavu S jedinični vektori su $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$, pa su algebarske komponente vektora $\vec{r}$, te koordinate točke P, zapisane kao x i y. Analogno tome, u sustavu $S^{'}$ imamo jedinične vektore $\hat{\imath}^{\,'}$ i $\hat{\jmath}^{\,'}$, te koordinate iste točke P zapisane kao $x^{'}$ i $y^{'}$. Sukladno jednadžbi (4.29) imamo

$$x^{'}\,\hat{\imath}^{\,'} + y^{'}\,\hat{\jmath}^{\,'} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \tag{4.30}$$

Iz geometrije na slici 4.13b lako uočavamo da jedinični vektor $\hat{\imath}^{\,'}$ možemo rastaviti na komponente duž osi x i y sustava S, označavajući radi jednostavnosti zapisa kut $\varphi = \omega t$

$$\hat{\imath}^{\,'} = \cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\varphi\,\hat{\jmath} \tag{4.31}$$

Analogno možemo rastaviti i jedinični vektor $\hat{\jmath}^{\,'}$

$$\hat{\jmath}^{\,'} = -\sin\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath} \tag{4.32}$$

Uvrštavanjem ovih izraza za $\hat{\imath}^{\,'}$ i $\hat{\jmath}^{\,'}$ u lijevu stranu jednadžbe (4.30), te sređivanjem izraza dobivamo

$$(x^{'}\cos\varphi - y^{'}\sin\varphi)\hat{\imath} + (x^{'}\sin\varphi + y^{'}\cos\varphi)\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \tag{4.33}$$

Jednakost lijeve i desne strane ove jednadžbe podrazumijeva da je koeficijent uz jedinični vektor $\hat{\imath}$ s lijeve strane znaka jednakosti jednak onome s desne strane. Isto vrijedi i za koeficijente uz jedinični vektor $\hat{\jmath}$, tako da pišemo

$$x = x^{'}\cos\omega t - y^{'}\sin\omega t \tag{4.34}$$
$$y = x^{'}\sin\omega t + y^{'}\cos\omega t \tag{4.35}$$

gdje smo još uvažili da je $\varphi = \omega t$. Ove jednadžbe daju transformaciju koordinata iste točke P iz sustava $S^{'}$ u sustav S, tj. ako su nam poznate koordinate $x^{'}$ i $y^{'}$, možemo izračunati koordinate x i y.

Analognim postupkom, rastavljajući jedinične vektore $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$ na komponente duž $\hat{\imath}^{\,'}$ i $\hat{\jmath}^{\,'}$ mogli bismo dobiti jednadžbe

$$x^{'} = x\,\cos\omega t + y\,\sin\omega t \tag{4.36}$$
$$y^{'} = -x\,\sin\omega t + y\,\cos\omega t \tag{4.37}$$

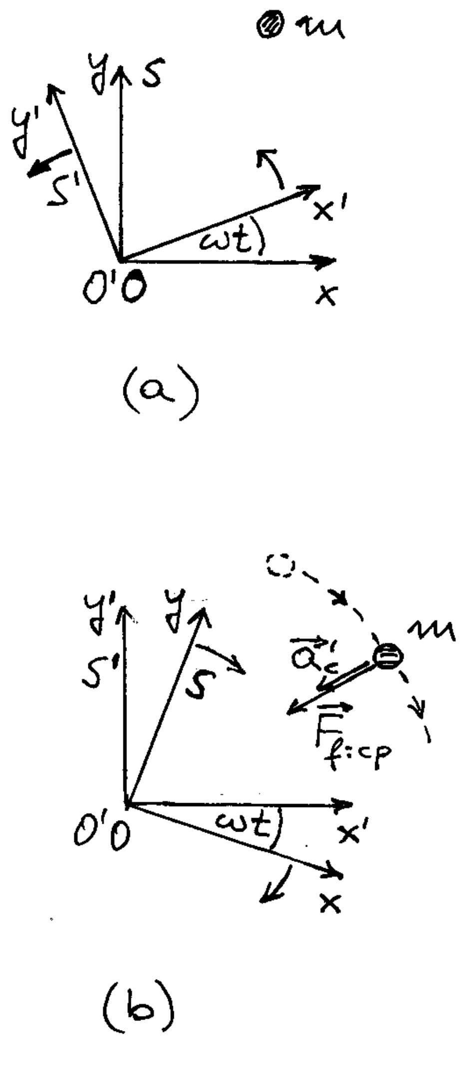
kojima transformiramo koordinate iste točke P iz sustava S u sustav $S^{'}$, tj. iz poznatih koordinata x i y izračunavamo $x^{'}$ i $y^{'}$.

Izvedene odnose među koordinatama bilo koje točke možemo primijeniti na gibanje čestice. Tada imamo vremenske ovisnosti $x(t)$ i $y(t)$ u sustavu S i odgovarajuće ovisnosti $x^{'}(t)$ i $y^{'}(t)$ u sustavu $S^{'}$.

Fiktivna centripetalna sila

Razmotrimo sada odnos sile i gibanja u rotirajućem sustavu. Najjednostavniji je slučaj u kojemu promatrano tijelo miruje u inercijalnom sustavu S, kao što to prikazuje slika 4.14a. Razumije se, za mirovanje tijela u inercijalnom sustavu nije potrebna nikakva sila.

Međutim, za promatrača u rotirajućem sustavu $S^{'}$, to tijelo izvodi kružno gibanje kutnom brzinom $-\vec{\omega}$, kao što za njega rotira i sustav S (4.14b). Iako nema djelovanja stvarne sile na promatrano tijelo, ono za promatrača u sustavu $S^{'}$ niti miruje, niti se giba jednoliko po pravcu. Očito je da sustav $S^{'}$ nije inercijalan.



Slika 4.14: (a) Pogled iz inercijalnog sustava S na tijelo koje miruje. (b) Promatrač u neinercijalnom sustavu $S^{'}$ opaža kružno gibanje tijela počevši od trenutka $t = 0$. Ako ga želi objasniti primjenom drugog Newtonova zakona, mora uvesti fiktivnu centripetalnu silu.

Za promatrača u neinercijalnom sustavu $S^{'}$, promatrano se tijelo giba jednoliko po kružnici, što znači da u tom sustavu ima centripetalnu akceleraciju

$$\vec{a}_c^{\,'} = -\omega^2 \,\vec{r} \tag{4.38}$$

Ako promatrač u sustavu $S^{'}$ želi formalno primijeniti Newtonove zakone, mora uvesti fiktivnu centripetalnu silu

$$\vec{F}_{f:cp} = -m\,\omega^2\,\vec{r} \tag{4.39}$$

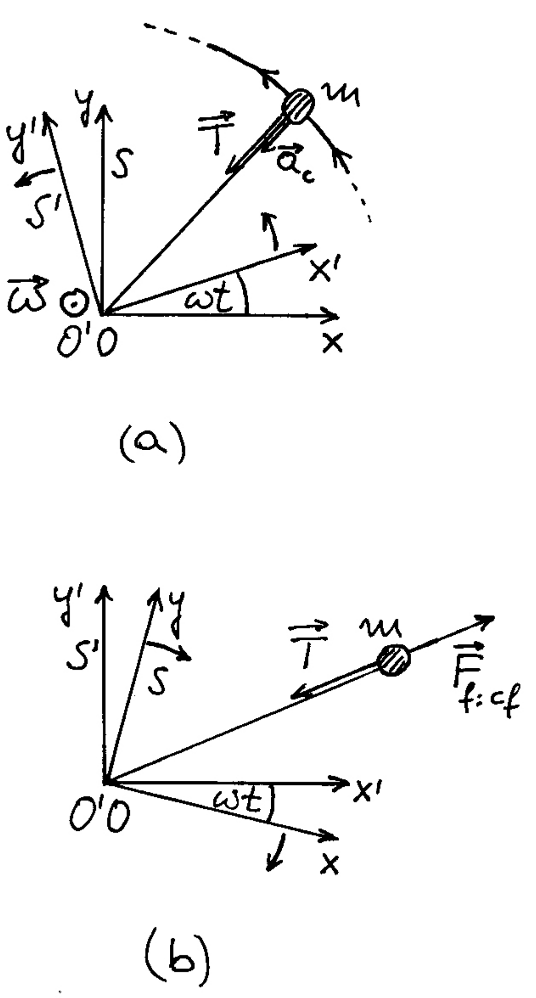
Fiktivna centrifugalna sila

U drugom posebnom slučaju, pretpostavimo da je tijelo vezano nekom niti koja je učvršćena u ishodištu O, te mu je dana neka obodna brzina. Napetost niti $\vec{T}$ uzrokuje stvarnu centripetalnu silu na tijelo, tako da se ono giba jednoliko po kružnici kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Na slici 4.15a prikazan je pogled promatrača u inercijalnom sustavu S. Ujedno je prikazan i sustav $S^{'}$ kojemu je kutna brzina rotacije odabrana upravo tako da bude izjednačena s kutnom brzinom $\vec{\omega}$ kojom rotira i promatrano tijelo.

Sada je zgodno staviti se u ulogu promatrača u neinercijalnom sustavu $S^{'}$. Njegovo opažanje prikazano je na slici 4.15b. Promatrano tijelo miruje, iako na njega djeluje stvarna sila napetosti niti $\vec{T}$. Ako promatrač u neinercijalnom sustavu $S^{'}$ želi formalno primijeniti Newtonove zakone, mora izmisliti silu koja je jednaka po iznosu sili $\vec{T}$, ali ima suprotan smjer. To je smjer udaljavanja od središta vrtnje, pa je uveden naziv *centrifugalna sila* (lat. *centrum - središte, fuga - bijeg*). Radi se o fiktivnoj centrifugalnoj sili koju možemo označiti simbolom $\vec{F}_{f:cf}$, a uvjet ravnoteže u neinercijalnom sustavu $S^{'}$ glasi

$$\vec{T}+\vec{F}_{f:cf} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{F}_{f:cf} = -\vec{T} = m\omega^2\vec{r} \tag{4.40}$$

gdje je uzeto u obzir da sila napetosti igra ulogu stvarne centripetalne sile $\vec{T} = \vec{F}_c = -m\,\omega^2\,\vec{r}$. Fiktivna centrifugalna sila ima smjer kao vektor $\vec{r}$.



Slika 4.15: (a) Za promatrača u inercijalnom sustavu S tijelo izvodi kružno gibanje jer na njega djeluje napeta nit koja mu daje centripetalnu akceleraciju. (b) Za promatrača u neinercijalnom sustavu $S^{'}$ tijelo miruje. Ako taj promatrač želi formalno primijeniti drugi Newtonov zakon, mora dodati fiktivnu centripetalnu silu.

Vožnja automobilom u zavoju

Svakodnevnom vožnjom automobilom ili nekim drugim prometnim sredstvom stječemo iskustvo u zavojima. Ako zavoj shvatimo kao dio luka neke kružnice, možemo reći da automobil u zavoju izvodi kružno gibanje. Ako se vozimo kao putnik u automobilu, naše gibanje je također kružno dok smo u zavoju. To je viđenje promatrača koji stoji negdje na površini Zemlje, dakle u inercijalnom sustavu S. Mi smo za njega promatrano tijelo na koje djeluje neka sila da bi nas prisilila na kružno gibanje. Ta sila dolazi od statičke sile trenja sa sjedalom, sigurnosnih pojaseva kojima smo vezani, te po potrebi i od karoserije koja nas pogurne ako je dodirnemo ramenom. Kada ne bi bilo tih sila, mi bismo odletjeli u zavoju po tangenti, tj. nastavili bismo jednolikim gibanjem po pravcu.

No, najčešće mi ne razmišljamo o tome kako naše gibanje gleda neki promatrač sa Zemlje, nego doživljavamo sami sebe. U fizikalnom smislu, mi vezujemo uza se jedan referentni sustav $S^{'}$, koji je očito neinercijalan jer kruži oko neke točke na Zemlji. Vlastito mirovanje u referentnom sustavu $S^{'}$ možemo formalno protumačiti Newtonovim zakonima jedino ako uz stvarne sile kojima na nas djeluje sjedalo, pojasevi i karoserija, izmislimo fiktivnu centrifugalnu silu kao što je to opisano u prethodnom primjeru. No, razmišljanje o fiktivnoj sili i formalnoj primjeni Newtonovih zakona nije prvenstvena preokupacija prilikom vožnje u zavoju.

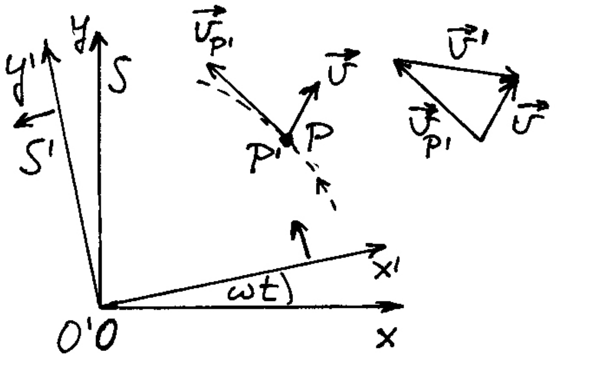
Dok se vozimo u zavoju imamo osjećaj da nas neka nevidljiva sila baca u stranu. Moramo objasniti o čemu se tu radi. Kada cijela karoserija automobila ide u zavoj uslijed zakrenutih prednjih kotača kojima se upravlja u vožnji, statička sila trenja sa sjedalom prisili donji dio našeg tijela na kružno gibanje, no gornji dio tijela nastoji održati jednoliko gibanje po pravcu, pa doživljavamo iskrivljavanje tijela u naginjanju. Tek unutarnje sile tijela prisile i gornji dio tijela da ode u kružno gibanje. Kod veće brzine i veće zakrivljenosti ceste, donji dio tijela uz sjedalo ode naglo u kružno gibanje pa dolazi do većeg naginjanja gornjeg dijela tijela i dodira ramena s karoserijom. Pritisak karoserije na rame pomogne da i gornji dio tijela izvodi potrebno kružno gibanje.

Odnos između brzina u inercijalnom i rotirajućem sustavu

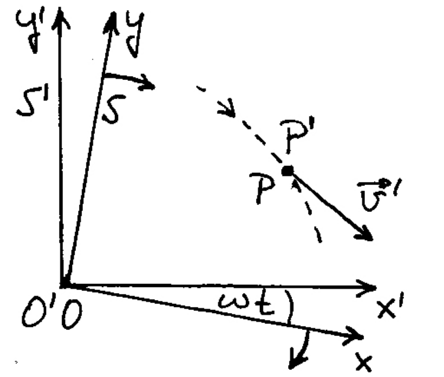
Brzina je uvijek relativna, kako smo to naglasili prethodno u odjeljku 4.1. U jednadžbi (4.7) pokazali smo da je brzina nekog tijela u odnosu prema odabranom ishodištu O jednaka zbroju brzina kojom se neko drugo ishodište $O^{'}$ giba relativno prema O i brzine kojom se to tijelo giba u odnosu prema novom ishodištu $O^{'}$.

Ovdje nas interesira slučaj u kojemu se ishodišta O i $O^{'}$ trajno poklapaju, ali sustav $S^{'}$ rotira u odnosu prema inercijalnom sustavu S. Do odgovora

na pitanje o transformaciji brzina možemo doći jednostavnim razmatranjem slike 4.16a, koja prikazuje pogled iz inercijalnog sustava S. Promatrano tijelo (čestica) prolazi u nekom trenutku kroz točku P brzinom $\vec{v}$ koja je nacrtana na slici 4.16a. Smatramo da je točka P zadana kao nepomična u sustavu S, tako da tijelo ima istu brzinu $\vec{v}$ u odnosu prema točki P, kao i u odnosu prema osima sustava S.



(a)



(b)

Slika 4.16: (a) Promatrač u inercijalnom sustavu S opaža da čestica prolazi kroz točku P brzinom $\vec{v}$. Putanja točke P', koja je fiksno određena prema sustavu S', prikazana je crtkanom linijom. U trenutku t njena je obodna brzina $\vec{v}_{P'}$. Pomoćni crtež sa strane prikazuje izračun trenutne brzine $\vec{v}\,'$ koju čestica ima relativno prema točki P'. (b) Promatrač u sustavu S' opaža da čestica prolazi kroz točku P' brzinom $\vec{v}\,'$. Crtkana linija prikazuje putanju točke P, koja je fiksno određena prema sustavu S.

Zamislimo sada točku P' koja je zadana kao nepomična u sustavu S', što znači da skupa s njim rotira u odnosu na inercijalni sustav S, a u odabranom se trenutku poklapa s točkom P, kako prikazuje slika 4.16a. Gledajući u sustavu S, točka P' izvodi jednoliko gibanje po kružnici, pa je njena obodna brzina poznata (odjeljak 1.5)

$$\vec{v}_{P'} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.41}$$

gdje je $\vec{\omega}$ kutna brzina rotacije sustava S', a time i točke P'. Brzina $\vec{v}_{P'}$ je također prikazana na slici 4.16a.

Sada možemo primijeniti načelo relativnosti brzina i napisati

$$\vec{v} = \vec{v}_{P'} + \vec{v}\,' \tag{4.42}$$

Brzina tijela $\vec{v}$ u odnosu prema inercijalnom sustavu S jednaka je zbroju brzine $\vec{v}_{P'}$ kojom se giba točka P' u odnosu prema S i brzine $\vec{v}\,'$ kojom se tijelo giba u odnosu prema točki P'. Uvažavajući jednadžbu (4.41) dobivamo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}\,' \tag{4.43}$$

Dobivena jednadžba predstavlja traženi odnos između brzina tijela u inercijalnom i neinercijalnom rotirajućem sustavu.

Brzina $\vec{v}\,'$ nije prikazana na slici 4.16a u kojoj se i sama točka P' giba u odnosu prema sustavu S. Njeno bi prikazivanje bilo zbunjujuće u toj slici, ali je zato prikazana na slici 4.16b u kojoj je dan pogled promatrača iz sustava S'. Naime, za njega sustav S' i točka P' miruju, pa je prikladno prikazati brzinu tijela $\vec{v}\,'$ koju taj promatrač vidi. Razumije se, na slici 4.16b nije pak prikladno prikazivati brzinu tijela $\vec{v}$ u odnosu prema točki P, koja i sama rotira zajedno sa sustavom S na toj slici.

Matematička dopuna

Jednadžbu (4.43) možemo napisati na sljedeći način

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_S = \vec{\omega} \times \vec{r} + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{S'} \tag{4.44}$$

S lijeve strane imamo vremensku promjenu vektora $\vec{r}$ u odnosu na koordinatne osi sustava S, što predstavlja brzinu tijela $\vec{v}$ mjerenu u sustavu S. S desne strane jednadžbe (4.44) nalazimo vremensku promjenu vektora $\vec{r}$ u odnosu prema osima sustava S', što je pak brzina tijela $\vec{v}\,'$ koju vidi promatrač u sustavu S'.

Da bismo potpuno razjasnili matematičko značenje derivacija u sustavu S i S', korisno je izraziti vektore pomoću komponenti u određenom koordinatnom sustavu. Za vektor položaja tijela $\vec{r}(t)$ u sustavu S imamo

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k} \tag{4.45}$$

gdje su $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ i $\hat{k}$ jedinični vektori sustava S. Brzinu tijela u odnosu prema osima sustava S dobivamo derivacijom

$$\begin{aligned}\vec{v} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_S &= \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{k} \\ &= v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}\end{aligned} \tag{4.46}$$

No, vektor položaja tijela $\vec{r}(t)$ možemo također rastaviti na komponente duž osi sustava S'

$$\vec{r}(t) = x'(t)\,\hat{\imath}\,' + y'(t)\,\hat{\jmath}\,' + z'(t)\,\hat{k}\,' \tag{4.47}$$

gdje upotrebljavamo jedinične vektore $\hat{\imath}\,'$, $\hat{\jmath}\,'$ i $\hat{k}\,'$ sustava S'. Ako želimo dobiti brzinu tijela $\vec{v}\,'$ u odnosu prema osima sustava S', zadržavamo iste jedinične vektore i dobivamo

$$\begin{aligned}\vec{v}\,' = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{S'} &= \frac{dx'(t)}{dt}\,\hat{\imath}\,' + \frac{dy'(t)}{dt}\,\hat{\jmath}\,' + \frac{dz'(t)}{dt}\,\hat{k}\,' \\ &= v_x'\,\hat{\imath}\,' + v_y'\,\hat{\jmath}\,' + v_z'\,\hat{k}\,'\end{aligned} \tag{4.48}$$

Jednadžbe (4.46) i (4.48) pokazuju smisao deriviranja istoga vektora u dvama različitim koordinatnim sustavima. Moramo još naći odnos među derivacijama u dvama sustavima. Krenimo od derivacije dx/dt u sustavu S koju nalazimo na desnoj strani jednadžbe (4.46), te iskoristimo jednadžbu (4.34) da bismo prešli na komponente u sustavu S' i zatim izveli derivaciju

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'}{dt}\,\cos\omega t - \omega\,x'\,\sin\omega t - \frac{dy'}{dt}\,\sin\omega t - \\ -\omega\,y'\,\cos\omega t\end{aligned} \tag{4.49}$$

Postupimo analogno s derivacijom dy/dt tako da iskoristimo jednadžbu (4.35) za prelazak na komponente u sustavu S', te dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx'}{dt}\,\sin\omega t + \omega\,x'\,\cos\omega t + \frac{dy'}{dt}\,\cos\omega t - \\ -\omega\,y'\,\sin\omega t\end{aligned} \tag{4.50}$$

Sustavi S i S' su postavljeni tako da im se poklapaju osi z i z', te je uvijek ispunjena jednakost $z = z'$.

Pomoću jednadžbi (4.49) i (4.50) možemo složiti izraz

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} = \frac{dx'}{dt}\Big(\cos\omega t\,\hat{\imath} + \sin\omega t\,\hat{\jmath}\Big) + \\ + \frac{dy'}{dt}\Big(-\sin\omega t\,\hat{\imath} + \cos\omega t\,\hat{\jmath}\Big) - \\ - \omega\Big(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t\Big)\,\hat{\imath} + \\ + \omega\Big(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t\Big)\,\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{4.51}$$

U prvim dvjema zagradama možemo prepoznati jedinične vektore $\hat{\imath}\,'$ i $\hat{\jmath}\,'$ u sustavu S' sukladno jednadžbama (4.31) i (4.32). Kod treće i četvrte zagrade iskoristimo jednadžbe (4.34) i (4.35) pa dobivamo

$$\frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} = \frac{dx'}{dt}\,\hat{\imath}\,' + \frac{dy'}{dt}\,\hat{\jmath}\,' - \omega y\,\hat{\imath} + \omega x\,\hat{\jmath} \tag{4.52}$$

Zadnja dva člana s desne strane možemo napisati pomoću vektora kutne brzine $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ i vektora položaja

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y\,\hat{\imath} + \omega x\,\hat{\jmath} \tag{4.53}$$

Ako još uzmemo u obzir da je uvijek $z = z'$, te $\hat{k} = \hat{k}\,'$ za sustave S i S', jednadžbu (4.52) možemo dopuniti

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{k} = \\ = \frac{dx'}{dt}\,\hat{\imath}\,' + \frac{dy'}{dt}\,\hat{\jmath}\,' + \frac{dz'}{dt}\,\hat{k}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\end{aligned} \tag{4.54}$$

Time je dokazana jednadžba (4.44). Na isti bismo način mogli provesti računanje derivacija za bilo koju vektorsku funkciju $\vec{A}(t)$ i dobiti

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt}\right]_S = \vec{\omega} \times \vec{A} + \left[\frac{d\vec{A}}{dt}\right]_{S'} \tag{4.55}$$

Pretvorba akceleracije iz inercijalnog u rotirajući sustav

Matematičko pravilo iz jednadžbe (4.55) primijenimo sada na derivacije vektora brzine u sustavima S i S'

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_S = \vec{\omega} \times \vec{v} + \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{S'} \tag{4.56}$$

Izraz s lijeve strane predstavlja akceleraciju tijela $\vec{a}$ u odnosu na koordinatne osi inercijalnog sustava S. S desne strane jednadžbe (4.56) želimo dobiti veličine koje se odnose na koordinatne osi rotirajućeg sustava S', pa se u tu svrhu poslužimo jednadžbom (4.43). Prvi član s desne strane jednadžbe (4.56) možemo preinačiti

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}\,'\right) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' \tag{4.57}$$

U drugome članu s desne strane jednadžbe (4.56) također moramo uvrstiti izraz za $\vec{v}$ iz jednadžbe (4.43), pa dobivamo

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\vec{v}\right]_{S'} &= \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}\,'\right)\right]_{S'} \\ &= \vec{\omega} \times \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_{S'} + \left[\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right]_{S'} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{a}\,'\end{aligned} \tag{4.58}$$

gdje zadnji član predstavlja akceleraciju tijela $\vec{a}\,'$ u odnosu na osi rotirajućeg sustava S'. Uvrštavanjem rezultata iz jednadžbe (4.57) i (4.58) u jednadžbu (4.56) dobivamo konačno

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{a}\,' \tag{4.59}$$

Izraz dobiven u ovoj jednadžbi ima općenitu vrijednost za odnose akceleracija između inercijalnog i rotirajućeg sustava.

Stvarna sila i fiktivne sile u rotirajućem sustavu

Ako opažamo da tijelo mase m ima akceleraciju $\vec{a}$ u inercijalnom sustavu S, zaključujemo da na njega djeluje stvarna sila $\vec{F} = m\,\vec{a}$. U neinercijalnom rotirajućem sustavu S' opaža se akceleracija $\vec{a}\,'$ istoga tijela. Za nju prema jednadžbi (4.59) možemo napisati

$$m\,\vec{a}\,' = \vec{F} - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \tag{4.60}$$

Razmotrimo primjenu jednadžbe (4.60) na dva jednostavna slučaja. U prvome slučaju uzmimo da tijelo miruje u rotirajućem sustavu. To znači da je $\vec{v}\,' = 0$ i $\vec{a}\,' = 0$, pa se jednadžba (4.60) svodi na

$$\vec{F} - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 \tag{4.61}$$

Za promatrača u rotirajućem sustavu, koji formalno želi primijeniti drugi Newtonov zakon, jednadžba (4.61) predstavlja uvjet ravnoteže koji je postignut tako da se drugi član interpretira kao sila

$$\vec{F}_{f:cf} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\,\omega^2\,\vec{r}_\perp \tag{4.62}$$

gdje je $\vec{r}_\perp$ komponenta vektora $\vec{r}$ okomita na os rotacije, odnosno na vektor $\vec{\omega}$. Radi se o fiktivnoj sili koja je usmjerena od središta kružnog gibanja prema van. Prepoznajemo je kao fiktivnu centrifugalnu silu koju smo već opisali u jednadžbi (4.40).

U drugom slučaju uzmimo da tijelo ima u rotirajućem sustavu neku brzinu $\vec{v}\,'$, koja je konstantna, tako da njegova akceleracija u tom sustavu opet iščezava $\vec{a}\,' = 0$. Za promatrača u rotirajućem sustavu, koji želi formalno primijeniti Newtonove zakone, trebala bi ukupna sila na tijelo iščezavati, što se prema jednadžbi (4.60) postiže

$$\vec{F} + \vec{F}_{f:cf} + \vec{F}_{f:Cr} = 0 \tag{4.63}$$

gdje je uvedena fiktivna *Coriolisova sila*

$$\vec{F}_{f:Cr} = -2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \tag{4.64}$$

Poznavajući pravilo vektorskog produkta, zaključujemo da fiktivna Coriolisova sila iščezava jedino ako se tijelo giba duž osi rotacije, tj. ako je brzina $\vec{v}\,'$ paralelna (ili antiparalelna) vektoru $\vec{\omega}$. Ako brzina $\vec{v}\,'$ u rotirajućem sustavu ima otklon od vektora $\vec{\omega}$, fiktivna Coriolisova sila je okomita na

ravninu koju čine vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{v}^{\,'}$. Možemo također ustvrditi da je za Coriolisovu silu važna samo komponenta brzine $\vec{v}^{\,'}$ koja leži u ravnini okomitoj na $\vec{\omega}$.

4.3.3 Pojave u rotirajućem sustavu Zemlje

Kao primjer odnosa između inercijalnog i rotirajućeg neinercijalnog sustava korisno je posebno razmatrati slučaj Zemlje na kojoj živimo i s čije površine promatramo mnoge pojave. Ovdje ćemo sustavno razmotriti niz pojava i razjasniti zašto nam one tako izgledaju.

Kao inercijalni sustav S uzimamo onaj kojemu je ishodište O postavljeno u središte Zemlje, a os z je postavljena duž osi rotacije Zemlje. Osi x i y tog sustava ne rotiraju zajedno sa Zemljom, nego su trajno usmjerene prema nekim udaljenim zvijezdama. U tome sustavu, Zemlja rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$, koja je po iznosu $\omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) = 7,3\,10^{-5}$ rad s^{-1}.

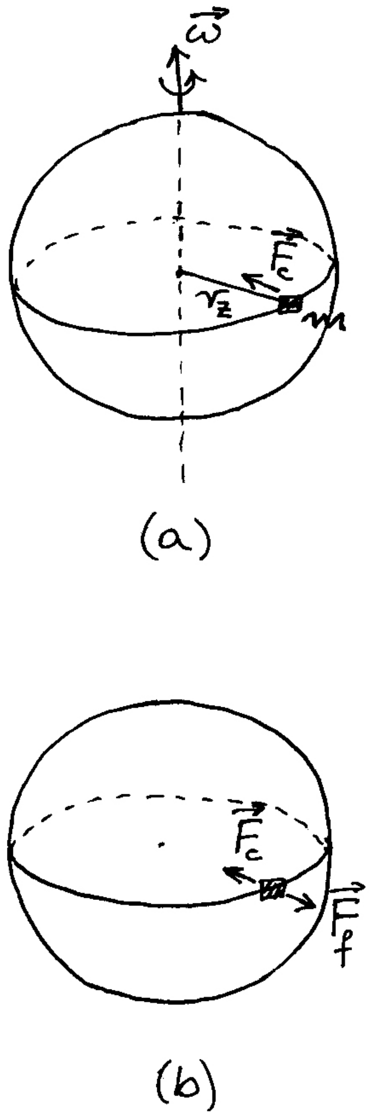
Moramo sada odabrati rotirajući sustav $S^{'}$ u kojem ćemo promatrati neka gibanja. Za nas kao promatrače koji mirujemo na površini Zemlje, korisno je odabrati sustav $S^{'}$ kojemu je središte $O^{'}$ također u središtu Zemlje, te se os $z^{'}$ poklapa s osi z, a njegova kutna brzina u odnosu prema sustavu S odgovara upravo kutnoj brzini $\vec{\omega}$ kojom i Zemlja rotira oko osi z. Time postižemo da promatrač, koji miruje na površini Zemlje, ujedno miruje u odnosu prema osima sustava $S^{'}$. Njegova promatranja raznih gibanja tijela u odnosu prema vlastitu položaju na površini Zemlje valja protumačiti kao pogled promatrača u neinercijalnom rotirajućem sustavu.

Tijelo koje miruje na površini Zemlje

Krenimo od jednostavnog slučaja u kojemu promatrano tijelo miruje na površini Zemlje. Na slici 4.17a prikazana je Zemlja i neko tijelo na ekvatoru s pogledom iz inercijalnog sustava S. U njemu tijelo izvodi jednoliko gibanje po kružnici, a za to je potrebna centripetalna sila $\vec{F}_c = -m\,\omega^2 \vec{r}$. Razumije se, to mora biti stvarna sila jer se kružno gibanje odvija u inercijalnom sustavu S. Ona nastaje kao vektorski zbroj gravitacijske sile $\vec{F}_g$ prema središtu Zemlje i normalne sile podloge $\vec{N}$ u suprotnom smjeru

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{N} \qquad (4.65)$$

Ako sile pišemo u algebarskim iznosima, uzimajući smjer vektora $\vec{r}$ od središta Zemlje do njene površine kao pozitivan, jednadžba (4.65) postaje



Slika 4.17: (a) Pogled promatrača u inercijalnom sustavu S prema kojemu Zemlja rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Tijelo položeno na ekvatoru izvodi u tom sustavu kružno gibanje, a za to je potrebna centripetalna sila. (b) Pogled promatrača u neinercijalnom sustavu koji vidi Zemlju i tijelo u mirovanju. Pribrajanjem fiktivne sile omogućena mu je formalna primjena drugoga Newtonova zakona u neinercijalnom sustavu.

$$-m\,\omega^2 r_Z = -G\,\frac{m_Z m}{{r_Z}^2} + N \qquad (4.66)$$

Normalna sila kojom podloga djeluje na promatrano tijelo iznosi

$$N = G\,\frac{m_Z m}{{r_Z}^2} - m\,\omega^2 r_Z \qquad (4.67)$$

Prema trećem Newtonovu zakonu, tijelo djeluje na podlogu silom koja je po iznosu jednaka N, ali ima smjer prema središtu Zemlje. Vidimo da je ona manja od gravitacijske sile za iznos drugog člana u jednadžbi (4.67).

Viđenje promatrača u sustavu S', koji je vezan uz Zemlju, prikazano je na slici 4.17b. S njegova stajališta, Zemlja se ne okreće oko svoje osi, pa i promatrano tijelo na ekvatoru Zemlje miruje. Za formalnu primjenu Newtonovih zakona u tome sustavu, promatrač bi morao uvesti fiktivnu silu kojom bi se uspostavila ravnoteža

$$\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_f = 0 \qquad (4.68)$$

Usporedbom s jednadžbom (4.65) uočavamo da uvedena fiktivna sila mora biti jednaka po iznosu i suprotnog smjera od centripetalne sile. Radi se, dakle, o fiktivnoj centrifugalnoj sili koju smo već upoznali u jednadžbi (4.40). Izvod možemo ponoviti i upotrebom opće jednadžbe (4.60), koja se za slučaj $\vec{v}\,' = 0$ svodi na jednadžbu (4.61), odnosno na (4.62).

Za promatrača na površini Zemlje, jednadžba (4.68) ponovo daje u algebarskim veličinama jednadžbu (4.67), tj. istu normalnu silu podloge na tijelo, a time i silu kojom tijelo pritišće podlogu. Potonju silu promatrač doživljava kao težinu tijela. Kao što je već gore rečeno, ona nije jednaka punom iznosu gravitacijske sile, nego je umanjena za drugi član u jednadžbi (4.67).

Geostacionarni telekomunikacijski satelit

Zamislimo da se, umjesto na površini Zemlje na ekvatoru, tijelo nalazi na nekom hipotetičkom jako visokom stupu. Udaljenost tijela od središta Zemlje je $r = r_Z + h$, gdje je h visina zamišljenog stupa, koja po pretpostavci nije zanemariva prema radijusu Zemlje. Istim razmatranjem kao i u prethodnom primjeru došli bismo do iznosa normalne sile kojom stup djeluje na tijelo

$$N = G\,\frac{m_Z m}{(r_Z + h)^2} - m\,\omega^2\,(r_Z + h) \qquad (4.69)$$

Zamislimo li visinu stupa h sve većom, smanjivao bi se prvi član s desne strane ove jednadžbe, dok bi drugi član rastao, tako da bi se smanjivala normalna sila N kojom stup mora podržavati tijelo. To bi ujedno značilo da tijelo pritišće na stup manjom silom, što se ponekad interpretira kao da ima manju težinu.

Kada bi zamišljeni stup bio toliko visok da se prvi i drugi član na desnoj strani jednadžbe (4.69) međusobno izjednače, nestala bi potreba za normalnom silom stupa, tj. stup ne bi više bio ni potreban. Razumije se, za takvo je stanje potrebno da tijelo ima dovoljno veliku obodnu brzinu, koju je u početku dobilo. To se postiže u slučaju lansiranja geostacionarnog telekomunikacijskog satelita. Za korisnike telekomunikacija na Zemlji, satelit se nalazi trajno na istome mjestu iznad njih i omogućuje vezu među njima bez preusmjeravanja antene. Radijus orbite geostacionarnog telekomunikacijskog satelita iznosi oko pet zemaljskih radijusa, što je dosta velika udaljenost, pa je potreban jak signal za prijenos informacija.

Razmatrajući sile koje djeluju u ovome slučaju, lako utvrđujemo da na telekomunikacijski satelit djeluje samo gravitacijska sila $\vec{F}_g$. U inercijalnom sustavu S, ona igra ulogu centripetalne sile $\vec{F}_c$. U neinercijalnom rotirajućem sustavu S', satelit miruje. Za promatrača u tom sustavu moguća je formalna primjena Newtonovih zakona ako pored stvarne sile $\vec{F}_g$ doda fiktivnu centrifugalnu silu $\vec{F}_{f:cf}$, koja je jednakog iznosa i suprotnog smjera od $\vec{F}_g$.

Ono što vrijedi za satelit u cjelini, vrijedi i za neko tijelo koje se može nalaziti unutar njega. To tijelo kruži oko Zemlje i pritom nema potrebu da ga podržava neka normalna sila podloge. Stoga ni ono ne pritišće na neku podlogu, nego lebdi unutar satelita, pa se u tom sustavu obično kaže da je u beztežinskom stanju.

Avion u letu na liniji istok - zapad

Razmotrimo sada složeniji slučaj u kojemu tijelo ne miruje u odnosu prema promatraču na površini Zemlje. Uzmimo za primjer avion koji leti brzinom V u ravnini ekvatora od zapada prema istoku.

Slika 4.18a daje prikaz u inercijalnom sustavu S. Visina na kojoj leti avion (oko 10 km) malena je u usporedbi s radijusom Zemlje r_Z (6370 km), pa je možemo smatrati zanemarivom. Promatrač na površini Zemlje ima obodnu brzinu $\omega\, r_Z$, a avion leti brzinom V u odnosu prema tom promatraču, tako da je njegova obodna brzina u sustavu S jednaka $v = \omega\, r_Z + V$.

Na avion djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ prema središtu Zemlje i *aerodinamička sila* $\vec{F}_{ad}$ koja ga potiskuje uvis. Te dvije sile daju rezultantnu silu koja igra ulogu centripetalne sile

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{F}_{ad} \tag{4.70}$$

Vektorski zbroj realnih sila $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_{ad}$ prikazan je na pomoćnom crtežu na slici 4.18a. Mogli bismo interpretirati da je samo dio gravitacijske sile $\vec{F}_g$ potreban da odigra ulogu centripetalne sile $\vec{F}_c$, dok preostali dio mora biti kompenziran aerodinamičkom silom podizanja $\vec{F}_{ad}$.

Jednadžbu (4.70) možemo zapisati pomoću algebarskih veličina, uzevši smjer od središta Zemlje prema van kao pozitivan

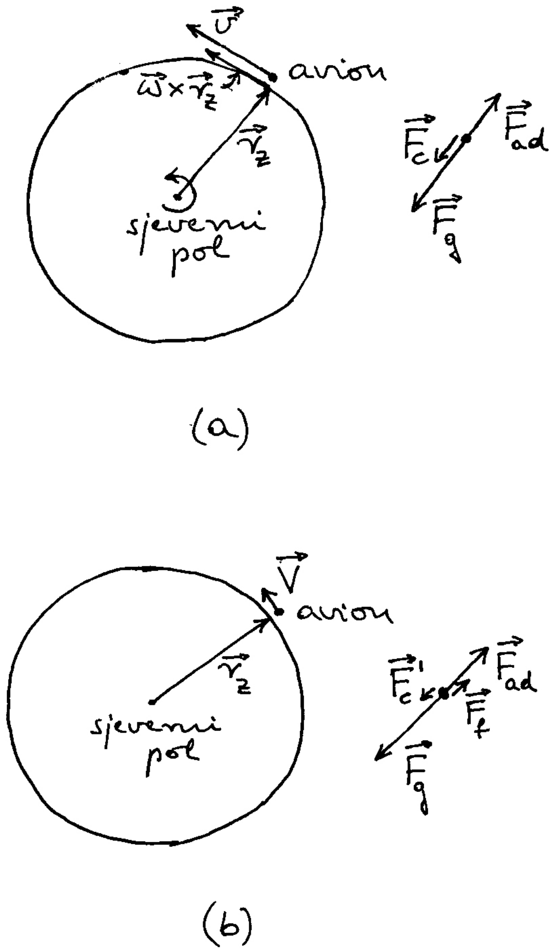
$$-m\frac{(\omega\, r_Z + V)^2}{r_Z} = -F_g + F_{ad} \tag{4.71}$$

gdje je uvrštena obodna brzina aviona u sustavu S. Da bi avion letio u tim uvjetima, aerodinamička sila podizanja mora biti

$$F_{ad} = F_g - m\,\omega^2\, r_Z - 2\, m\,\omega\, V - m\,\frac{V^2}{r_Z} \tag{4.72}$$

Kada bi se radilo o helikopteru koji lebdi iznad neke točke na Zemlji, trebalo bi u ovoj jednadžbi staviti $V = 0$, te bismo dobili isti izraz koji smo već imali u jednadžbi (4.67). Aerodinamička sila podizanja helikoptera odgovarala bi normalnoj sili podloge na tijelo koje na njoj leži.

Za avion koji leti brzinom V od zapada prema istoku, potrebna aerodinamička sila podizanja je dodatno umanjena za dva člana koji se pojavljuju na desnoj strani jednadžbe (4.72). Što je brzina aviona veća, potrebna je manja aerodinamička sila podizanja. Razumije se, isto razmatranje vrijedi i za neko tijelo koje počiva na podlozi u unutrašnjosti aviona. Normalna sila podloge na to tijelo igra istu ulogu kao i aerodinamička sila podizanja na sam avion.



Slika 4.18: (a) Pogled promatrača koji se nalazi negdje iznad sjevernog pola Zemlje u inercijalnom sustavu S, prema kojemu se Zemlja okreće oko svoje osi kutnom brzinom $\vec{\omega}$, pa točka na ekvatoru ima trenutnu obodnu brzinu $\vec{\omega} \times \vec{r}_Z$. Avion blizu površine Zemlje leti trenutnom brzinom $\vec{V}$ u odnosu prema točki na Zemlji, odnosno brzinom $\vec{v}$ u sustavu S. Pomoćni crtež prikazuje postupak zbrajanja dviju realnih sila kojim se dobiva rezultantna centripetalna sila. (b) Pogled promatrača u neinercijalnom sustavu S' u kojemu Zemlja miruje, dok avion ima trenutnu brzinu $\vec{V}$. Pomoćni crtež prikazuje uvođenje fiktivne centrifugalne sile koju valja dodati dvjema realnim silama kako bi rezultanta odgovarala centripetalnoj sili u sustavu S'.

Korisno je sada razmotriti let aviona iz rotirajućeg sustava S' u kojem Zemlja i promatrač na njoj miruju. Avion se u tome sustavu također giba

jednoliko po kružnici, ali obodna mu je brzina V, kako to prikazuje slika 4.18b. Ako promatrač u sustavu $S^{'}$ želi formalno primijeniti drugi Newtonov zakon na gibanje aviona, mora uz realne sile $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_{ad}$ dodati fiktivnu silu $\vec{F}_f$ kako bi rezultanta odgovarala centripetalnoj sili potrebnoj za kružno gibanje u sustavu $S^{'}$

$$\vec{F}_c^{\,'} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ad} + \vec{F}_f \tag{4.73}$$

Ako ovu jednadžbu napišemo pomoću algebarskih veličina smatrajući da je pozitivan smjer od središta prema van, dobivamo

$$-F_c^{'} = -F_g + F_{ad} + F_f \tag{4.74}$$

Uvrštavajući izraz za F_{ad} iz jednadžbe (4.72) u jednadžbu (4.74) i uvažavajući da je $F_c^{'} = m\left(V^2/r_Z\right)$, dobivamo nakon sređivanja

$$F_f = m\,\omega^2\,r_Z + 2\,m\,\omega\,V \tag{4.75}$$

Prvi član s desne strane predstavlja fiktivnu centrifugalnu silu, a drugi fiktivnu Coriolisovu silu.

Isti rezultat dobili bismo izravno uspoređujući jednadžbu (4.73) s općom vektorskom jednadžbom (4.60). Pritom je $\vec{F}_c^{\,'} = m\,\vec{a}^{\,'}$, dok je ukupna realna sila $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ad}$. Fiktivna sila iz opće jednadžbe (4.60) je

$$\vec{F}_f = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\,m\,\vec{\omega}\times\vec{v}^{\,'} \tag{4.76}$$

Uvažavajući da je u sustavu $S^{'}$ brzina aviona $\vec{v}^{\,'} = \vec{V}$, lako se možemo uvjeriti da je dobiveni rezultat identičan s onim u jednadžbi (4.75).

Ako avion leti od istoka prema zapadu, njegova obodna brzina u sustavu S iznosi $v = \omega\,r_Z - V$, tj. manja je nego u gore razmatranom slučaju. Stoga je potrebna manja centripetalna sila $\vec{F}_c$. Iz jednadžbe (4.70) slijedi da je u tom slučaju potrebna veća aerodinamička sila $\vec{F}_{ad}$. Mogli bismo reći da je tada za ulogu centripetalne sile dovoljan nešto manji dio gravitacijske sile, pa je neophodna nešto veća aerodinamička sila da bi kompenzirala preostali dio gravitacijske sile.

U algebarskoj jednadžbi (4.71) potrebno je samo zamijeniti V u $-V$, pa slijedom toga dobivamo u jednadžbi (4.72) član $+2m\omega V$, što opet ukazuje na to da je za let aviona od istoka prema zapadu potrebna veća aerodinamička sila podizanja $\vec{F}_{ad}$ nego što je to slučaj kod leta aviona od zapada prema istoku.

Napomena: Mogli bismo obratiti pažnju na neko tijelo koje se prevozi avionom. Umjesto aerodinamičke sile podizanja, istu ulogu igra normalna sila podloge na kojoj to tijelo leži. Prema trećem Newtonovu zakonu, silom jednakog iznosa, ali suprotnog smjera, tijelo pritišće na podlogu. Nalazimo, dakle, da tijelo pritišće na podlogu nešto većom silom kada se avion vozi od istoka prema zapadu nego kada se vozi u suprotnom smjeru. Kada bismo težinu tijela u avionu mjerili vagom na oprugu, ustanovili bismo uistinu različite vrijednosti kod leta aviona u dvama suprotnim smjerovima. Međutim, kod mjerenja pomoću utega s vagom na krakove, ustanovili bismo uvijek istu vrijednost jer se ista pravila odnose na utege kao i na tijelo koje važemo.

Ako želimo naći fiktivnu silu koju uvodi promatrač na Zemlji za opisivanje leta aviona od istoka prema zapadu, potrebno je zamijeniti V u $-V$ u jednadžbi (4.75). Centrifugalna sila ostane neizmijenjena, dok Coriolisova sila promijeni predznak. Promjena predznaka u algebarskoj jednadžbi znači promjenu smjera u vektorskom prikazu. To možemo također ustanoviti ako u vektorskoj jednadžbi (4.76) promijenimo smjer sile $\vec{v}^{\,'}$, te odmah dobivamo da se mijenja smjer Coriolisove sile.

Na kraju ovog razmatranja, naglasimo da se radilo o slučaju u kojem je brzina $\vec{v}^{\,'}$ promatranog tijela (aviona) u rotirajućem sustavu imala smjer tangencijalan na kružnicu po kojoj se tijelo (avion) giba. Coriolisova je sila uvijek okomita na brzinu $\vec{v}^{\,'}$, pa je u ovdje razmatranom slučaju ona imala radijalan smjer.

Točniji opis slobodnog pada

Razmotrimo sada jedan slučaj u kojemu brzina tijela ima radijalan smjer u odnosu prema rotaciji oko osi Zemlje. Primjer takva gibanja je slobodan pad koji predstavlja svakodnevnu pojavu.

U jednostavnom opisu slobodnog pada obično se uzima kao da je sustav promatrača na Zemlji inercijalan, te se na ispušteno tijelo primjenjuje drugi Newtonov zakon. Budući da gravitacijska sila na tijelo djeluje u smjeru prema središtu Zemlje, to i gibanje tijela ide tim putom jednoliko ubrzano. Međutim, u točnijem opisu slobodnog pada valja uzeti u obzir da Zemlja rotira oko svoje osi. To

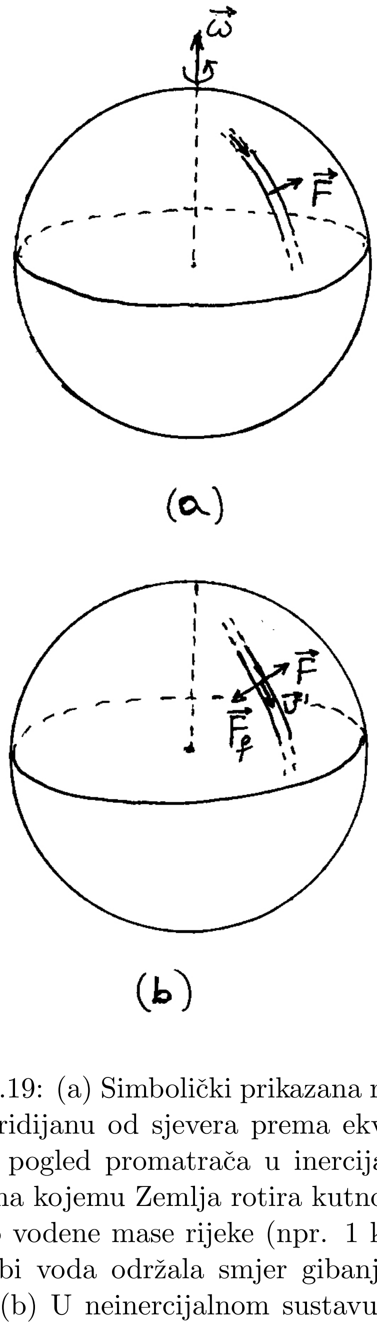
najviše dolazi do izražaja ako promatramo slobodan pad na ekvatoru. Dok se tijelo nalazi na nekoj visini iznad površine Zemlje, njegova je obodna brzina od zapada prema istoku veća nego što je obodna brzina točke na samoj površini Zemlje vertikalno ispod tijela. Kod padanja tijela, nema sile koja bi usporavala njegovu obodnu brzinu (zanemarimo otpor zraka), pa ono padne nešto istočnije od točke iznad koje se prvotno nalazilo. To je opis gibanja sa stajališta inercijalnog sustava u kojemu rotiraju i Zemlja i padajuće tijelo. Lako je izračunati da bi tijelo ispušteno s visine od 500 m palo oko 30 cm istočno od točke iznad koje se prvotno nalazilo, dok bi za pad s visine od 50 m otklon na istok iznosio svega oko 1 cm. Drugi utjecaji (npr. strujanje zraka) lako mogu poremetiti takav ishod eksperimenta, koji je ionako teško izvesti s dovoljnom preciznošću.

Drugačiji opis slobodnog pada daje promatrač koji miruje na površini Zemlje, tj. nalazi se u neinercijalnom rotirajućem sustavu. U odnosu prema njegovim osima, tijelo se u slobodnom padu ne giba po pravcu, nego doživljava otklon prema istoku, iako na tijelo nije djelovala neka realna sila u tom smjeru. Ako taj promatrač želi opisati gibanje tijela formalnom primjenom drugoga Newtonova zakona, mora uvesti fiktivnu Coriolisovu silu prema drugom članu u jednadžbi (4.76). Brzina tijela $\vec{v}\,'$ raste pri padu tijela, pa raste i Corriolisova sila koja ga skreće sve više prema istoku dok tijelo ne padne na Zemlju. Bliže sjevernom (ili južnom) polu taj se efekt smanjuje, a potpuno iščezava na polovima.

Rijeke koje teku u smjeru sjever - jug

Razmotrimo još jedan primjer iz prirode u kojemu brzina promatranog tijela ima radijalnu komponentu u odnosu prema rotaciji Zemlje oko svoje osi. Na slici 4.19a prikazana je u inercijalnom sustavu S Zemlja koja rotira oko svoje osi i dio neke rijeke na sjevernoj hemisferi koja teče od sjevera prema jugu, tj. prema ekvatoru. Uzmimo idealizaciju u kojoj rijeka teče kilometrima ravno po meridijanu. Ako usredotočimo pažnju na neku odabranu masu vode, npr. na masu od 1 kg, možemo reći da ona ide iz područja u kojem ima manju obodnu brzinu u područje kojemu je obodna brzina veća zbog rotacije Zemlje. Da bi ta masa vode dobila veću brzinu, mora na nju djelovati nekom silom desna obala rijeke u smjeru od zapada prema istoku, kako se i Zemlja rotira. To je realna sila koja je prikazana na slici 4.19a.

Ako pak rijeka teče od ekvatora prema sjeveru, mora se obodna brzina vodene mase smanjivati, a za to je potrebna opet desna obala rijeke, koja sada



Slika 4.19: (a) Simbolički prikazana rijeka koja teče po meridijanu od sjevera prema ekvatoru. Prikazan je pogled promatrača u inercijalnom sustavu S prema kojemu Zemlja rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Na dio vodene mase rijeke (npr. 1 kg) djeluje sila $\vec{F}$ da bi voda održala smjer gibanja duž meridijana. (b) U neinercijalnom sustavu S' Zemlja ne rotira. Iako na promatrani dio vodene mase djeluje realna sila $\vec{F}$, njegova brzina $\vec{v}\,'$ ne mijenja smjer, pa promatrač dodaje fiktivnu Coriolisovu silu kako bi mogao formalno primijeniti drugi Newtonov zakon.

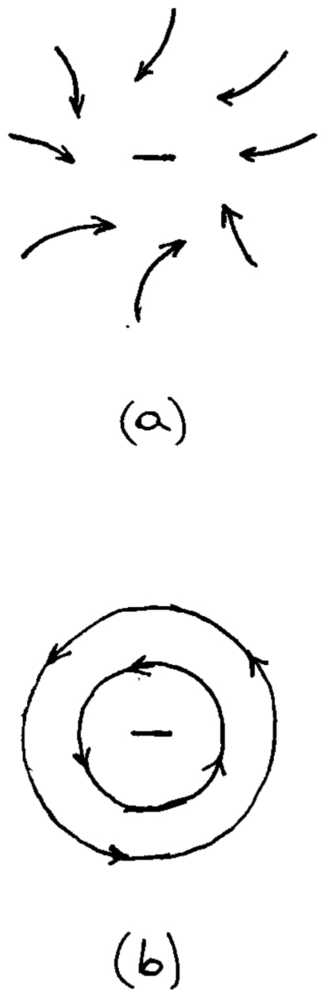
djeluje na vodenu masu u smjeru prema zapadu. U svakom slučaju, prema trećemu Newtonovu zakonu, vodena masa djeluje silom reakcije na desnu obalu rijeke. Stoga se u geomorfološkim proučavanjima obala rijeka, koje na sjevernoj hemisferi teku u smjeru sjever - jug, primjećuje da vodena masa uvijek dodatno podriva desnu obalu rijeke. Efekt je veći u područjima udaljenijim od ekvatora jer je tamo promjena obodne brzine izraženija.

Ako na rijeku gleda promatrač koji miruje na Zemlji, kako prikazuje slika 4.19b, on utvrđuje da se vodena masa giba po meridijanu u smjeru sjever - jug, što za njega znači da se giba ravno iako na nju djeluje bočno realna sila desne obale rijeke. No, on se nalazi u neinercijalnom rotirajućem sustavu, te ne bi smio primjenjivati drugi Newtonov zakon. Ako ga ipak želi formalno primijeniti na promatranu vodenu masu, mora uz realnu silu dodati i fiktivnu, koja ima jednak iznos i suprotan smjer od realne sile, tako da formalno dobije iščezavajuću ukupnu silu na vodenu masu. Ta je fiktivna sila također prikazana na slici 4.19b. Radi se o fiktivnoj Coriolisovoj sili prema drugom članu u jednadžbi (4.76), gdje je $\vec{v}\,'$ brzina dijela vodene mase m u odnosu prema promatraču na Zemlji, tj. u rotirajućem sustavu. Brzinu $\vec{v}\,'$ možemo formalno rastaviti na komponentu duž vektora kutne brzine $\vec{\omega}$ i na radijalnu komponentu koja je okomita na smjer kutne brzine $\vec{\omega}$. U vektorskom produktu $\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$, kojim se računa Coriolisova sila, doprinos daje samo radijalna komponenta brzine. Rezultirajuća Coriolisova sila položena je obodno duž smjera istok - zapad. U područjima udaljenijim od ekvatora brzina rijeke $\vec{v}\,'$ ima veću radijalnu komponentu, pa je efekt izraženiji.

Na južnoj hemisferi opaža se da rijeke koje teku od ekvatora prema južnome polu ili obrnuto, uvijek dodatno podrivaju lijevu obalu rijeke. Razumije se, pojam lijeve i desne obale rijeke utvrđuje se sa stajališta promatrača koji na tome mjestu stoji uspravno i gleda niz rijeku.

Smjer puhanja vjetra u cikloni

Rotacija Zemlje ima utjecaja i na atmosferske prilike kojima smo izloženi u svakidašnjem životu. Nad Atlantikom se stvaraju područja niskog tlaka koja se premiještaju preko europskog kontinenta od zapada prema istoku. To su *ciklone* od kojih neke prolaze i nad našim krajevima.



Slika 4.20: (a) Područje niskog tlaka (ciklona) na sjevernoj hemisferi Zemlje. Zračne mase iz okolnih područja višeg tlaka nastoje se kretati prema središtu ciklone, ali pritom zakreću udesno. (b) Ukupni učinak zakretanja zračne mase stvara kružni tok u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Oko središta ciklone raspoređeni su slojevi sve višeg i višeg atmosferskog tlaka. U takvim uvjetima, trebalo bi nastati prirodno strujanje zraka s periferije ciklone prema njenu središtu. Budući da se radi o velikim udaljenostima koje prevaljuje zračna masa, efekt rotacije Zemlje dolazi jako do izražaja. Zračna masa koja ima neku komponentu brzine u smjeru sjever - jug skreće na sjevernoj hemisferi uvijek u desno (slika 4.20a). Razlog je isti onaj koji vrijedi i za vodenu masu u rijeci koja

teče u smjeru sjever - jug, što smo gore detaljno obrazložili. No, dok na vodenu masu djeluje desna obala rijeke i održava je u ravnoj putanji, zračna masa je slobodna i stoga skreće u desno. Promatrač koji miruje na površini Zemlje može formalnom primjenom drugoga Newtonova zakona opisati skretanje zračne mase tako što uvede fiktivnu Coriolisovu silu.

Ukupno strujanje zračne mase u cikloni na sjevernoj hemisferi odvija se kao kruženje oko središta u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (slika 4.20b). Strujnice su približno paralelne s izobarama. Kada nam ciklona dolazi sa zapada, najprije nam dođe ona strana ciklone na kojoj puše južni vjetar. Kada nas ciklona počne napuštati odlazeći dalje prema istoku, doživljavamo drugu stranu ciklone gdje vjetar puše sa sjevera.

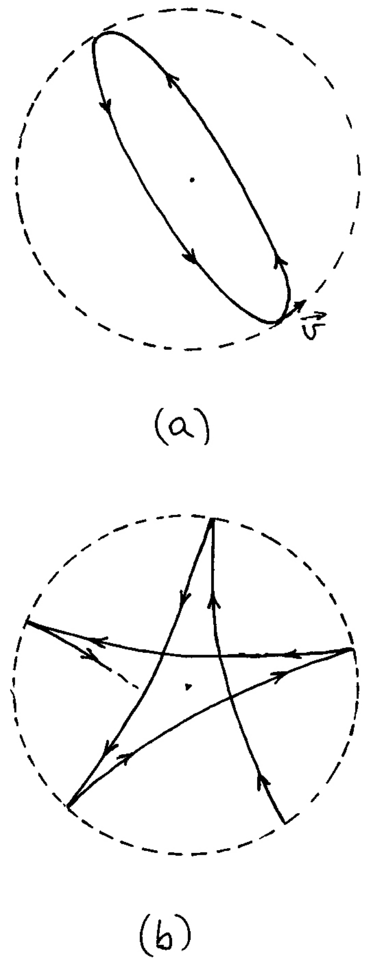
Na južnoj hemisferi zračna masa u cikloni kruži u smjeru kao što ide kazaljka na satu.

Foucaultovo njihalo

Masa obješena na dugačku nit predstavlja njihalo s jako dugačkim vremenom T jednog perioda. To je pogodno da se promatranjem njihala može utvrditi rotacija Zemlje oko osi. Foucault je 1851. godine postavio takvo njihalo pod kupolom pariškog Pantheona. Duljina niti bila je oko 70 m, a obješena masa je imala 28 kg. Nakon što bi se njihalo pokrenulo, opažalo bi se prividno zakretanje ravnine njihala u smjeru kazalke na satu ako se gleda odozgo. Za sat vremena, ravnina njihala bi se zakrenula približno za kut od 11 stupnjeva, a puni krug bi izvela za oko 32 sata.

Da bi se objasnilo opažanje kod Foucaultovog njihala, zgodno je najprije zamisliti da se njegovo objesište nalazi točno iznad Sjevernog pola. Ako uteg otklonimo iz položaja ravnoteže i zadržimo njegov položaj fiksnim u odnosu prema točki ispod njega na površini Zemlje, on ima neku obodnu brzinu od zapada prema istoku zbog rotacije Zemlje. Kada ga pustimo, uteg se kreće u obliku izduljene elipse kao što prikazuje slika 4.21a. To je prikaz u inercijalnom sustavu u kojemu Zemlja rotira. Vidimo da uteg obilazi središte uvijek s desne strane. Zemlja se okreće tako da načini puni krug za 24 sata, tj. kutnom brzinom $\omega = 7,3\, 10^{-5}$ rad s^{-1}.

Ako gibanje utega prikažemo u neinercijalnom rotirajućem sustavu u kojemu Zemlja miruje, dobiva se rozeta kao na slici 4.21b. Za promatrača

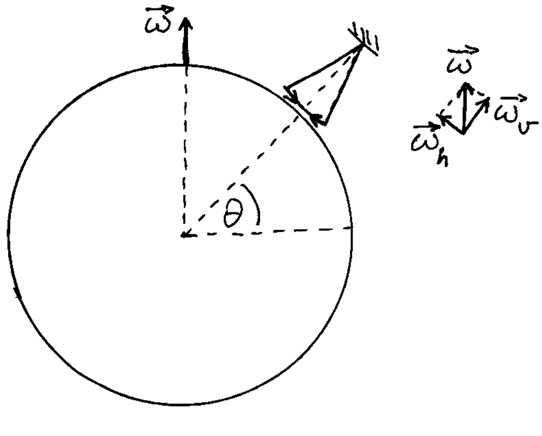


Slika 4.21: (a) Pogled na maleni dio Zemlje oko sjevernog pola u inercijalnom sustavu S u kojemu se Zemlja okreće oko svoje osi. Radijus crtkane kružnce predstavlja maksimalni otklon njihala obješenog iznad sjevernog pola. U početnom položaju njihalo ima brzinu $\vec{v}$ koja predstavlja obodnu brzinu za dani radijus uslijed rotacije Zemlje. Puna linija predstavlja gibanje obješenog tijela u sustavu S. (b) U sustavu S' Zemlja miruje. Obješeno tijelo ima putanju koja zakreće uvijek u desno, opisujući tako rozetu.

koji miruje na površini Zemlje uteg nema relativnu obodnu brzinu kada se nalazi u krajnjem položaju otklona. Otpuštanjem utega, on krene prema središtu, no putanja mu se ne nastavlja ravno do središta, već skreće u desno tako da uteg mimoiđe središte s desne strane i nastavi zakretanjem u desno do drugog krajnjeg položaja otklona.

Nakon toga uteg ponovo kreće prema središtu, te opet zakreće u desno, mimoilazi središte s desne strane (gledajući iz novog smjera gibanja) i odlazi do sljedećeg krajnjeg položaja otklona. Proces se tako nastavlja. Valja primijetiti na slici 4.21b da se sukcesivni krajnji položaji otklona pomiču od istoka prema zapadu, tj. suprotno od prave rotacije Zemlje prikazane na slici 4.21a. Vrhovi rozete na slici 4.21b opišu puni krug za 24 sata. Ako promatrač koji stoji na površini Zemlje želi formalnom primjenom Newtonovih zakona opisati zakrivljene putanje gibanja utega kao što prikazuje rozeta na slici 4.21b, mora uvesti fiktivnu Coriolisovu silu.

Postavljanje Foucaultova njihala na nekom drugom mjestu osim Sjevernog pola, zahtijeva dodatnu analizu i objašnjenje. Slika 4.22 prikazuje Zemlju koja rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$ oko osi sjever - jug. Ako je Foucaultovo njihalo postavljeno na nekom mjestu koje ima geografsku širinu θ, možemo rastaviti vektor kutne brzine na dvije komponente duž vertikalnog i horizontalnog smjera prema mjestu gdje je postavljeno Foucaultovo njihalo (slika 4.22). Prema objašnjenju iznesenom u matematičkim dopunama na kraju prvoga poglavlja, ukupna rotacije Zemlje kutnom brzinom $\vec{\omega}$ ekvivalentna je istodobnim dvjema rotacijama s kutnim brzinama $\vec{\omega}_v$ i $\vec{\omega}_h$.



Slika 4.22: Uvećani prikaz Foucaultova njihala obješenog na nekoj geografskoj širini θ. U inercijalnom sustavu S Zemlja rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Pomoćni crtež prikazuje rastavljanje vektora kutne brzine na komponente duž vertikalnog i horizontalnog smjera na mjestu gdje se nalazi Foucaultovo njihalo. Iznos vertikalne komponente je $\omega_v = \omega \sin\theta$.

Za analizu ponašanja Foucaultova njihala bitna je vertikalna komponenta kutne brzine koja ima iznos $\omega_v = \omega \sin\theta$. Naime, vertikalna kutna brzina igra istu ulogu koju ima puna kutna brzina rotacije Zemlje kada je Foucaultovo njihalo postavljeno na Sjeverni pol. Stoga se vrijeme punog zakreta Foucaultova njihala postavljenog na geografskoj širini θ određuje po formuli

$$T = \frac{24\,\text{sata}}{\sin\theta} \tag{4.77}$$

Na Sjevernom polu ($\theta = 90^o$) period iznosi 24 sata, dok na ekvatoru ($\theta = 0$) postaje beskonačno velik, tj. rotacije uopće nema. Na drugim geografskim širinama period je dulji od 24 sata sukladno jednadžbi (4.77).

Poglavlje 5

RAD I ENERGIJA

Proučavajući drugi Newtonov zakon upoznali smo učinak sile koja u nekom vremenskom intervalu djeluje na slobodno tijelo. Produkt sile i intervala vremena uzrokuje promjenu količine gibanja tijela, a tu veličinu koristimo kod opisa gibanja tijela. U ovome ćemo poglavlju pokazati da je korisno razmotriti još jedan, neovisni učinak sile. Radi se o produktu sile i puta koji tijelo prevali dok na njega djeluje sila, a nazivamo ga *radom* sile.

Pokazat ćemo da izvršen rad sile na slobodno tijelo mijenja njegovu *kinetičku energiju.* Ako u razmatranje uključimo sustav tijela s unutarnjim silama, možemo u nekim slučajevima (npr. elastična sila, gravitacijska sila) utvrditi postojanje *potencijalne energije*, koja se može pretvarati u kinetičku, i obrnuto. Razmatranje o vrstama energije proširit ćemo na opći pojam energije kao veličine koju nije moguće uništiti, niti stvarati ni iz čega. Stoga pojam energije ima istaknutu ulogu u fizici.

5.1 Rad sile i promjena kinetičke energije slobodnog tijela

U razmatranju djelovanja neke sile na tijelo, polazimo od najjednostavnijeg zamišljenog slučaja u kojemu je to jedina sila koja djeluje na tijelo. U slučaju kada na tijelo djeluje više sila, možemo najprije utvrditi učinak svake od sila zasebno i zatim odrediti zbirni učinak, ili pak najprije vektorski zbrojiti sve sile koje djeluju na tijelo i zatim utvrditi učinak ukupne sile, kao da se radi o jednoj jedinoj sili. Tako ćemo postupati i u uvođenju pojma rada, te njegovu daljnjem razmatranju u ovome odjeljku.

5.1.1 Definicija rada i kinetičke energije

Kada sila djeluje na slobodno tijelo tijekom nekog intervala vremena, dolazi do promjene količine gibanja tijela sukladno drugome Newtonovu zakonu. O tome smo opsežno govorili u drugome poglavlju ove knjige. No, tijekom tog intervala vremena, tijelo prevali i neki put, pa možemo razmotriti učinak sile vezujući ga upravo uz prevaljeni put.

Na slici 5.1a prikazano je tijelo koje u nekom trenutku t_1 ima neku brzinu $\vec{v}_1$. Neka na to tijelo djeluje sila $\vec{F}$ u smjeru brzine tako da putanja biva pravac sve do trenutka t_2 kada tijelo ima brzinu $\vec{v}_2$. Sila ne mora biti stalna po iznosu, tako da na svakom infinitezimalnom djeliću puta $d\vec{s}$ moramo uzeti odgovarajuću vrijednost sile. Skalarni produkt te sile i puta definiramo kao *rad sile na tome putu*

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{5.1}$$

U ovome slučaju, sila $\vec{F}$ i put $d\vec{s}$ imaju isti smjer, tj. kut među njima je nula, pa možemo pisati $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, ds$. Ovaj rad je pozitivna veličina jer F i ds predstavljaju apsolutne iznose odgovarajućih vektora. Koristeći se poznatim izrazima, možemo preinačiti izraz za rad

$$dW = F\,ds = m\,a\,v\,dt = m\,v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,d\left(v^2\right) \tag{5.2}$$

Dobili smo zanimljiv rezultat. Učinak sile na putu iskazuje se u promjeni kvadrata brzine tijela. Odmah možemo napisati da je ukupan rad jednak zbroju svih infinitezimalnih radova od početnog do konačnog stanja

$$W = \int_1^2 dW = \frac{1}{2}\,m \int_1^2 d\left(v^2\right) = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 \tag{5.3}$$

Ukupan rad je ovdje također pozitivna veličina jer je nastao zbrajanjem pozitivnih infinitezimalnih veličina dW. Na kraju smo dobili da je ukupno izvršeni rad jednak razlici dvaju izraza koji imaju istu formu, ali jedan uključuje brzinu tijela u konačnome stanju, a drugi u početnome.

Prethodni rezultat iz jednadžbe (5.3) daje nam povoda da definiramo pojam *kinetičke energije* tijela

$$E_K = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \qquad (5.4)$$

Uz ovu definiciju, ukupno izvršeni rad postaje jednak promjeni kinetičke energije tijela od početnog do konačnog stanja

$$W = E_{K2} - E_{K1} = \Delta\, E_K \qquad (5.5)$$

U slučaju koji je prikazan na slici 5.1a, sila djeluje u smjeru trenutne brzine i stoga povećava njen iznos. Radi se, dakle, o ubrzavanju tijela. Konačna kinetička energija E_{K2} veća je od početne E_{K1}, pa je i razlika u jednadžbi (5.5) pozitivna. Možemo zaključiti da pozitivan rad sile ($W > 0$) dovodi do povećanja kinetičke energije tijela ($\Delta\, E_K > 0$).

Značenje negativnog rada sile

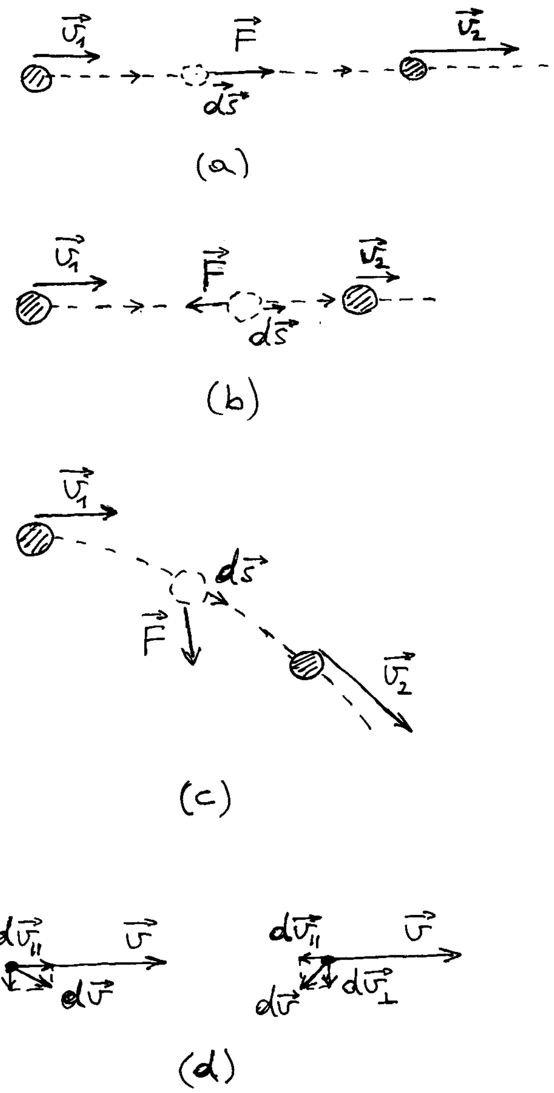
Razmotrimo sada slučaj u kojemu tijelo ima u trenutku t_1 brzinu $\vec{v}_1$, ali sila $\vec{F}$ djeluje u suprotnom smjeru (slika 5.1b), tako da dolazi do usporavanja gibanja tijela i ono u kasnijem trenutku t_2 ima manju brzinu $\vec{v}_2$.

Rad sile $\vec{F}$ na putu $d\vec{s}$ ima sada vrijednost

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, ds\, \cos 180^o = -F\, ds < 0 \qquad (5.6)$$

Infinitezimalni rad sile je u ovome slučaju negativna veličina. Isto očekujemo i za ukupni rad ($W < 0$) jer ga dobivamo zbrajanjem negativnih infinitezimalnih doprinosa.

Napomena: Ako bismo izraz iz jednadžbe (5.6) htjeli upotrijebiti na način koji je primijenjen u jednadžbi (5.2), bilo bi potrebno voditi računa o različitim smjerovima, tj. uvesti algebarske veličine. Ako smjer gibanja tijela uzmemo kao pozitivan, onda za silu moramo uzeti negativnu algebarsku veličinu $-F$ (ovdje je $F = |\vec{F}|$). Promjena brzine uvijek ima smjer sile, pa je i ona u ovome slučaju negativna algebarska veličina $dv = -a\, dt$ (ovdje je $a = |\vec{a}|$). Konačni rezultat je isti kao i u jednadžbi (5.2). Jednadžbe (5.3) - (5.5) se ne mijenjaju.



Slika 5.1: (a) Tijelo ima početnu brzinu $\vec{v}_1$. Sila djeluje u smjeru pomaka tijela i povećava njegovu brzinu. Rad sile je pozitivan te se kinetička energija tijela povećava. (b) Sila djeluje u smjeru suprotno od pomaka tijela. Rad sile je negativan te se knetička energija tijela smanjuje. (c) Smjer djelovanja sile tvori neki kut prema pomaku tijela. (d) Promjena brzine $d\vec{v}$, koja ima smjer djelovanja sile, može se rastaviti na paralelnu i okomitu komponentu u odnosu na trentnu brzinu tijela.

Budući da se radi o usporavanju tijela ($v_2 < v_1$), kinetička energija konačnog stanja je manja od početnog ($E_{K2} < E_{K1}$), pa možemo zaključiti da negativnim radom ($W < 0$) sila oduzima kinetičku energiju tijelu ($\Delta E_K < 0$).

Rad sile na zakrivljenoj putanji

Možemo sada razmotriti općenit slučaj u kojemu sila djeluje kod kutom u odnosu prema trenutnoj brzini tako da nastaje zakrivljena putanja. Slika 5.1c prikazuje početnu brzinu tijela $\vec{v}_1$ i djelovanje sile $\vec{F}$ koja može mijenjati iznos i smjer, te formirati putanju do točke u kojoj tijelo ima brzinu $\vec{v}_2$. Na svakom infinitezimalnom djeliću puta, sila izvrši rad

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\vec{a}\cdot\vec{v}dt = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}md\left(v^2\right) \quad (5.7)$$

Posljednja jednakost proizlazi iz činjenice da je kvadrat vektora jednak kvadratu apsolutnih vrijednosti, pa je

$$d\left(v^2\right) = d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} \quad (5.8)$$

Ova relacija zahtijeva dodatni komentar. Na slici 5.1d prikazana su dva slučaja u kojima vektor sile $\vec{F}$ tvori kut u odnosu prema vektoru trenutne brzine $\vec{v}$. Vektor promjene brzine $d\vec{v}$ ima uvijek smjer sile, te je tako prikazan na slici 5.1d. Njega možemo rastaviti na komponente, paralelnu i okomitu na brzinu, pa se gornji skalarni produkt svodi na

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \vec{v}\cdot\left(d\vec{v}_\parallel + d\vec{v}_\perp\right) = \vec{v}\cdot d\vec{v}_\parallel \quad (5.9)$$

gdje smo uvažili da skalarni produkt okomitih vektora iščezava. Dakle, važna je samo projekcija vektora $d\vec{v}$ na smjer vektora brzine. Drugim riječima, problem se svodi na prethodne slučajeve kada sila djeluje na istome pravcu na kojemu se nalazi trenutna brzina. Ako sila tvori oštar kut s vektorom trenutne brzine, komponenta $d\vec{v}_\parallel$ ima isti smjer kao i $\vec{v}$, pa iznos brzine raste kao i u slučaju prikazanom na slici 5.1a. Ako pak sila tvori tupi kut s vektorom trenutne brzine, komponenta $d\vec{v}_\parallel$ ima suprotan smjer od $\vec{v}$, pa dolazi do usporavanja kao i u slučaju koji prikazuje slika 5.1b.

Napomena: Možemo još primijetiti da dodavanjem beskonačno malenog vektora $d\vec{v}$ na vektor konačnog iznosa $\vec{v}$, promjenu njegova iznosa stvara samo komponenta $d\vec{v}_\parallel$. Stoga samo ta komponenta mijenja kvadrat brzine, kao što se vidi i prema jednadžbama (5.8) i (5.9).

Zaključujemo, konačno, da i u općenitom slučaju odnosa sile i trenutne brzine, rad sile $\vec{F}$ na putu $d\vec{s}$ dovodi do promjene kvadrata brzine prema jednadžbi (5.7), koja je identična s prethodnom jednadžbom (5.2). Stoga i u općenitom slučaju vrijede jednadžbe (5.3) - (5.5). Ukupan rad sile na slobodno tijelo dovodi do promjene njegove kinetičke energije.

Jedinica za rad i kinetičku energiju. Jedinica za rad nosi posebno ime džul (1 J) u čast engleskog fizičara J. Joulea (19. st.). Iz definicijske jednadžbe (5.1) slijedi da je 1 J = 1 N m. Rad od jednog džula izvrši sila od jednog njutna kada djeluje na putu od jednog metra. Prema jednadžbama (5.2) - (5.5), ista jedinica vrijedi i za kinetičku energiju.

Izražavanje rada i kinetičke energije kod kružnog gibanja pomoću kutnih veličina

Kao poseban slučaj razmotrimo rad sile kod gibanje tijela (čestice) po kružnoj putanji. Ako na tijelo djeluje samo centripetalna sila $\vec{F}_c$, gibanje je jednoliko, tj. ne mijenja se iznos brzine, nego samo njen smjer. U takvome gibanju, kvadrat brzine (skalarna veličina) se ne mijenja, pa nema ni promjene kinetičke energije tijela. Sukladno jednadžbi (5.5) očekujemo da i rad centripetalne sile iščezava. Uistinu, za rad centripetalne sile na bilo kojem infinitezimalnom putu imamo

$$dW = \vec{F}_c\cdot d\vec{s} = 0 \quad (5.10)$$

zato što je centripetalna sila radijalna, a infinitezimalni put je tangencijalan, pa su ta dva vektora uzajamno okomita (slika 5.2a). Razumije se, integriranjem nultih doprinosa dobili bismo da je ukupan rad također nula, što je konzistentno s konstantnom kinetičkom energijom.

Napomena: Podrazumijeva se da je tijelo na neki način prethodno steklo obodnu brzinu v, a centripetalna sila se po iznosu prilagodi toj brzini ($F_c = m\,v^2/r$).

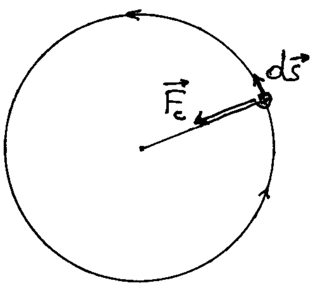
Razmotrimo sada slučaj prikazan na slici 5.2b. Tijelo (čestica) mase m povezano je putem napete niti (sila $\vec{T}$) na uporište u središtu kružnice. Na tijelo djeluje i vanjska sila $\vec{F}$, koja dolazi od nekog čimbenika (nije naznačen na slici 5.2b). Radi analize problema, prikladno je vanjsku silu $\vec{F}$ rastaviti na radijalnu i tangencijalnu komponentu

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t \tag{5.11}$$

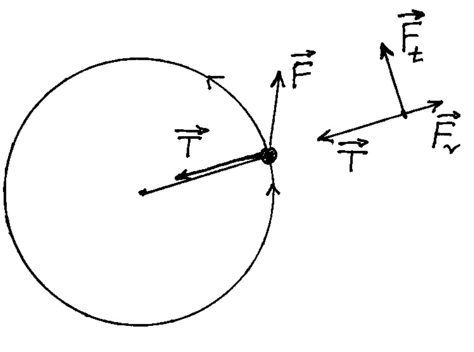
U pomoćnom crtežu na slici 5.2b zamijenjena je sila $\vec{F}$ dvjema komponentama, dok je sila napetosti niti $\vec{T}$ prenesena s glavnog crteža. Možemo zaključiti da sile $\vec{T}$ i $\vec{F}_r$ vektorski zbrojene moraju odigrati ulogu centripetalne sile

$$\vec{F}_c = \vec{T} + \vec{F}_r \tag{5.12}$$

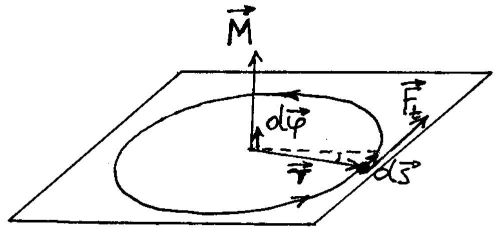
Napomena: Ako pretpostavljamo da je vanjska sila zadana od vanjskog čimbenika, onda je i radijalna komponenta $\vec{F}_r$ time zadana, pa se u praksi sila napetosti niti $\vec{T}$ prilagodi tako da rezultantna centripetalna sila $\vec{F}_c$ po svom iznosu odgovara trenutnoj obodnoj brzini tijela ($F_c = m\,v^2/r$).



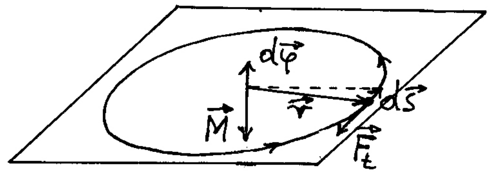
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 5.2: (a) Tijelo u jednolikom gibanju po kružnici. Napetost niti igra ulogu centripetalne sile koja je okomita na vektor pomaka tijela. (b) Pored napetosti niti, na tijelo djeluje vanjska sila $\vec{F}$. Na pomoćnom je crtežu sila $\vec{F}$ zamijenjena svojim komponentama u radijalnom i tangencijalnom smjeru. (c) Djelovanje tangencijalne sile ekvivalentno je djelovanju momenta sile $\vec{M}$ okomito na ravninu kruženja. Pomak tijela $d\vec{s}$ na obodu kružnice može se ekvivalentno izraziti vektorom infinitezimalnog zakreta $d\vec{\varphi}$. Izvršeni rad je pozitivan te se rotacija tijela ubrzava. (d) Tangencijalna sila djeluje u suprotnom smjeru od trenutne brzine tijela. Moment sile ima suprotan smjer od vektora infinitezimalne rotacije, pa se rotacija tijela usporava.

Kao što smo gore ustanovili, centripetalna sila $\vec{F}_c$ ne vrši rad jer je uvijek okomita na infinitezimalni put $d\vec{s}$ na kružnici. Međutim, tangencijalna komponenta vanjske sile $\vec{F}_t$ leži na istome pravcu kao i $d\vec{s}$, pa vrši rad

$$dW = \vec{F}_t \cdot d\vec{s} \tag{5.13}$$

Ovaj rad je pozitivan ako sila $\vec{F}_t$ ima isti smjer kao i infinitezimalni put $d\vec{s}$. Imajući u vidu poznatu

relaciju $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$, zaključujemo da pozitivan rad nastaje kada tangencijalna komponenta vanjske sile $\vec{F}_t$ djeluje u smjeru trenutne obodne brzine $\vec{v}$. Tada se povećava iznos brzine, pa time i kinetička energija. To je slučaj ubrzavanja kružnog gibanja tijela. Ako je pak tangencijalna komponenta vanjske sile $\vec{F}_t$ usmjerena suprotno trenutnoj obodnoj brzini $\vec{v}$, rad je negativan i dovodi do smanjivanja kinetičke energije tijela. Radi se o usporavanju kružnog gibanja.

Do sada smo rad vanjske sile kod kružnog gibanja opisivali na isti način kao što smo to prethodno napravili u općenitom slučaju djelovanja sile na nekoj putanji. Možemo sada pokušati iskazati rad pomoću kutnih kinematičkih i dinamičkih veličina koje smo uveli u prvome i drugome poglavlju za opis kružnog gibanja. Na slici 5.2c prikazan je slučaj kada sila $\vec{F}_t$ ima smjer kao i infinitezimalni put $d\vec{s}$. Iz slike je vidljivo da infinitezimalni iznos ds možemo smatrati lukom kružnog isječka kojemu je vršni kut $d\varphi$. Stoga za rad možemo pisati

$$dW = F_t\,ds = F_t\,r\,d\varphi \tag{5.14}$$

Razmotrimo sada moment sile $\vec{F}_t$ oko središta kružnice

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t \tag{5.15}$$

Budući da su vektori $\vec{r}$ i $\vec{F}_t$ uzajamno okomiti, dobivamo za iznos momenta sile $M = r\,F_t$. Lako možemo uočiti da jednadžba (5.14) ima na desnoj strani upravo iznos momenta sile M pomnožen s infinitezimalnim kutom $d\varphi$. No, moment sile je vektor, pa želimo da se u tome svojstvu pojavljuje u konačnoj jednadžbi za rad. S druge strane, rad dW je skalarna veličina, koju možemo dobiti ako dva vektora množimo skalarno. Kao drugi vektor uzimamo kut infinitezimalne rotacije $d\vec{\varphi}$, koji je po iznosu jednak $d\varphi$, a smjer mu je okomit na ravninu rotacije i određen pravilom desne ruke. Infinitezimalni rad možemo konačno napisati u obliku

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \tag{5.16}$$

Kod kružnog gibanja, djelovanjem momenta sile pri ostvarenom kutu zakreta nastaje rad.

U slučaju prikazanom na slici 5.2c, vektori $\vec{M}$ i $d\vec{\varphi}$ su paralelni, pa je i rad iskazan jednadžbom (5.16) pozitivan. Ako pak zamislimo situaciju u kojoj tangencijalna komponenta vanjske sile $\vec{F}_t$ djeluje u suprotnom smjeru od vektora infinitezimalnog puta $d\vec{s}$, kao što prikazuje slika 5.2d, vektor $\vec{M}$ ima suprotan smjer od $d\vec{\varphi}$, te je rad izračunat prema jednadžbi (5.16) negativan. Radi se o usporavanju kružnog gibanja.

Napomena: Kod izračunavanja momenta sile $\vec{M}$ u jednadžbi (5.16) možemo uvrstiti ukupnu vanjsku silu $\vec{F}$ jer vrijedi $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_t$, zato što radijalna komponenta vanjske sile ne pridonosi momentu sile oko središta kružnice ($\vec{r} \times \vec{F}_r = 0$).

Budući da smo kod kružnog gibanja rad izrazili pomoću kutnih veličina, bilo bi zgodno na taj način izraziti i kinetičku energiju. U tu svrhu iskoristimo poznatu relaciju za kružno gibanje $v = \omega\,r$, te napišimo

$$E_K = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,r^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \tag{5.17}$$

gdje je $I = m\,r^2$ moment inercije tijela (čestice) mase m na udaljenosti r od osi rotacije.

Ukupan rad kojim se kod kružnog gibanja promijeni kutna brzina iznosi

$$W = \int_1^2 \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\,I\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}\,I\,\omega_1^2 = \Delta\,E_K \tag{5.18}$$

Integriranje se provodi od nekog kuta φ_1 kada je trenutna kutna brzina bila ω_1 pa do kuta φ_2 kada je postignuta trenutna kutna brzina ω_2. Rotacija od φ_1 do φ_2 može biti tek maleni zakret, no može se odnositi i na okretanje veće od punoga kuta, odnosno više njih. U konačnici, izvršeni rad dovodi do promjene kinetičke energije tijela.

5.1.2 Izmjene kinetičke energije kod rada više sila

Čest je slučaj u praksi da možemo identificirati više sila koje djeluju na neko tijelo, te se postavlja pitanje izračunavanja rada tih sila i promjene kinetičke energije tijela. Na slici 5.3a prikazan je primjer tijela T na koje djeluju tri sile označene kao $\vec{F}_{AT}$, $\vec{F}_{BT}$ i $\vec{F}_{CT}$, čime želimo istaknuti da one dolaze od djelovanja različitih tijela A, B i C na promatrano tijelo T. Ako želimo samo odrediti promjenu kinetičke energije promatranog tijela od nekog početnog do nekog konačnog stanja, možemo najprije utvrditi ukupnu silu (slika 5.3b)

$$\vec{F}_{uk} = \vec{F}_{AT} + \vec{F}_{BT} + \vec{F}_{CT} \tag{5.19}$$

a zatim integriranjem odrediti rad ukupne sile od početnog do konačnog stanja

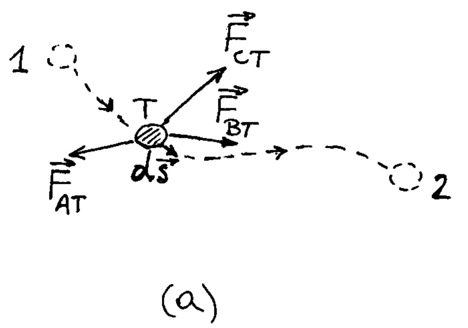
$$W = \int_1^2 \vec{F}_{uk} \cdot d\vec{s} = \Delta\, E_K \tag{5.20}$$

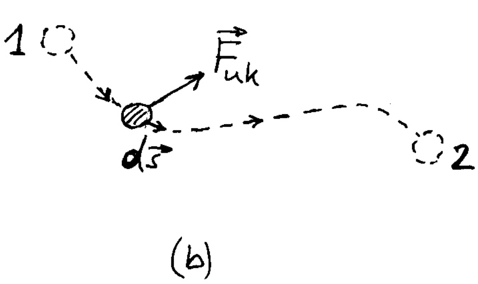
U alternativnom postupku, možemo najprije izračunati zasebno rad svake sile od početnog do konačnog stanja (slika 5.3a)

$$W_A = \int_1^2 \vec{F}_{AT} \cdot d\vec{s} \tag{5.21}$$

$$W_B = \int_1^2 \vec{F}_{BT} \cdot d\vec{s} \tag{5.22}$$

$$W_C = \int_1^2 \vec{F}_{CT} \cdot d\vec{s} \tag{5.23}$$





Slika 5.3: (a) Na promatrano tijelo T djeluju tri tijela A, B i C (nisu prikazana na slici). Pod djelovanjem triju sila, promatrano tijelo se giba od prvog do drugog položaja. Ukupni put se sastoji od djelića puta $d\vec{s}$. (b) Prikaz ukupne sile $\vec{F}_{uk}$ na promatrano tijelo i djelića puta $d\vec{s}$.

a zatim zbrojiti sve izvršene radove i dobiti ukupno izvršeni rad svih sila

$$W = W_A + W_B + W_C = \Delta\, E_K \tag{5.24}$$

Oba postupka daju isti konačan rezultat za promjenu kinetičke energije tijela. Međutim, drugi postupak nam otkriva da pojedina tijela A, B i C imaju svoje različite udjele u ukupnome rezultatu. Ako neka od tih sila izvrši pozitivan rad, ona za taj iznos uvećava kinetičku energiju tijela. S druge strane, neka od sila može izvršiti negativan rad, te za taj iznos umanjuje kinetičku energiju tijela.

Svaka sila koja djeluje na promatrano tijelo dolazi od djelovanja nekog drugog tijela (čimbenika), pa možemo reći da pojedini čimbenici mogu davati ili oduzimati energiju promatranome tijelu. Ova će nam raščlamba biti korisna u sljedećem razmatranju u kojemu ćemo uvesti pojam potencijalne energije.

5.2 Potencijalna energija

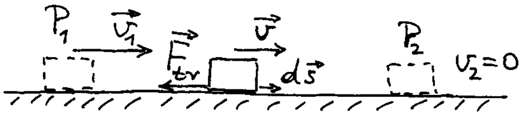
U prethodnom smo odjeljku usmjeravali pažnju na tijelo kojemu se, zbog djelovanja vanjske sile, može povećati ili smanjiti kinetička energija. Sada bismo uključili i pitanje što se zbiva s onim drugim tijelom (čimbenikom) koje je uzrokovalo djelovanje sile na prvo tijelo. Zanimljivo bi bilo znati može li drugo tijelo najprije oduzeti prvome neki iznos kinetičke energije, a zatim mu vratiti taj isti iznos kinetičke energije. Drugim riječima, može li se oduzeta kinetička energija nekako pohraniti da bi kasnije mogla biti predana opet istome tijelu od kojega je bila oduzeta, ili pak predana bilo kojem drugom tijelu.

Razmotrimo najprije jedan primjer u kojemu nema mogućnosti povratka oduzete kinetičke energije. Slika 5.4 prikazuje promatrano tijelo koje u nekoj točki P_1 ima početnu brzinu $\vec{v}_1$. Kao drugo tijelo, prikazana je podloga koja djeluje silom trenja $\vec{F}_{tr}$ na prvo (promatrano) tijelo i zaustavlja ga u nekoj točki P_2. Dakle, sa stajališta promatranog tijela, sila trenja igra ulogu vanjske sile koja vrši rad

$$W = \int_1^2 \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{5.25}$$

gdje je uzeto u obzir da se tijelo zaustavilo ($v_2 = 0$). Rad sile trenja je negativan ($\vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s} < 0$), pa se ki-

netička energija tijela smanjuje i konačno potpuno iščezne.



Slika 5.4: Tijelo zadobije na neki način početnu brzinu $\vec{v}_1$ i zatim je prepušteno klizanju na podlozi s trenjem. Brzina tijela se smanjuje dok se tijelo ne zaustavi u točki P_2. Rad sile trenja oduzeo je tijelu cjelokupnu početnu kinetičku energiju.

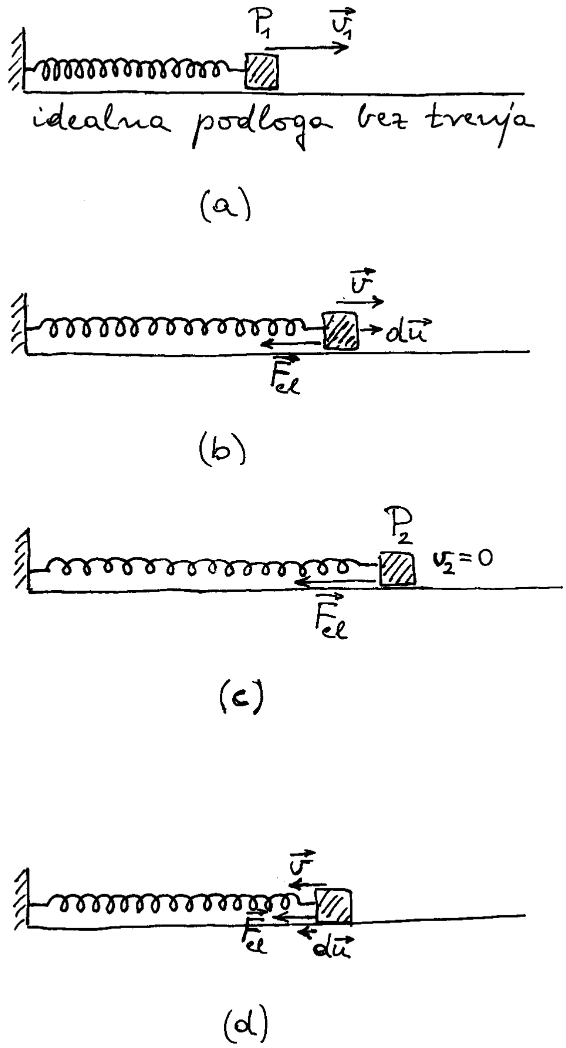
Postavlja se pitanje kamo je otišla ta energija, te može li biti vraćena. U ovome je slučaju podloga predstavljala drugo tijelo, koje je djelovalo silom trenja na promatrano prvo tijelo. Međutim, kada se tijelo zaustavi, iščezne sila trenja, a podloga ne stvori nikakvu drugu silu kojom bi mogla promatranome tijelu vratiti kinetičku energiju. Kasnije ćemo vidjeti da je energija otišla nepovratno u toplinu.

5.2.1 Potencijalna energija u elastičnom sustavu

Umjesto podloge s trenjem, zamislimo sada idealnu podlogu bez trenja, tako da podloga više ne djeluje na promatrano tijelo na njoj. Kao drugo tijelo, postavimo oprugu koja je jednim krajem spojena s promatranim tijelom, a drugim je krajem učvršćena na nepomičan zid. Na slici 5.5a prikazana je opruga u prirodnom nerastegnutom stanju, a tijelo u točki P_1 s početnom brzinom $\vec{v}_1$, stečenom npr. nekim udarcem. Kod pomaka tijela za $\vec{u}$ od točke P_1, rastegne se i opruga za isti iznos (slika 5.5b), te se javlja elastična sila $\vec{F}_{el} = -K\vec{u}$, koja nastoji vratiti oprugu u nerastegnuto stanje. Sa stajališta promatranog tijela, $\vec{F}_{el}$ predstavlja vanjsku silu koja vrši rad i mijenja kinetičku energiju tijela

$$W = \int_1^2 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}mv_1^2 \quad (5.26)$$

gdje smo integrirali do točke P_2 u kojoj se tijelo zaustavilo ($v_2 = 0$). Možemo uočiti da kod ovog integriranja sila $\vec{F}_{el}$ ima ulogu koju je imala sila trenja $\vec{F}_{tr}$ u jednadžbi (5.25). Rad je negativan, pa tijelo gubi kinetičku energiju i zaustavlja se u točki P_2 (slika 5.5c).



Slika 5.5: (a) U početnom trenutku opruga je u nerastegnutom stanju, a tijelu je nekim udarcem izvana (nije prikazano na slici) dana brzina $\vec{v}_1$. Tijelo se nalazi na idealnoj podlozi bez trenja. (b) Rastezanjem opruge javlja se elastična sila koja ima smjer suprotan pomaku tijela $d\vec{u}$, te se gibanje tijela usporava. (c) Rad elastične sile oduzeo je tijelu u potpunosti početnu kinetičku energiju i ono se trenutno zaustavilo u točki P_2. (d) Elastična sila nastavlja djelovati na tijelo koje se sada pomiče u smjeru elastične sile tako da je rad elastične sile pozitivan i tijelu raste kinetička energija.

Možemo reći da je u ovome slučaju opruga svojim djelovanjem oduzela promatranome tijelu kinetičku energiju, slično kao što je to napravila podloga s trenjem u slici 5.4. Međutim, za razliku od sile trenja, koja nestaje kada se tijelo zaustavi, elastična sila postoji dokle god je opruga rastegnuta. Stoga rastegnuta opruga ima sposobnost vraćanja kinetičke energije promatranome tijelu, pa kažemo da ima pohranjenu *potencijalnu energiju* (lat. *potentia* - *moć*). Ako pustimo da elastična sila opruge djeluje na isto tijelo u povratku od točke P_2 prema točki P_1 (slika 5.5d), ona će izvršiti rad

$$W' = \int_2^1 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 \tag{5.27}$$

Rad elastične sile u povratku je pozitivan i u potpunosti vraća tijelu kinetičku energiju.

Napomena: Integral u jednadžbi (5.27) ima granice od točke P_2 prema točki P_1. Stoga se $d\vec{u}$ uzima u tome smjeru i paralelan je s $\vec{F}_{el}$. Kod integrala u jednadžbi (5.26), bilo je obrnuto.

Gornje razmatranje možemo sažeti tako da kažemo da je prilikom rastezanja opruga oduzela tijelu kinetičku energiju i stekla vlastitu potencijalnu energiju

$$E_{P2} - E_{P1} = -\int_1^2 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{u} \tag{5.28}$$

Napomena: Granice integriranja u jednadžbi (5.28) postavljene su tako da odgovaraju procesu rastezanja opruge, tj. kao u jednadžbi (5.26), te je sam integral negativan. Uz negativan predznak ispred integrala dobiva se pozitivna promjena potencijalne energije prilikom rastezanja opruge.

Izrazu za stvaranje potencijalne energije možemo dati još jednu fizikalnu interpretaciju. Dok se tijelo početno kretalo od točke P_1 prema P_2, opruga je na njega djelovala silom $\vec{F}_{el}$. Međutim, prema trećemu Newtonovu zakonu, tijelo je istodobno djelovalo na oprugu silom reakcije $-\vec{F}_{el}$. Sa stajališta opruge, silu kojom tijelo djeluje na oprugu možemo smatrati vanjskom silom. Ona pak ne može dati akceleraciju opruzi jer je drugi kraj opruge učvršćen. Stoga radom vanjske sile $-\vec{F}_{el}$ opruga ne stječe kinetičku energiju, ali se deformira (rasteže). Ako izračunamo rad vanjske sile $-\vec{F}_{el}$ na putu od točke P_1 prema P_2 dobivamo točno izraz u jednadžbi (5.28)), tj. povećanje potencijalne energije opruge.

Poznavajući izraz za elastičnu silu, možemo odrediti iznos potencijalne energije opruge koja je rastegnuta za proizvoljni iznos u

$$E_P = -\int_0^u (-K\,\vec{u}) \cdot d\vec{u} = K \int_0^u u\, du = \frac{1}{2}\, K\, u^2 \tag{5.29}$$

gdje je za nultu razinu potencijalne energije uzeto nerastegnuto stanje ($u_1 = 0,\ E_{P1} = 0$). Potencijalna energija opruge raste s kvadratom iznosa za koji se produljila.

> *Što se zbiva s potencijalnom energijom u procesu povratka opruge u nerastegnuto stanje?*

U povratnom procesu, opruga djeluje na tijelo tako da elastična sila izvrši pozitivan rad W' (jednadžba (5.27)) na tijelo povećavajući njegovu kinetičku energiju. Pritom se smanjuje potencijalna energija opruge

$$E_{P1} - E_{P2} = -\int_2^1 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{u} < 0 \tag{5.30}$$

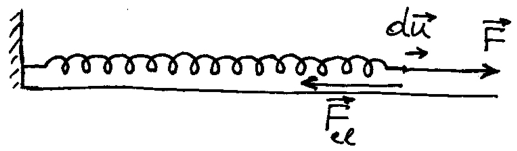
Napomena: Predznak minus moramo zadržati da bi promjena potencijalne energije kod stezanja opruge bila negativna. Naime, u integralu smo postavili granice od točke P_2 prema P_1, kao u jednadžbi (5.27), jer se tako odvija proces stezanja opruge. Tada pomak $d\vec{u}$ ima isti smjer kao sila $\vec{F}_{el}$, te je sam integral pozitivna veličina W'.

Općenit izraz za promjenu elastične potencijalne energije

Izraz za promjenu potencijalne energije opruge u jednadžbi (5.28) dobili smo razmatrajući primjer u kojemu do rastezanja opruge dolazi zbog tijela kojemu je dana početna kinetička energija, a ono je vezano uz oprugu. Međutim, do rastezanja opruge može općenito doći uslijed djelovanja bilo koje vanjske sile na kraj opruge. Slika 5.6 prikazuje oprugu i vanjsku silu $\vec{F}$ koja vrši njeno rastezanje. Sigurno je da sila $\vec{F}$ dolazi od nekog drugog tijela u okolini, ali ono nije na slici prikazano. Na samome kraju opruge su hvatišta sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_{el}$. Budući da

u toj točki nema tijela, dakle ni mase, za njeno proizvoljno gibanje (jednoliko ili ubrzano) nije potrebna ukupna sila. Stoga uvijek imamo $\vec{F} = -\vec{F}_{el}$. Rad vanjske sile, koji se pretvara u potencijalnu energiju opruge, možemo izračunati kao rad sile $-\vec{F}_{el}$, ili ekvivalentno kao rad sile $\vec{F}_{el}$ uzet sa suprotnim predznakom.

Napomena: U gornjem primjeru pretpostavljena je idealizacija u kojoj dijelovi opruge imaju zanemarivu masu. Ako se želi voditi računa o masama segmenata opruge, dio vanjske sile $\vec{F}$ služi za njihovu akceleraciju, odnosno dio rada sile $\vec{F}$ pretvara se u kinetičku energiju tih segmenata. Nasuprot tome, rad sile $\vec{F}_{el}$ uzet sa suprotnim predznakom odražava isključivo promjenu potencijalne energije opruge.



Slika 5.6: Na kraju opruge nije postavljeno neko tijelo, ali na tome mjestu djeluje vanjska sila $\vec{F}$. Rastegnuta opruga djeluje u povratnom smjeru elastičnom silom $\vec{F}_{el}$. Rad elastične sile kod pomaka $d\vec{u}$ uzet s negativnim predznakom jednak je radu vanjske sile.

Možemo zaključiti da se prilikom promjene duljine opruge, bilo da se duljina povećava ili smanjuje, uvijek odvija rad unutarnje sile $\vec{F}_{el}$ na putu koji prevali krajnja točka opruge. Pritom dolazi do promjene elastične potencijalne energije opruge koju možemo napisati općenito

$$\Delta\, E_P = E_{P2} - E_{P1} = -\int_1^2 \vec{F}_{el} \cdot d\vec{u} \qquad (5.31)$$

Promjena potencijalne energije opruge jednaka je po iznosu, ali suprotnog je predznaka, od rada što ga unutarnja elastična sila izvrši od početnog do konačnog stanja opruge.

Napomena: Prilikom rastezanja opruge svejedno je koji se od dva kraja pomiče, a koji je učvršćen. Moramo imati na umu da na svaki kraj opruge djeluju elastične sile jednakih iznosa, ali suprotnih smjerova. Za promjenu potencijalne energije računa se rad one sile čije se hvatište pomiče. U slučaju da se pomiču oba kraja, radovi se zbrajaju i dobiva se ukupna promjena potencijalne energije.

Lako je shvatiti da pojava elastične potencijalne energije nije svojstvena samo opruzi. Svako elastično tijelo povećava svoju potencijalnu energiju kada se pod utjecajem vanjskih sila deformira. Tada se, naime, javljaju unutarnje elastične sile koje vrše odgovarajući (negativan) rad sukladno iznosu deformacije. Kod povratka elastičnog tijela u nedeformirano stanje, unutarnje elastične sile vrše pozitivan rad, te se potencijalna energija tijela smanjuje.

5.2.2 Gravitacijska potencijalna energija

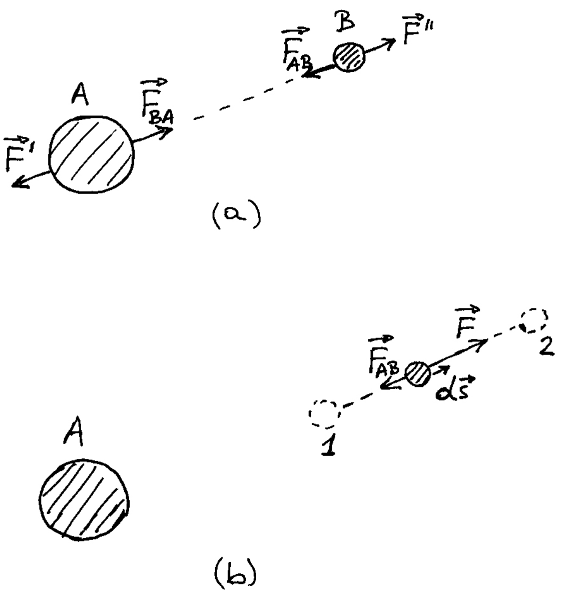
Razmotrimo dva (ogromna) tijela A i B koja se uzajamno privlače silama $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ sukladno općem zakonu gravitacije. Za sada ne navodimo ovisnost sila o masama i udaljenosti među tijelima. To ćemo učiniti kasnije, a sada provedimo samo opća razmatranja. Ako želimo da ta tijela miruju jedno u odnosu prema drugome, morale bi na njih djelovati i neke vanjske sile kako bi se uspostavila ravnoteža (slika 5.7a). Razumije se, radi se o zamišljenoj situaciji, ali ona je načelno sasvim ispravna.

Napomena: Kod ovih razmatranja podrazumijeva se da tijela A i B promatramo u nekom inercijalnom sustavu.

Pretpostavimo sada da je tijelo A nepomično (izostavljamo crtanje sila na to tijelo) i usredotočimo pažnju na tijelo B koje se, uslijed djelovanja sila, pomiče od početnog do konačnog položaja, kako prikazuje slika 5.7b. Ukupni rad sila $\vec{F}$ i $\vec{F}_{AB}$, koje djeluju na tijelo B, daje promjenu njegove kinetičke energije

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_1^2 \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s} = \Delta\, E_K \qquad (5.32)$$

Rad vanjske sile $\vec{F}$ je pozitivan. Kada bi na tijelo B djelovala samo ta sila, ono bi steklo veću kinetičku



Slika 5.7: (a) Tijela A i B privlače se gravitacijskim silama $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$. Zamišljen je statički slučaj za koji bi bile potrebne vanjske sile $\vec{F}\,'$ i $\vec{F}\,''$. (b) Tijelo A je nepomično u nekom inercijalnom sustavu (nisu prikazane sile na to tijelo), a tijelo B se može pomicati od jednog do drugog odabranog položaja.

energiju. Međutim, negativnim radom unutarnje sile $\vec{F}_{AB}$ oduzima se tijelu B dio kinetičke energije. Postavlja se pitanje kamo je otišla ta oduzeta energija, te može li se ona vratiti tijelu B.

U ovome slučaju, nema opruge koja bi bila razapeta između dva tijela i u kojoj bi se, uslijed rastezanja, pohranila potencijalna energija. Tijela A i B nisu ni u kakvu dodiru, te nema nikakve (elastične) deformacije na njima. Ipak, postoji unutarnja sila $\vec{F}_{AB}$ koja djeluje na putu udaljavanja tijela. Ta sila postoji samo ako postoje oba tijela kao sustav. Pokazat ćemo da je ovdje došlo do povećanja potencijalne energije koju pripisujemo *sustavu* dvaju tijela, a ne pojedinome tijelu. Postavljamo definiciju

$$\Delta\, E_P = E_{P2} - E_{P1} = -\int_1^2 \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s} \qquad (5.33)$$

Analogno slučaju elastične opruge (jednadžba (5.31)), promjena potencijalne energije jednaka je po iznosu, ali suprotnog je predznaka, od rada što ga unutarnja sila izvrši od početnog do konačnog položaja. Uz takvu definiciju, jednadžbu (5.32) možemo napisati u obliku

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta\, E_P + \Delta\, E_K \qquad (5.34)$$

Kažemo da je rad vanjske sile $\vec{F}$ jednim dijelom utrošen na povećanje potencijalne energije sustava dvaju tijela, a jednim dijelom na kinetičku energiju tijela na koje je vanjska sila izravno djelovala.

Da bismo se uvjerili kako je ovdje uistinu došlo do stvaranja energije koju možemo s pravom nazvati potencijalnom, moramo pokazati da je na račun te energije moguće izvršiti rad. Ta mogućnost zacijelo postoji stoga što gravitacijska sila ne može nestati. Zamislimo da tijelo B miruje u točki P_2, a zatim ga pustimo tako da ga unutarnja (gravitacijska) sila $\vec{F}_{AB}$ tjera prema točki P_1. Rad koji izvrši unutarnja sila na tom putu

$$W' = \int_2^1 \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s} \qquad (5.35)$$

proizvest će kinetičku energiju tijela. Prema tome, rad koji je prethodno bio uložen u procesu udaljavanja tijela, uistinu je stvorio potencijalnu energiju, a ona se može kasnije pretvoriti u kinetičku energiju pri slobodnom približavanju tijela.

Dok kinetičku energiju pripisujemo jednom tijelu, kada ono stekne neku brzinu, potencijalnu energiju ne možemo pripisati samo jednom tijelu, nego sustavu dvaju tijela A i B. Naime, za nastanak potencijalne energije bitno je da dođe do razmicanja dvaju tijela, a pritom je svejedno koje od dvaju tijela pomičemo dok ono drugo držimo nepomičnim. Rad utrošen za određeno povećanje udaljenosti tih tijela isti je u svakom slučaju, jer su unutarnje sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ jednake po iznosu ali suprotnog smjera. Razumije se, možemo pomicati i oba tijela, pa se radovi zbrajaju i daju ukupnu promjenu potencijalne energije sustava.

Važno je također uočiti da, bez obzira na način kako je nastala, potencijalna energija sustava tijela A i B može biti predana bilo tijelu B na način opisan u jednadžbi (5.35), ili tijelu A ukoliko pustimo da se ono giba pod utjecajem sile $\vec{F}_{BA}$ i prevali jednaki put u približavanju tijelu B, koje zadržimo nepomičnim. Razumije se, pustimo li slobodno oba tijela, svako od njih će stjecati neku kinetičku energiju, koje će zbrojene odgovarati smanjenju potencijalne energije sustava.

Zemlja i tijelo

Nakon provedenih općih razmatranja, okrenimo se analitičkom izrazu za gravitacijsku silu pomoću kojega možemo izračunavati potrebne integrale. Kao konkretan primjer uzmimo Zemlju na kojoj živimo i neko tijelo kao što prikazuje slika 5.8a. Zemlju smatrajmo nepomičnom, te zamislimo da se pod djelovanjem neke vanjske sile, koja nije prikazana na slici 5.8a, tijelo pomaklo iz početnog položaja u neki udaljeniji položaj od Zemlje.

Zbog djelovanja vanjske sile, tijelo može dobiti i neku kinetičku energiju, no ovdje nas interesira promjena potencijalne energije, a nju izračunavamo putem rada unutarnje sile sustava Zemlje i tijela. U ovome slučaju radi se o gravitacijskoj sili $\vec{F}_g$ kojom Zemlja privlači tijelo mase m na udaljenosti r od središta Zemlje ($r > r_Z$)

$$\vec{F}_g = -G\,\frac{m_Z\,m}{r^{\,2}}\,\hat{r} \tag{5.36}$$

Jedinični vektor $\hat{r}$ ima smjer od središta Zemlje prema tijelu, a predznak minus označava da je sila $\vec{F}_g$ suprotnoga smjera. Promjena potencijalne energije iznosi

$$\begin{aligned} E_{P2} - E_{P1} &= -\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = G\,m_Z\,m \int_1^2 \frac{dr}{r^{\,2}} \\ &= G\,m_Z\,m\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

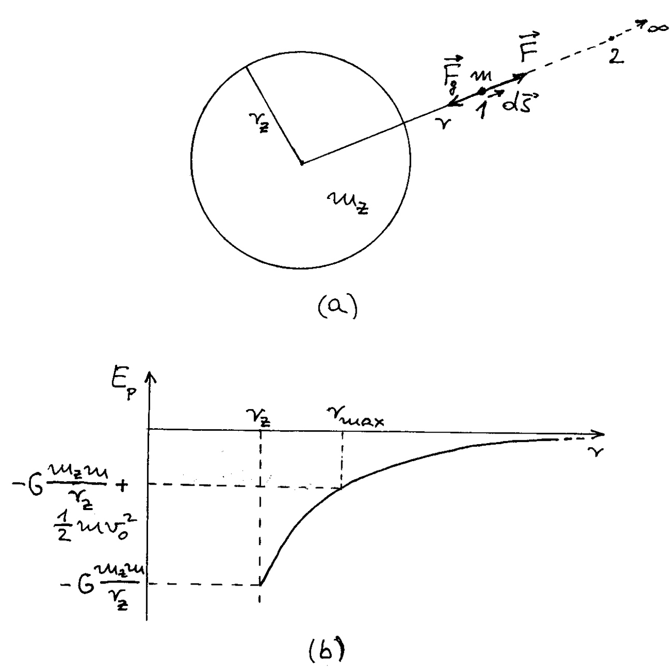
Razmotrimo poseban slučaj u kojemu je tijelo odvedeno beskonačno daleko od Zemlje. Za $r_2 \to \infty$ uočavamo da razlomak $1/r_2$ u jednadžbi (5.37) iščezava. Ako dogovorno odredimo da potencijalna energija u takvome stanju bude nula ($E_{P\infty} = 0$), postižemo matematički jednostavan izraz za potencijalnu energiju

$$E_P = -G\,\frac{m_Z\,m}{r} \tag{5.38}$$

gdje je umjesto određene vrijednosti r_1 upotrijebljena varijabla r koja može poprimiti bilo koju vrijednost. Dobivena negativna vrijednost za potencijalnu energiju ne treba nas iznenaditi. Približavanjem tijela gravitacijska potencijalna energija se smanjuje. Ako smo dogovorno postavili da za beskonačnu udaljenost potencijalna energija bude nula, onda na konačnim udaljenostima ona mora biti negativna.

Napomena: Fizikalno su važne samo promjene potencijalne energije, a one ne ovise o odabiru položaja za koji ćemo smatrati da mu je potencijalna energija jednaka nuli. Ako ipak odaberemo takav položaj, onda potencijalne energije u svim ostalim položajima određujemo u odnosu prema odabranom položaju.

Ovisnost potencijalne energije o udaljenosti od Zemlje prikazana je grafički na slici 5.8b. Na samoj površini Zemlje, ona ima negativnu vrijednost $-G\,(m_Z\,m)/r_Z$, a na većim udaljenostima raste prema nuli. Ovaj nam graf može poslužiti za ana-



Slika 5.8: (a) Zemlja i tijelo mase m na nekoj udaljenosti r od središta Zemlje. Pretpostavlja se da je Zemlja praktički nepokretna. Pomicanjem tijela od prvog do drugog položaja promijeni se potencijalna energija sustava Zemlje i tijela. (b) Ovisnost potencijalne energije o udaljenosti tijela od Zemlje uz odabir nulte energije u granici beskonačne udaljenosti. Naznačena je potencijalna energija u slučaju kada se tijelo nalazi na površini Zemlje ($r = r_Z$). Također je naznačena ukupna energija (potencijalna i kinetička) kada tijelo na površini Zemlje dobije neku početnu brzinu (vertikalni hitac), te način određivanja maksimalne udaljenosti r_{max} do koje tijelo može doći.

lizu problema vertikalnog hica. Ako tijelu dademo početnu brzinu v_0 uvis, ono će imati ukupnu energiju

$$E = E_P + E_K = -G\,\frac{m_Z\,m}{r_Z} + \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \tag{5.39}$$

Možemo imati tri različita slučaja. Ako je drugi član po iznosu manji od prvoga, ukupna energija je negativna. Takav je primjer označen crtkanom linijom na slici 5.8b. Gibanjem tijela uvis, gravitacijska sila vrši negativan rad i umanjuje kinetičku energiju tijela. No, taj isti rad uzet sa suprotnim predznakom predstavlja povećanje potencijalne energije, tako da se ukupna energija ne mijenja. Očito je da se tijelo može udaljiti od Zemlje samo toliko da njegova kinetička energija padne na nulu, a onda je u ukupnoj energiji opstala samo potencijalna

$$E = -G\,\frac{m_Z\,m}{r_{max}} \tag{5.40}$$

gdje r_{max} predstavlja maksimalnu udaljenost do koje je tijelo moglo doći u danome vertikalnom hicu. Ovu vrijednost lako možemo očitati na grafu iz slike 5.8b.

Što je početna kinetička energija veća, ukupna energija u jednadžbi (5.39) je bliža nuli, a time i maksimalna udaljenost r_{max} u jednadžbi (5.40) postaje veća. Granični slučaj se postiže kada je početna kinetička energija toliko velika da ukupna energija u jednadžbi (5.39) iščezava. Lako možemo izračunati da je za to potrebna početna brzina

$$v_0 = \sqrt{2\,G\,\frac{m_Z}{r_Z}} \approx 10^4\ \mathrm{ms}^{-1} \tag{5.41}$$

S tom početnom brzinom tijelo odlazi nepovratno sa Zemlje u beskonačnost, s time da mu kinetička energija teži prema nuli. Navedena početna brzina često se naziva *drugom svemirskom (kozmičkom) brzinom.*

Ako tijelo u početku dobije još veću kinetičku energiju, njegova će ukupna energija biti pozitivna. Takav je primjer također prikazan crtkanom linijom na slici 5.8b. Tijelo odlazi nepovratno u Svemir, ali čak i beskonačno daleko od Zemlje zadržava određenu kinetičku energiju.

Napomena: Opisani primjeri s drugom svemirskom brzinom i većim brzinama imaju za svrhu samo razviti teorijsko razumijevanje problema. U praksi nije moguće postići takve početne brzine ispaljivanjem projektila. Sve rakete zahtijevaju dodatni pogon nakon lansiranja.

Potencijalna energija blizu površine Zemlje

Često nam je potrebno razmatrati promjene potencijalne energije na visinama koje su mnogo manje od radijusa Zemlje. U tu svrhu izrazimo udaljenost tijela od središta Zemlje kao $r = r_Z + h$, pa razlika potencijalnih energija na visini h i na površini Zemlje ($h = 0$) iznosi

$$E_{Ph} - E_{P0} = -G\,\frac{m_Z\,m}{r_Z + h} + G\,\frac{m_Z\,m}{r_Z} \tag{5.42}$$

Za $h << r_Z$ vrijedi aproksimacija

$$\frac{1}{r_Z + h} = \frac{1}{r_Z\left(1 + \frac{h}{r_Z}\right)} \approx \frac{1}{r_Z}\left(1 - \frac{h}{r_Z}\right) \tag{5.43}$$

Stoga razliku energija iz jednadžbe (5.42) možemo izraziti

$$E_{Ph} - E_{P0} = G\,\frac{m_Z\,m}{r_Z^2}\,h \tag{5.44}$$

Razlika potencijalnih energija ovisi linearno o visini h. Ova linearizacija je posljedica malene promjene funkcije $1/r$ kod uvjeta $h << r_Z$, kao što je izraženo u jednadžbi (5.43).

Iz praktičnih razloga, zgodno nam je u ovim prilikama odabrati čvrsto tlo kao nultu točku u kojoj postavljamo $E_{P0} = 0$, pa potencijalnu energiju na raznim visinama određujemo u odnosu na tlo. U jednadžbi (5.44) možemo prepoznati gravitacijsku silu $F_g = G\,m_Z\,m/r_Z^2$, pa potencijalna energija na visini h glasi

$$E_P = F_g\,h = m\,g\,h \tag{5.45}$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada blizu površine Zemlje.

Izvedenu relaciju mogli smo dobiti i primjenom opće definicije za promjenu potencijalne energije

$$E_{Ph} - E_{P0} = -\int_0^h \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = F_g\,h \tag{5.46}$$

Sila $\vec{F}_g$ je unutarnja sila sustava Zemlje i tijela, a u malenom visinskom rasponu h ona je praktički konstantna, pa je integral jednostavno izračunati.

Kod praktično ostvarivog vertikalnog hica postiže se relativno malena visina h. Stoga vrijedi jednakost

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m\, g\, h \tag{5.47}$$

gdje je v_0 početna brzina. Tijelo dosegne visinu h koju možemo izračunati po gornjoj formuli, a zatim padne na tlo brzinom koja također ima iznos v_0, tj. vrati mu se cjelokupna prvobitna kinetička energija.

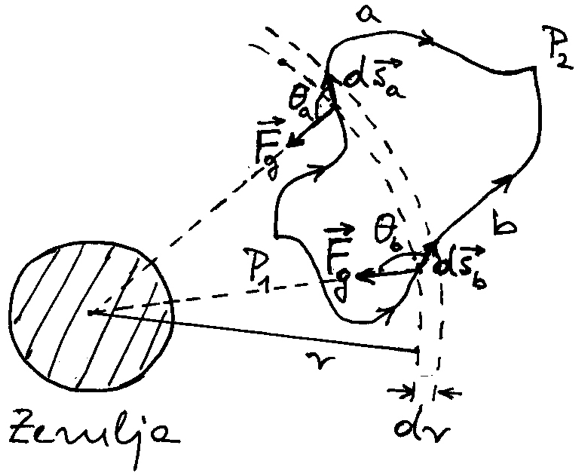
Napomena: Kinetičku energiju pripisujemo tijelu koje ima odgovarajuću brzinu. Međutim, potencijalnu energiju moramo pripisati sustavu Zemlje i tijela, a ne samo tijelu. Razlog zbog kojega se potencijalna energija $m\, g\, h$ praktički u cijelosti pretvori u kinetičku energiju tijela leži u ogromnoj masi Zemlje, koja se praktički ne pokrene.

5.3 Konzervativne i nekonzervativne sile

U prethodnom smo odjeljku vidjeli da u sustavima gdje djeluju unutarnje sile, poput elastične i gravitacijske, možemo pohraniti energiju koju je kasnije moguće iskoristiti za vršenje rada i pretvaranje u kinetičku energiju. U drugim pak slučajevima, kao kod sile trenja, takve mogućnosti nema. U ovome ćemo odjeljku pokazati da se razlike među dvjema vrstama sila mogu iskazati pomoću matematičkih formi.

5.3.1 Rad gravitacijske sile na različitim putovima

Razmotrimo općenitije kretanje nekog tijela u gravitacijskom polju Zemlje. Slika 5.9 prikazuje tijelo kojemu je zadan neki početni položaj u točki P_1 i neki konačni položaj u točki P_2. Na tijelo uvijek djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$, no pored nje djeluje i neka vanjska sila, koja se može mijenjati po iznosu i smjeru (nije prikazana na slici 5.9). Ukupna sila na tijelo određuje oblik putanje od početnog do konačnog položaja. Na slici 5.9 prikazane su kao primjer dvije putanje, nastale u slučajevima kada su djelovale različite vanjske sile.



Slika 5.9: Primjer dviju putanja a i b kojima se tijelo (čestica) može gibati od točke P_1 do točke P_2. Određena putanja se ostvaruje zbog djelovanja vanjske sile koja nije prikazana na slici. Rad gravitacijske sile $\vec{F}_g$ ne ovisi o putanji nego samo o krajnjim točkama.

Ovdje nas interesira samo djelovanje gravitacijske sile na putu od početnog do konačnog položaja tijela. Gravitacijska sila ima isti iznos u svim točkama na kružnici radijusa r koja je prikazana crtkanom linijom na slici 5.9. Uočimo točke na putanjama a i b koje leže na toj kružnici i razmotrimo infinitezimalne putove $d\vec{s}_a$ i $d\vec{s}_b$ koji vode do sjecišta s kružnicom radijusa $r + dr$, koja je također naznačena na slici 5.9. Rad gravitacijske sile na pojedinim infinitezimalnim putovima iznosi

$$dW_a = \vec{F}_g \cdot d\vec{s}_a = F_g\, ds_a\, \cos\theta_a = -F_g\, dr \tag{5.48}$$

$$dW_b = \vec{F}_g \cdot d\vec{s}_b = F_g\, ds_b\, \cos\theta_b = -F_g\, dr \tag{5.49}$$

gdje su θ_a i θ_b kutovi što ih infinitezimalni putovi čine s gravitacijskom silom na tome mjestu (slika 5.9). U oba slučaja dobije se ista vrijednost za izvršeni rad jer projekcije infinitezimalnih putova na radijalan smjer daju isti iznos dr.

Cijeli put od početnog do konačnog položaja možemo podijeliti na infinitezimalne segmente i zbrojiti izvršene radove, te dobiti

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s}}_{po\ putu\ (a)} = \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s}}_{po\ putu\ (b)} \qquad (5.50)$$

Dobili smo važan rezultat koji kaže da rad gravitacijske sile na putu od početnog do konačnog položaja ne ovisi o odabiru putanje.

Napomena: Kada bismo uvrstili analitički izraz za gravitacijsku silu, dobili bismo da rezultat integracije ovisi o veličinama r_1 i r_2 koje se odnose na početni i konačni položaj.

Zamislimo sada da se tijelo giba od početnog položaja putanjom a do konačnog položaja, a zatim se vrati u početni položaj po putanji b. Promjena smjera gibanja na putanji b mijenja predznak izvršenog rada gravitacijske sile (promijena smjera $d\vec{s}$), tako da je ukupni rad

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s}}_{po\ putu\ (a)} + \underbrace{\int_2^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{s}}_{po\ putu\ (b)} = 0 \qquad (5.51)$$

Ovaj rezultat pišemo sažeto

$$\oint_C \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (5.52)$$

Rad gravitacijske sile po zatvorenoj krivulji C iščezava. To je temeljno matematičko svojstvo *konzervativne sile*.

Konzervativne sile i mogućnost definiranja potencijalne energije

U prethodnim razmatranjima utvrdili smo da promjenu potencijalne energije možemo izraziti putem rada gravitacijske sile od početnog do konačnog položaja. Zatim smo utvrdili da rad ne ovisi o putanji kojom tijelo ide od početnog do konačnog položaja. Prema tome, ni promjena potencijalne energije ne može ovisiti o odabiru putanje, nego samo o početnom i konačnom položaju.

Ako tijelo napravi put po zatvorenoj krivulji i vrati se u početni položaj, rad gravitacijske sile jednak je nuli, pa nema ni promjene potencijalne energije. Ovaj zaključak je važan jer daje smisao potencijalnoj energiji. Ona je uvijek ista ako se tijelo nalazi na danome položaju, bez obzira na to kako je došlo u taj položaj, odnosno je li prethodno napravilo bilo kakve putove i vratilo se u dani položaj. Kažemo da je potencijalna energija *funkcija stanja* sustava.

Temeljem matematičke analogije, možemo zaključiti da za svaku konzervativnu silu u fizici možemo uvesti odgovarajuću potencijalnu energiju kao funkciju stanja.

Nekonzervativne sile

Primjer *nekonzervativne sile* je sila trenja jer njen rad na zatvorenoj krivulji ne iščezava

$$\oint_C \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s} \neq 0 \qquad (5.53)$$

Točnije, taj rad uvijek ima neku negativnu vrijednost jer sila trenja $\vec{F}_{tr}$ uvijek ima smjer suprotan infinitezimalnom putu $d\vec{s}$ koji tijelo prevaljuje.

Rad sile trenja ne možemo povezati izravno s nekom potencijalnom energijom. U razmatranju prirode sila u poglavlju 3, vidjeli smo da trenje nije jedna od osnovnih sila, nego se izvodi iz elektromagnetske koja uređuje odnose na razini atoma i molekula. Sila trenja je makroskopska veličina koja izražava učinak mnoštva mikroskopskih procesa. Stoga se njen rad sastoji u prijenosu energije na mnoštvo atoma i molekula, pa kažemo da je sila trenja *disipativna* (lat. *dissipatio - rasipanje*).

5.3.2 Gravitacijski potencijal

Gravitacijsku potencijalnu energiju pripisali smo sustavu dvaju tijela. Kao primjer smo uzimali Zemlju i neko tijelo, te smo izveli izraz u jednadžbi (5.38). Ekvivalentan izraz mogli bismo napisati za bilo koja dva tijela. Potencijalna energija uključuje mase obaju tijela, a može se mijenjati bilo pomicanjem jednoga ili drugoga tijela.

U poglavlju 3 razmatrali smo prirodu gravitacijske sile koja također ovisi o masama obaju tijela i uzajamnoj udaljenosti. Kao alternativni način izražavanja gravitacijskog međudjelovanja, uveli smo pojam gravitacijskog polja $\vec{g}(\vec{r})$ koje nastaje u svim točkama prostora oko tijela mase m, a ono zatim djeluje na neko probno tijelo mase m_0 silom $\vec{F}_g = m_0\, \vec{g}(\vec{r})$ (jednadžba (3.7)). Gravitacijsko polje $\vec{g}(\vec{r})$ ovisi samo o masi tijela koje ga stvara i o udaljenosti od njega, a ne ovisi o tome jesmo li u neku okolnu točku postavili drugo probno tijelo.

Na sličan način možemo uvesti pojam *gravitacijskog potencijala* U, koji nastaje u svim točkama prostora oko nekog tijela, te ovisi samo o masi m

toga tijela i udaljenosti od njega. Ako u njegovu okolinu dovedemo drugo (probno) tijelo mase m_0, sustav dvaju tijela imat će potencijalnu energiju

$$E_P = -G\,\frac{m\,m_0}{r} = m_0\,U \tag{5.54}$$

Iz ovog odnosa slijedi da je gravitacijski potencijal koji nastaje oko tijela mase m dan izrazom

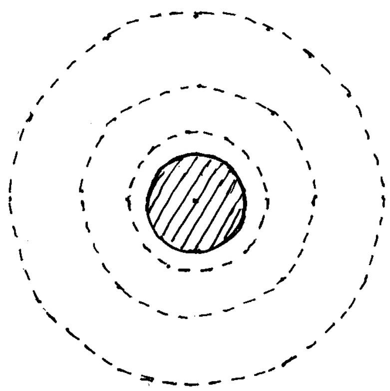
$$U = -G\,\frac{m}{r} \tag{5.55}$$

Valja imati na umu da ovaj izraz vrijedi za tijelo sa sfernom raspodjelom mase, a udaljenost r računa se od središta tijela do točke u kojoj se određuje potencijal.

Ekvipotencijalne plohe

Korisno je uvesti pojam *ekvipotencijalne plohe* u kojoj je potencijal jednak u svim njenim točkama. U slučaju koji opisuje jednadžba (5.55) ekvipotencijalne plohe su sfernog oblika.

Ako želimo slikovno prikazati promjene potencijala u prostoru, možemo nacrtati niz ekvipotencijalnih ploha koje se uzastopno razlikuju za isti (proizvoljno odabran) iznos ΔU (slika 5.10). Gustoća tako odabranih ekvipotencijalnih ploha odražava nam slikovito naglost promjene potencijala s udaljenošću od tijela.



Slika 5.10: Niz ekvipotencijalnih ploha oko homogenog sfernog tijela. Odabrana je neka stalna razlika potencijala ΔU između susjednih ploha.

Gradijent potencijala

Vidjeli smo da u prostoru oko nekog tijela nastaje gravitacijsko polje (vektorsko) i potencijal (skalarno polje). Postavlja se pitanje jesu li ta dva polja nekako povezana.

Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, uvedimo probno tijelo mase m_0 i prisjetimo se da njegovim infinitezimalnim pomicanjem mijenjamo potencijalnu energiju

$$dE_P = -\vec{F}_g \cdot d\vec{s} \tag{5.56}$$

Ako uvažimo jednadžbu (5.54), možemo reći da se potencijalna energija promijenila za dE_P zato što se probno tijelo mase m_0 pomaklo iz jedne točke u drugu, a razlika potencijala između tih točaka je dU ($dE_P = m_0\,dU$). S druge strane imamo $\vec{F}_g = m_0\,\vec{g}$, tako da jednadžbu (5.56) možemo svesti na

$$dU = -\vec{g} \cdot d\vec{s} \tag{5.57}$$

Dobili smo važnu jednadžbu koja povezuje gravitacijsko polje i promjenu potencijala. Možemo je interpretirati na sljedeći način. Ako nam je poznato gravitacijsko polje u nekoj točki prostora, možemo putem jednadžbe (5.57) odrediti za koliko se promijeni potencijal ako se iz te točke pomaknemo za $d\vec{s}$ u susjednu točku.

Odnos između gravitacijskog polja i potencijala možemo izraziti i na alternativni način. U tu svrhu poslužimo se poznatim matematičkim postupkom određivanja totalnog diferencijala fukcije $U(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz \tag{5.58}$$

Također napišimo vektore $\vec{g}$ i $d\vec{s}$ u kartezijevim komponentama, pa za njihov skalarni produkt dobivamo

$$\vec{g} \cdot d\vec{s} = g_x\,dx + g_y\,dy + g_z\,dz \tag{5.59}$$

Uvrštavanjem izraza (5.58) i (5.59) u jednadžbu (5.57) nalazimo odnose

$$g_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\,, \quad g_y = -\frac{\partial U}{\partial y}\,, \quad g_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{5.60}$$

Svaka od ovih jednadžbi nam kaže da je komponenta gravitacijskog polja duž neke osi jednaka po

iznosu parcijalnoj derivaciji (naglosti promjene) potencijala duž te osi. Negativan predznak znači da komponenta gravitacijskog polja ima smjer suprotan od onoga duž kojega potencijal raste. Ako npr. potencijal raste duž pozitivnog smjera osi x (pozitivna parcijalna derivacija), gravitacijsko polje će imati komponentu duž negativnog smjera osi x. Isto vrijedi i za ostale osi.

Dakle, ako poznamo skalarnu funkciju potencijala $U(x, y, z)$, mogli bismo odrediti njene parcijalne derivacije u bilo kojoj točki prostora i time dobiti komponente vektora gravitacijskog polja u toj točki. Dobiveni rezutat možemo napisati u kompaktnoj formi ako uvedemo matematički *operator gradijenta*, koji označavamo kratko *"grad"* ili simbolom $\vec{\nabla}$ (čita se *"nabla"*), a definira se izrazom

$$grad = \vec{\nabla} = \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5.61)$$

Ako operator gradijenta djeluje na skalarnu funkciju $U(x, y, z)$, dobivamo jednostavno

$$grad\, U = \vec{\nabla} U = \hat{\imath}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (5.62)$$

Stoga umjesto tri jednadžbe (5.60), možemo napisati sažeto jednu vektorsku jednadžbu

$$\vec{g} = -grad\, U = -\vec{\nabla} U \qquad (5.63)$$

Ova jednadžba kaže da vektor gravitacijskog polja u nekoj točki ima smjer duž kojega potencijal najbrže pada (predznak minus). Iznos vektora gravitacijskog polja ovisi o naglosti promjene potencijala u okolini točke promatranja.

Korisno je razmotriti odnos između gravitacijskog polja i ekvipotencijalnih ploha. Ako od neke točke promatranja napravimo pomak u blisku točku na istoj ekvipotencijalnoj plohi, ostali smo na istome potencijalu. Najbržu promjenu potencijala očekujemo kod pomaka od točke promatranja okomito na ekvipotencijalnu plohu, pa bi u tom smjeru moralo biti i gravitacijsko polje. Drugim riječima, gravitacijsko polje u nekoj točki uvijek je okomito na potencijalnu plohu koja prolazi tom točkom.

Da bismo dodatno ilustrirali odnos gravitacijskog polja i potencijala, uzmimo tijelo mase m i postavimo ishodište koordinatnog sustava u njegovo središte kako prikazuje slika 5.11. Odaberimo jednu ekvipotencijalnu plohu radijusa r, a na njoj točku promatranja $P(0, 0, z)$, gdje je $z = r$. U točki P parcijalne derivacije funkcije $U(x, y, z)$ duž osi x i y iščezavaju jer su to smjerovi tangencijalni na ekvipotencijalnu plohu

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{x=0} = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = 0 \qquad (5.64)$$

Stoga gravitacijsko polje u točki P nema komponente duž osi x i y, tj. $g_x = 0$ i $g_y = 0$. Jedina komponenta koju ima gravitacijsko polje u točki P je ona duž osi z. Naime, duž osi z gravitacijski potencijal se mijenja sukladno jednadžbi (5.55)

$$U(0, 0, z) = -G\,\frac{m}{z} \qquad (5.65)$$

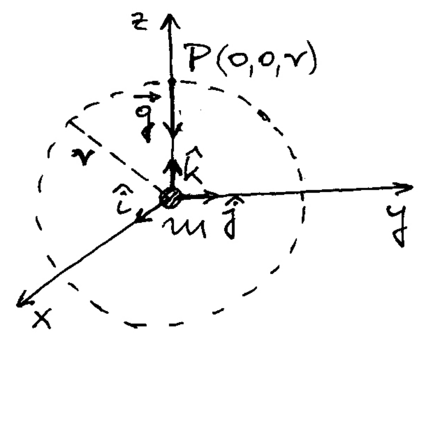
tako da parcijalna derivacija duž osi z, uzeta u točki $z = r$, iznosi

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{z=r} = G\,\frac{m}{r^2} \qquad (5.66)$$

Konačno, prema jednadžbama (5.57) i (5.63), gravitacijsko polje u točki P iznosi

$$\vec{g} = -G\,\frac{m}{r^2}\,\hat{k} \qquad (5.67)$$

Dobili smo izraz za gravitacijsko polje koji pokazuje da je ono okomito na ekvipotencijalnu plohu



Slika 5.11: Ishodište koordinatnog sustava postavljeno je u središte tijela mase m. Crtkana linija opisuje ekvipotencijalnu plohu. Odabrana je točka P za izračunavanje gravitacijskih veličina.

u točki P, te da pokazuje smjer najbržeg padanja gravitacijskog potencijala.

U zaključku možemo reći da su jednadžbe (5.57) i (5.63) komplementarne i podjednako važne. One pokazuju da su vektorsko gravitacijsko polje $\vec{g}(\vec{r})$ i skalarni gravitacijski potencijal $U(\vec{r})$ uzajamno povezani. Ako su nam poznate vrijednosti jedne od tih veličina u svim točkama nekog prostora, možemo odgovarajućom jednadžbom utvrditi vrijednosti druge veličine u tim istim točkama prostora.

Princip superpozicije za gravitacijski potencijal

Princip superpozicije za gravitacijski potencijal srodan je principu superpozicije za gravitacijsko polje koji smo upoznali u poglavlju 3. Svako tijelo stvara u okolnom prostoru gravitacijsko polje i gravitacijski potencijal. Ako ima više tijela u nekom prostoru, svako od njih stvara gravitacijsko polje i potencijal kao da onih drugih tijela i nema. Stoga u bilo kojoj točki promatranja moramo vektorski zbrojiti gravitacijska polja koja stvaraju pojedina tijela i tako dobiti ukupno gravitacijsko polje u toj točki. Isto tako, moramo zbrojiti gravitacijske potencijale koje stvaraju pojedina tijela u nekoj točki promatranja i dobiti ukupni gravitacijski potencijal u toj točki.

Rekapitulacija integrala gravitacijskog polja

Ovdje je prilika da se rekapitliraju dva temeljna integrala gravitacijskog polja. Prvi integral smo upoznali u poglavlju 3 pod nazivom Gaussova zakona

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi G\, m \qquad (5.68)$$

gdje je masa m sadržana unutar zatvorene plohe S po kojoj se obavlja integracija. Ovaj integral kazuje da je masa m uzrok postojanja gravitacijskog polja, te da gravitacijske silnice imaju smjer prema masi kao da poniru u njoj.

Drugi integral slijedi iz svojstva konzervativne sile izraženog jednadžbom (5.52) uz uvažavanje odnosa $\vec{F}_g = m_0\, \vec{g}$

$$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (5.69)$$

Ova jednadžba kaže da *linijski integral* gravitacijskog polja po zatvorenoj krivulji C isčezava.

Napomena: Skalarni produkt $\vec{g} \cdot d\vec{s}$ ne predstavlja rad, pa se koristi matematički izraz *linijski integral.*

U fizici se definiraju i druga vektorska polja, npr. električno i magnetsko polje. Osnovna svojstva svakog od tih vektorskih polja mogu se izraziti putem dvaju temeljnih integrala. Jedan od njih je integral po zatvorenoj plohi, a drugi je linijski integral po zatvorenoj krivulji. O svojstvima električnog i magnetskog polja ne ćemo se baviti u ovoj knjizi.

5.4 Opći pojam energije

Pojam kinetičke energije uveli smo razmatrajući rad neke sile koja djeluje na slobodno tijelo duž nekog puta. U daljnjem smo razmatranju ustanovili da u nekim sustavima možemo pohraniti energiju, koja se kasnije može vratiti u kinetičku. Time je pojam energije proširen na potencijalnu energiju. Uvjet za pojavljivanje potencijalne energije je postojanje unutarnjih sila u sustavu koje imaju svojstvo konzervativnosti. Kinetičku i potencijalnu energiju, koju smo ovdje obrađivali, često obuhvaćamo zajedničkim nazivom *mehanička energija.*

Sile trenja između tijela i podloge po kojoj se ono giba možemo također smatrati unutarnjim silama ako tijelo i podlogu promatramo kao jedan sustav. Međutim, sila trenja nije konzervativna, pa ne nastaje potencijalna energija koja bi se mogla nanovo pretvoriti u kinetičku energiju tijela. Kod trenja se radi o procesima u koje su uključeni individualni atomi i molekule u dodirnim plohama tijela i podloge, a oni se razmatraju u termodinamici te se govori o *toplinskoj energiji.* Proučavanje toplinskih procesa ne spada u okvire ove knjige, pa ćemo ovdje samo ustvrditi da se rad sile trenja pretvara u toplinsku energiju.

U mnogim mehaničkim sustavima rad dobivamo iz strojeva. Potrebno je poznavati druga područja fizike da bi se uvidjelo kako mehanički rad stroja dobivamo na račun nekog drugog oblika energije. Kod električnih strojeva, rad dobivamo iz električne energije, koja je pak prethodno stvorena nekim mehaničkim radom u elektranama.

I toplinska energija može uz određene uvjete biti iskorištena za dobivanje mehaničkog rada. Toplin-

sku energiju najčešće dobivamo izgaranjem nekih spojeva (ugljen, nafta, benzin, plin, itd.). Radi se o kemijskoj energiji koja svoje temelje vuče iz sila među električnim nabojima u atomima i molekulama.

U nuklearnim se elektranama najprije iz nuklearne energije dobiva toplinska, a zatim se ova koristi za mehanički rad, kojim se onda stvara električna energija.

Konačno, ne smijemo zaboraviti ni rad čovjeka koji se izvodi djelovanjem mišića. I za taj je rad potrebna neka energija, koja pak nastaje složenim procesom metabolizma u ljudskom tijelu.

Ove kratke napomene mogu nam poslužiti da zaključimo kako je pojam energije raširen u svim područjima fizike. Energija je zacijelo jedna od temeljnih veličina u fizici.

5.5 Snaga

Kada je neki stroj namijenjen za vršenje rada važno nam je znati u kojem vremenu je stroj u stanju izvršiti određenu količinu rada. Zato je korisno uvesti pojam *snage* kao omjera izvršenog rada i vremenskog intarvala u kojemu je taj rad izvršen. Trenutna snaga se definira omjerom

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{5.70}$$

Razumije se, snaga stroja može se mijenjati tijekom vremena, pa se prema potrebi može uvesti i prosječna snaga u nekom intervalu vremena.

Budući da je rad definiran kao djelovanje sile na putu $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, možemo jednadbu (5.70) preinačiti u oblik

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{5.71}$$

Dobili smo da je trenutna snaga jednaka produktu sile i trenutne brzine tijela na koje ta sila djeluje.

Napomena: U prvi mah može nas iznenaditi da snaga ovisi o brzini tijela. No, moramo shvatiti da o trenutnoj brzini ovisi koliki će put tijelo prevaliti u intervalu vremena dt, a sila djeluje upravo na tom putu, pa o tome ovisi i izvršeni rad.

Jedinica za snagu. Jedinica za snagu nosi posebno ime vat (1 W) u čast engleskog izumitelja Jamesa Watta koji je unaprijedio rad parnih strojeva (19. st.). Iz definicijske jednadžbe (5.70) slijedi da je 1 W = 1 J s^{-1}. Stroj koji može izvršiti rad od jednog džula u jednoj sekundi ima snagu jednog vata.

Kod kružnog se gibanja rad može izraziti i pomoću kutnih veličina kao $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$ (jednadžba (5.16)), tako da je trentna snaga

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \tag{5.72}$$

Trenutna snaga jednaka je produktu momenta sile i kutne brzine tijela koje se giba po kružnici, a na kojega djeluje navedeni moment sile.

Snaga i zakretni moment automobila u vožnji

Za vožnju stalnom brzinom po horizontalnoj ravnoj cesti, automobil mora svladavati određenu silu otpora zraka i trenja kotrljanja kotača po cesti (v. odjeljak 3.4). Time se obavlja neki rad u jedinici vremena, pa se troši odgovarajuća snaga, koju možemo izraziti produktom momenta sile $\vec{M}$ (u automobilskoj literaturi se često naziva *zakretni moment*) kojim pogonska osovina djeluje na kotače i kutne brzine kotača $\vec{\omega}$. Potrebna se snaga dobiva iz količine goriva koje motor uzima i troši u jedinici vremena, a to regulira vozač automobila putem nožne papučice za gorivo.

Ako želimo povećati brzinu automobila, potrebno je povećati moment sile (zakretni moment) kako bi kotači dobili kutnu akceleraciju $\vec{\alpha}$. Stiskanjem nožne papučice za gorivo poveća se dotok goriva u motor, pa se poveća snaga P koja uz neku trenutnu kutnu brzinu $\vec{\omega}$ ostvaruje veći $\vec{M}$, sukladno jednadžbi (5.72).

Maksimalan moment sile (zakretni moment) koji automobilski motor može dati ovisi o brzini okretanja (broj okretaja u minuti) radilice. Ta funkcionalna ovisnost predstavlja jednu od bitnih karakteristika nekog modela automobila.

Poglavlje 6

ZAKONI OČUVANJA U IZOLIRANOM SUSTAVU

U praksi se često događa da nekoliko tijela uzajamno djeluju jedno na drugo mnogo snažnije nego što na njih djeluju druga okolna tijela. Teorijsko razmatranje možemo provesti na idealiziranoj situaciji u kojoj se djelovanje okoline može potpuno zanemariti, pa promatrana tijela nazivamo *izoliranim sustavom.*

U ovome ćemo poglavlju pokazati da u izoliranom sustavu tijela dolazi do prijenosa količine gibanja s jednog tijela na drugo tako da se ukupna (zbrojena) količina gibanja ne mijenja. To nazivamo *zakonom očuvanja količine gibanja.* Također ćemo pokazati da se u izoliranom sustavu tijela, energija može izmjenjivati među tijelima, te može prelaziti iz jednog oblika energije u drugi, ali *ukupna energija u sustavu ostaje očuvana.* Zakoni očuvanja imaju važnu ulogu u fizici. Često nam mogu poslužiti da bismo provjerili, bez opsežnog računanja, je li neki zamišljeni ishod fizikalnog procesa moguć, ili nije. U nekim prilikama, moguće je dobiti potpuno rješenje problema već samom primjenom zakona očuvanja.

6.1 Zakon očuvanja ukupne količine gibanja

Već smo ranije isticali da su Newtonovi zakoni gibanja aksiomi, koji su dostatni za opis svih procesa u mehanici. Ostala pravila, koja nekad također nazivamo zakonima, moguće je izvesti iz Newtonovih zakona. Tako i zakon očuvanja ukupne količine gibanja u izoliranom sustavu ne predstavlja dodatno neovisno pravilo u mehanici, ali je veoma koristan jer je njegova formulacija matematički jednostavna i pogodna za primjenu.

Izvod zakona očuvanja ukupne količine gibanja provest ćemo najprije na primjeru dvaju tijela koja čine izoliran sustav, a zatim ćemo izvod poopćiti na izoliran sustav s većim brojem tijela.

6.1.1 Izoliran sustav dvaju tijela

Zamislimo dva tijela A i B koja se uzajamno privlače kako prikazuje slika 6.1a. Priroda privlačnih sila može biti različita u konkretnim situacijama koje ćemo kasnije navoditi kao primjere. Za sada je važno istaknuti da u svakom slučaju sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ predstavljaju unutarnje sile sustava i za njih vrijedi treći Newtonov zakon

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{6.1}$$

U realnoj situaciji uvijek postoje i neka okolna tijela. Međutim, ako je djelovanje okolnih tijela na tijela A i B zanemarivo prema silama $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$, možemo napraviti idealizaciju u kojoj zamišljamo kao da okolnih tijela i nema (slika 6.1a), pa se tijela A i B mogu slobodno gibati pod isključivim utjecajem sila $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$.

Neka su promatrana tijela imala u nekom trenutku t količine gibanja $\vec{p}_A$ i $\vec{p}_B$. Zbog djelovanja sile na pojedino tijelo, njegova se količina gibanja promijeni sukladno drugome Newtonovu zakonu

$$d\vec{p}_A = \vec{F}_{BA}\, dt \tag{6.2}$$
$$d\vec{p}_B = \vec{F}_{AB}\, dt \tag{6.3}$$

Zbog trećeg Newtonova zakona izraženog jednadžbom (6.1), vrijedi odnos

$$d\vec{p}_A = -d\vec{p}_B \tag{6.4}$$

Ovaj nam rezultat kaže da je promjena količine gibanja jednog tijela jednaka po iznosu, ali suprotnog smjera od promjene količine gibanja drugog tijela.

Količina gibanja je veličina koja se pripisuje jednom tijelu. Međutim, u razmatranju sustava tijela korisno je na formalan način uvesti *ukupnu količinu gibanja* $\vec{p}_{uk}$ kao vektorski zbroj količina gibanja pojedinih tijela. U slučaju sustava tijela A i B, koji ovdje razmatramo, ukupna količina gibanja u trenutku t iznosi

$$\vec{p}_{uk} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \tag{6.5}$$

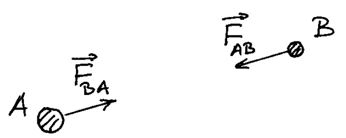
Nakon vremenskog intervala dt, tj. u trenutku $t + dt$, tijela imaju izmijenjene količine gibanja $\vec{p}_A^{\,'} = \vec{p}_A + d\vec{p}_A$ i $\vec{p}_B^{\,'} = \vec{p}_B + d\vec{p}_B$, tako da je ukupna količina gibanja sustava

$$\begin{aligned} \vec{p}_{uk}^{\,'} = \vec{p}_A^{\,'} + \vec{p}_B^{\,'} &= \vec{p}_A + d\vec{p}_A + \vec{p}_B + d\vec{p}_B \\ &= \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_{uk} \end{aligned} \tag{6.6}$$

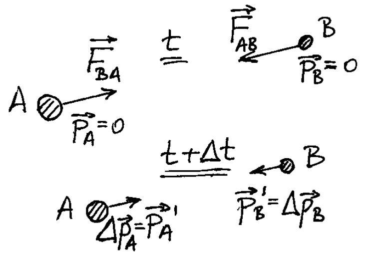
gdje je uvažena jednadžba (6.4). Uslijed djelovanja unutarnjih sila sustava, količine gibanja pojedinih tijela se promijene, no kako su te promjene jednake po iznosu i suprotnoga smjera, ukupna količina gibanja sustava se ne promijeni.

Do istog smo rezultata mogli doći formalnom preinakom jednadžbe (6.4)

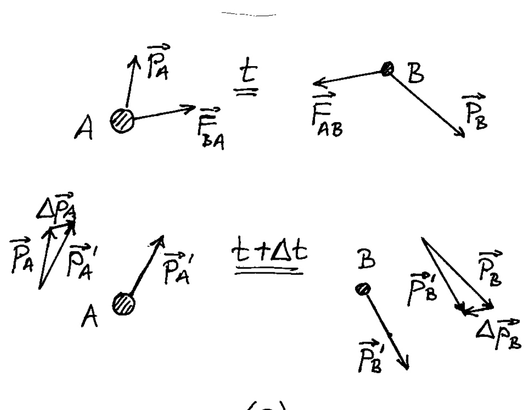
$$d\vec{p}_A + d\vec{p}_B = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right) = 0 \tag{6.7}$$



(a)



(b)



(c)

Slika 6.1: (a) Tijela A i B između kojih djeluju sile privlačenja. (b) U trenutku t tijela A i B su mirovala (iščezavajuće količine gibanja), a nakon intervala vremena Δt stječu količine gibanja koje su jednake po iznosu, ali suprotnog smjera. (c) Tijela su imala neke količine gibanja u trenutku t, na koja se nakon intervala vremena Δt pribrajaju promjene količine gibanja koje su jednake po iznosu ali suprotnih smjerova (pomoćni crteži s obje strane).

što za ukupnu količinu gibanja sustava znači

$$d\vec{p}_{uk} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_{uk} = konst. \tag{6.8}$$

Nema promjene ukupne količine gibanja, što znači da je ona konstantna.

Na slikama 6.1b i 6.1c prikazane su različite situacije za primjenu zakona očuvanja količine gibanja. Ako su u trenutku t oba tijela mirovala (slika 6.1b), njihove će količine gibanja u trenutku $t+\Delta t$ biti jednake po iznosu i suprotnoga smjera, tj. $\vec{p}_A^{\,'} = -\vec{p}_B^{\,'}$. Međutim, možemo imati slučaj u kojemu su tijela imala neke proizvoljne količine gibanja $\vec{p}_A$ i $\vec{p}_B$ u trenutku t, kao što to prikazuje slika 6.1c. Na pomoćnim crtežima prikazan je postupak dobivanja novih količina gibanja nakon intervala vremena Δt. Promjene količine gibanja svakog tijela jednake su po iznosu i suprotnoga smjera, tj. $\Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B$. Nove količine gibanja tijela $\vec{p}_A^{\,'}$ i $\vec{p}_B^{\,'}$ ne moraju biti ni jednake ni suprotnoga smjera, ali je njihov zbroj $\vec{p}_{uk}^{\,'}$ jednak prijašnjoj ukupnoj količini gibanja $\vec{p}_{uk}$.

Razdvajanje zbog djelovanja unutarnjih sila

Zgodne primjere za primjenu zakona očuvanja količine gibanja nalazimo u slučajevima kada se

neko složeno tijelo razdvaja zbog djelovanja unutarnjih sila. Kao prvi primjer, razmotrimo čovjeka koji stoji na kolicima, a ona miruju na površini Zemlje. Dok je tako, količine gibanja čovjeka i kolica iščezavaju ($\vec{p}_A = \vec{p}_B = 0$). Ako u trenutku t čovjek odluči odskočiti s kolica nekamo u dalj, mora se uporabom nožnih mišića otisnuti od kolica. Uz pretpostavku da njegova stopala ne proklizavaju po kolicima, nastaju unutarnje sile $\vec{F}_{AB}$ (čovjek djeluje na kolica) i $\vec{F}_{BA}$ (kolica djeluju na čovjeka), tako da se količine gibanja čovjeka i tijela mijenjaju. Ako se proces razdvajanja odvijao u intervalu vremena Δt, čovjek je poprimio količinu gibanja

$$\vec{p}_A^{\,'} = \int_t^{t+\Delta t} d\vec{p}_A = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{BA} dt \qquad (6.9)$$

a kolica su poprimila količinu gibanja

$$\vec{p}_B^{\,'} = \int_t^{t+\Delta t} d\vec{p}_B = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{AB} dt \qquad (6.10)$$

Unutarnje sile ne moraju cijelo vrijeme razdvajanja Δt biti konstantne, ali su promjene u svakom intervalu dt jednake po iznosu i suprotnog smjera, tako da na kraju dobivamo

$$\vec{p}_A^{\,'} + \vec{p}_B^{\,'} = 0 \qquad (6.11)$$

Ovu jednadžbu možemo zapisati pomoću masa i brzina pojedinih tijela

$$m_A \vec{v}_A^{\,'} + m_B \vec{v}_B^{\,'} = 0 \qquad (6.12)$$

Brzine čovjeka i kolica nakon razdvajanja ovise o omjeru njihovih masa tako da bude zadovoljena gornja jednadžba. Od kolica velike mase, čovjek može odskočiti nekamo u dalj, dok će u slučaju laganih kolica, ona biti odgurnuta većom brzinom, a čovjek će praktički ostati na istome mjestu.

Isto pravilo vrijedi kod razdvajanja nekog tijela na dva dijela uslijed unutarnje eksplozije. Kod ispaljivanja npr. puščanog zrna ili topničke granate, izgaranje eksploziva stvara unutarnje sile koje potiskuje projektil na jednu stranu, a ostatak tijela (pušku ili top) na suprotnu stranu.

Napomena: Nakon razdvajanja tijela ne djeluju više unutarnje sile. U idealnim uvjetima, tijela bi zadržala stečene količine gibanja, odnosno brzine. U realnim situacijama, na tijela djeluju druge vanjske sile, pa se njihove količine gibanja stoga mijenjaju. Na kolica u gibanju djeluje trenje kotrljanja uslijed kojega se ona zaustavljaju. Na čovjeka pak djeluje gravitacijska sila uslijed koje se spusti na tlo.

Približavanje zbog djelovanja unutarnjih sila

Kao primjer približavanja dvaju tijela uslijed djelovanja unutarnjih sila mogli bismo navesti idealizirani slučaj dvoje ljudi koji se nalaze na glatkom ledu bez trenja i vuku se uzajamno pomoću konopca. Napetost konopca djeluje na oba čovjeka, te predstavlja unutarnje sile sustava. Stoga za taj sustav vrijedi zakon očuvanja ukupne količine gibanja izražen jednadžbom (6.8).

Kao drugi primjer, mogli bismo zamisliti dva tijela vezana na krajeve rastegnute opruge, a sve skupa na idealiziranoj podlozi bez trenja. Nakon puštanja tijela, nastalo bi njihovo približavanje zbog elastičnih sila opruge koje djeluju kao unutarnje sile sustava. Ako zanemarimo masu opruge prema masama tijela, mogli bismo jednostavno primijeniti zakon očuvanja ukupne količine gibanja.

Prethodna dva primjera možemo zamisliti, no teško ih je u praksi ostvariti. Zato možemo iz svakidašnje prakse navesti slobodan pad tijela. Gravitacijsko privlačenje Zemlje i tijela daje par unutarnjih sila. Ako Zemlju i tijelo u slobodnom padu promatramo kao izolirani sustav, možemo na njega primijeniti zakon očuvanja ukupne količine gibanja. No, zbog ogromne mase Zemlje, njena brzina ostane zanemariva dok tijelo ubrzano pada na tlo. Ovaj smo proces već razmatrali u odjeljku 2.4 kao izravnu primjenu Newtonovih zakona.

Zakon očuvanja količine gibanja mogli bismo općenito primijeniti na bilo koja dva tijela kod kojih uzajamno gravitacijsko djelovanje uvelike nadvladava ostale sile na tijela. Na isti način, uzajamno električno ili magnetsko djelovanje dvaju tijela predstavlja unutarnje sile sustava, pa vrijedi zakon očuvanja količine gibanja.

Sraz tijela

Poseban slučaj predstavlja sraz dvaju tijela. Obično smatramo da prije dodira tijela nema uzajamnog djelovanja, tj. nema unutarnjih sila. To je, razumije se, aproksimacija jer gravitacijsko privlačenje neizbježno postoji između bilo koja

dva tijela, ali je ta sila zanemariva u praktičnim slučajevima kada niti jedno od dvaju tijela nema jako veliku (uistinu ogromnu) masu. Tek dodirom tijela u srazu nastaju deformacije uz koje se nužno javljaju unutarnje sile. One mijenjaju količinu gibanja svakog pojedinog tijela, ali ukupna količina gibanja ostaje očuvana. O srazu ćemo mnogo detaljnije govoriti u odjeljku 6.4.

6.1.2 Poopćenje na sustav više tijela

Zakon očuvanja ukupne količine gibanja možemo lako poopćiti na izoliran sustav koji se sastoji od proizvoljnog broja tijela. Razmatrajući pojedine parove tijela između kojih postoje neke uzajamne sile, možemo zaključiti da uslijed tog međudjelovanja dolazi do prijenosa količine gibanja s jednog tijela na drugo tako da se vektorski zbroj njihovih količina gibanja ne mijenja. Budući da ovo pravilo vrijedi za sve parove koje možemo raznim kombinacijama napraviti u sustavu tijela, rezultat mora biti takav da ukupna količina gibanja svih tijela ostaje konstantnom.

Pored gore iznesenog fizikalnog zaključivanja, korisno je provesti dokaz koristeći se formalizmom Newtonovih zakona i matematičkih operacija. Označimo tijela indeksima 1, 2, ... , N. Infinitezimalna promjena količine gibanja svakog pojedinog tijela ovisi o ukupnoj sili koja djeluje na to tijelo, a ona je jednaka vektorskom zbroju sila kojima sva druga tijela u sustavu djeluju na promatrano tijelo.

$$\begin{aligned}
d\vec{p}_1 &= \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + ...\right) dt = \sum_{i\neq 1} \vec{F}_{i1} dt \\
d\vec{p}_2 &= \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + ...\right) dt = \sum_{i\neq 2} \vec{F}_{i2} dt \\
.... &= .... \\
d\vec{p}_n &= \left(\vec{F}_{1n} + ... + \vec{F}_{mn} + ...\right) dt = \sum_{i\neq n} \vec{F}_{in} dt \\
.... &= .... \\
d\vec{p}_m &= \left(\vec{F}_{1m} + ... + \vec{F}_{nm} + ...\right) dt = \sum_{i\neq m} \vec{F}_{im} dt \\
.... &= .... \\
d\vec{p}_N &= \left(\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ...\right) dt = \sum_{i\neq N} \vec{F}_{iN} dt \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Ako formalno matematički zbrojimo promjene količine gibanja svih tijela u sustavu, dobivamo

$$d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 + ... + d\vec{p}_N = 0 \qquad (6.14)$$

Naime, u sumiranju se pojavljuju parovi sila iz trećeg Newtonova zakona, npr. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, ili općenito $\vec{F}_{mn} + \vec{F}_{nm} = 0$, koji ispunjavaju sve mogućnosti za sile, tako da ukupan rezultat iščezava. Ovaj postupak zbrajanja vektora je matematički ispravan, no zahtijeva fizikalni komentar. Naučili smo još u 2. poglavlju da nije smisleno zbrajati sile koje djeluju na različita tijela jer se ne može utvrditi kojemu bi tijelu rezultanta davala akceleraciju. Tako se ni sile akcije i reakcije iz trećega Newtonova zakona ne smiju zbrajati jer djeluju na različita tijela.

Na cijeli postupak treba gledati s fizikalne strane. Ovdje moramo uočiti da $\vec{F}_{mn}dt$ daje promjenu količine gibanja n-tog tijela zbog djelovanja m-tog tijela na njega, a $\vec{F}_{nm}dt$ se odnosi na m-to tijelo budući da na njega silom reakcije djeluje n-to tijelo. Tako uzrokovane promjene količine gibanja su jednake po iznosu, ali suprotnih smjerova. Stoga njihov vektorski zbroj iščezava.

Napomena: Kako pokazuje jednadžba (6.13), promjena količine gibanja nekog tijela ne ovisi samo o međudjelovanju s *jednim* od ostalih tijela u sustavu. Zbog toga ne možemo reći da je $d\vec{p}_n$ jednak po iznosu i suprotnog smjera od $d\vec{p}_m$, te da njihov zbroj iščezava. Tek ukupan zbroj promjena količina gibanja svih tijela iščezava, kako navodi jednadžba (6.14)

Zakon očuvanja ukupne količine gibanja slijedi iz jednadžbe (6.14)

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N = konst. \qquad (6.15)$$

Možemo reći da se zbog uzajamnih djelovanja tijela u sustavu, količina gibanja prenosi s jednog tijela na druga tijela u sustavu, s time da se ukupna količina gibanja ne mijenja. To svojstvo ne ovisi o prirodi uzajamnih sila među tijelima, niti o vremenskoj ovisnosti tih sila. Stoga zakon o očuvanju količine gibanja predstavlja jednostavno, ali i veoma moćno, sredstvo u rješavanju mnogih problema.

6.2 Zakon očuvanja ukupne energije

Razmotrimo iznova sustav dvaju tijela A i B koji uzajamno djeluju silama $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$, dok je djelovanje s okolinom zanemarivo. Radi se, dakle, o



Slika 6.2: Uslijed privlačnih sila između dva tijela dolazi do njihovih pomaka u smjeru djelovanja dotične sile. Svaka sila obavlja pozitivan rad, pa se ukupna kinetička energija sustava povećava.

izoliranom sustavu dvaju tijela kako prikazuje slika 6.2. Neka u početnom trenutku tijela miruju, a zatim pustimo da djeluju privlačne sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$. U prethodnom smo odjeljku razmatrali promjene količine gibanja tijela, a sada usmjerimo pažnju na promjene kinetičkih energija. U intervalu vremena dt tijela naprave pomake $d\vec{s}_A$ i $d\vec{s}_B$, kako prikazuje slika 6.2, pa svako od tijela promijeni svoju kinetičku energiju

$$dE_{KA} = \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{s}_A \tag{6.16}$$

$$dE_{KB} = \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s}_B \tag{6.17}$$

Iako za sile vrijedi $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$, promjene kinetičkih energija nisu suprotnih predznaka, kao što je to bio slučaj s promjenama količina gibanja u jednadžbi (6.4). Naime, ovdje se sile množe s pomacima $d\vec{s}_A$, odnosno $d\vec{s}_B$, koji imaju suprotne smjerove (slika 6.2), pa su promjene kinetičke energije za oba tijela istoga predznaka. U ovome slučaju, kinetička energija svakog tijela poraste uslijed djelovanja unutarnje sile na to tijelo. Ako bismo promatrali zbroj kinetičkih energija dvaju tijela, morali bismo utvrditi da ukupna kinetička energija nije konstantna u vremenu, tj. ne može se postaviti bilo kakav zakon o očuvanju ukupne kinetičke energije.

U prethodnom smo poglavlju uveli pojam potencijalne energije, na koji se možemo sada pozvati. Ako pretpostavimo da su unutarnje sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ konzervativne (npr. gravitacijske), njihov rad uzet s negativnim predznakom predstavlja promjenu potencijalne energije sustava tih dvaju tijela

$$dE_P = -\vec{F}_{BA} \cdot d\vec{s}_A - \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s}_B \tag{6.18}$$

gdje su uzeti u obzir pomaci obaju tijela. Svaki od njih dovodi do promjene potencijalne energije sustava. Usporedbom prethodnih jednadžbi nalazimo općenito pravilo

$$dE_P + dE_{KA} + dE_{KB} = 0 \tag{6.19}$$

iz kojeg slijedi

$$E_P + E_{KA} + E_{KB} = konst. \tag{6.20}$$

Dobili smo zakon o očuvanju *mehaničke energije* u izoliranom sustavu, koji možemo poopćiti na bilo koji broj tijela. Mehanička energija se sastoji od potencijalne energije sustava i zbroja kinetičkih energija svih tijela u sustavu. Dakle, uslijed djelovanja unutarnjih konzervativnih sila u sustavu, mogu se mijenjati kinetičke energije pojedinih tijela, kao i potencijalna energija sustava, no tako da ukupna mehanička energija sustava ostaje konstantna.

Opći zakon očuvanja energije

Po uzoru na mehaničku energiju, uvedene su u fizici i druge vrste energija (električna, magnetska, nuklearna, toplinska) u ovisnosti o prirodi sila u sustavu. Definicije tih vrsta energija uvedene su na takav način da uvijek vrijedi zakon očuvanja ukupne energije (svih vrsta) u zatvorenom sustavu. Time je zakon očuvanja energije postao jedan od temeljnih zakona fizike. Energija se može pretvarati iz jednog oblika u drugi u raznim procesima, ali energija ne može nestati, niti je moguće energiju stvoriti ni iz čega.

Primjenom općeg zakona o očuvanju energije u izoliranom sustavu moguće je postaviti okvir za rješenje mnogih problema u fizici. U ovome ćemo poglavlju obraditi samo neke primjere iz mehanike, a o primjenama zakona o očuvanju energije u drugim granama fizike može se čitati u knjigama iz elektromagnetizma, termodinamike, itd.

6.3 Centar masa sustava više tijela

Zamislimo dva tijela jednakih masa na nekoj udaljenosti kako prikazuje slika 6.3a. Prirodno nam se nameće definicija centra masa kao točke na sredini spojnice tih dvaju tijela. To nam naprosto nalaže simetrija problema.

Ostavimo za kasnije razmišljanje o korisnosti uvođenja pojma centra masa, te nastavimo s razmatranjem nešto složenijeg sustava u kojem tijela imaju različite mase m_1 i m_2. Intuitivno bismo rekli da bi centar masa tog sustava trebao biti bliže onom tijelu koje ima veću masu. Kao najjednostavnije pravilo, uvedimo da centar masa bude točka koja dijeli spojnicu tijela u inverznom omjeru njihovih masa

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{6.21}$$

gdje su d_1 i d_2 udaljenosti centra masa od pojedinih tijela (slika 6.3b).

Možemo sada razmotriti ima li ovako definirana točka centra masa neko posebno svojstvo. Pretpostavimo da se ta dva tijela počnu uzajamno privlačiti nekim (unutarnjim) silama, koje ne moramo detaljno odrediti. Ako su sile konstantne u nekom vremenskom intervalu Δt, tijela će se gibati jednoliko ubrzano i prevaliti putove s_1, odnosno s_2 u omjeru

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1\,(\Delta t)^2}{\frac{1}{2}a_2\,(\Delta t)^2} = \frac{a_1}{a_2} \tag{6.22}$$

Uvažavajući treći Newtonov zakon prema kojemu su uzajamne sile privlačenja jednake po iznosu, tj. $m_1 a_1 = m_2 a_2$, možemo pisati za omjer prevaljenih putova

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 s_1 = m_2 s_2 \tag{6.23}$$

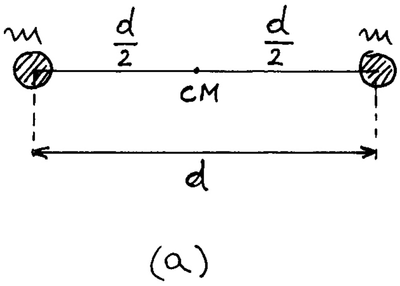
Nakon intervala vremena Δt, tijela se nalaze na udaljenostima $(d_1 - s_1)$, odosno $(d_2 - s_2)$ od točke u kojoj je prije bio centar masa. Odbijanjem jednadžbe (6.23) od (6.21) dobivamo

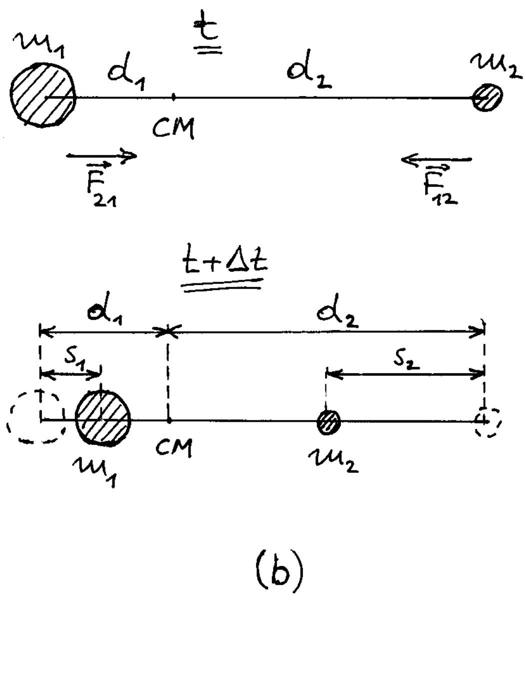
$$m_1\,(d_1 - s_1) = m_2\,(d_2 - s_2) \tag{6.24}$$

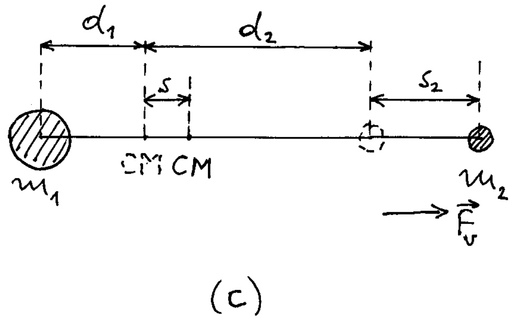
koju možemo napisati u obliku omjera

$$\frac{d_1 - s_1}{d_2 - s_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{6.25}$$

Dobili smo zanimljiv rezultat koji nam kaže da nove udaljenosti tijela od točke u kojoj je prije bio centar masa, također dijele spojnicu tijela u inverznom







Slika 6.3: (a) Centar masa (CM) sustava dviju jednakih kugli nalazi se na sredini njihove spojnice. (b) Pod djelovanjem unutarnjih sila $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ dolazi do gibanja pojedinih tijela, ali centar masa ostaje na istome mjestu. (c) Ako nema unutarnjih sila, a na jedno od tijela djeluje neka vanjska sila, pomiče se centar masa kao da je u njemu koncentrirana cjelokupna masa sustava na koju djeluje dotična vanjska sila.

omjeru masa. To pak znači da se centar masa i sada nalazi u toj istoj točki (slika 6.3b). Zaključujemo da samim djelovanjem unutarnjih sila u sustavu tijela ne dolazi do pomicanja centra masa. To je prvo važno svojstvo centra masa.

Što se zbiva ako na jedno od tijela djeluje vanjska sila?

Pretpostavimo sada da nema unutarnjih sila između dvaju tijela koja promatramo kao sustav, ali na drugo tijelo počne u trenutku $t = 0$ djelovati vanjska sila $\vec{F}_v$ tako da ga odmiče od prvog, kao što prikazuje slika 6.3c. U vremenskom intervalu Δt, drugo tijelo će se pomaknuti za iznos

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \frac{F_v}{m_2} (\Delta t)^2 \tag{6.26}$$

dok je prvo tijelo ostalo na istome mjestu jer na njega nije djelovala nikakva sila. Centar masa se pomaknuo za iznos s koji možemo izračunati postavljajući uvjet (slika 6.3c)

$$\frac{d_1 + s}{d_2 + s_2 - s} = \frac{m_2}{m_1} \tag{6.27}$$

Ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$m_1 (d_1 + s) = m_2 (d_2 + s_2 - s) \tag{6.28}$$

te od nje odbiti jednadžbu (6.21) da bismo dobili

$$m_1 s = m_2 (s_2 - s) \tag{6.29}$$

Traženi pomak centra masa iznosi

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} s_2 = \frac{1}{2} \frac{F_v}{m_1 + m_2} (\Delta t)^2 \tag{6.30}$$

gdje smo uvažili jednadžbu (6.26). Dobili smo drugo važno svojstvo centra masa. Položaj centra masa pomiče se kao da je u toj točki koncentrirana cjelokupna masa sustava $(m_1 + m_2)$, te kao da na nju djeluje sila F_v. To je iznenađujući rezultat jer u centru masa nema zapravo nikakve mase, a sila F_v djeluje samo na jedno od tijela. Sada možemo cijeniti kako je dobro bio pogođen kriterij kod uvođenja pojma centra masa. Kasnije ćemo upoznati i druga svojstva centra masa koja se uklapaju u ovu sliku.

Vektorsko određivanje položaja centra masa

Možemo naći vektorske relacije za položaj centra masa i njegovo gibanje. Pođimo od prijašnje definicije s time da ishodište O postavimo upravo u centar masa (slika 6.4a). Položaji dvaju tijela u odnosu prema ishodištu određeni su vektorima $\vec{d}_1$ i $\vec{d}_2$. Zbog suprotnih smjerova tih vektora, relacija $m_1 d_1 = m_2 d_2$ iz jednadžbe (6.21) postaje u vektorskom obliku

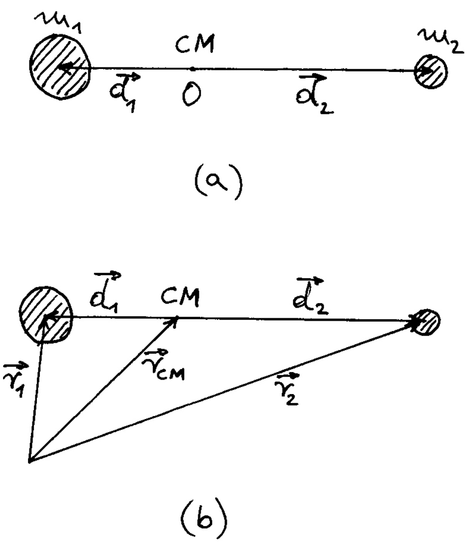
$$m_1 \vec{d}_1 = m_2 \vec{d}_2 \quad \Longrightarrow \quad m_1 \vec{d}_1 + m_2 \vec{d}_2 = 0 \tag{6.31}$$

Ako sada postavimo ishodište O u neku drugu točku izvan spojnice tijela, kao što prikazuje slika 6.4b, položaji tijela određeni su vektorima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, a položaj centra masa vektorom $\vec{r}_{CM}$.

Iz slike je očito da vrijedi zbrajanje vektora

$$\vec{r}_{CM} + \vec{d}_1 = \vec{r}_1 \tag{6.32}$$
$$\vec{r}_{CM} + \vec{d}_2 = \vec{r}_2 \tag{6.33}$$

Množenjem ovih jednadžbi s m_1, odnosno m_2 i zbrajanjem dobivamo



Slika 6.4: (a) Vektori položaja dvaju tijela prema ishodištu O koje je smješteno u centar masa sustava. (b) Uz proizvoljan izbor ishodišta O, centar masa i pojedina tijela imaju svoje vektore položaja.

$$(m_1 + m_2)\,\vec{r}_{CM} + m_1\vec{d}_1 + m_2\vec{d}_2 = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{6.34}$$

Uvažavanjem jednadžbe (6.31) nalazimo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.35}$$

Dobili smo način izračunavanja vektora položaja centra masa ako su nam zadani vektori položaja pojedinih tijela i njihove mase.

Brzina centra masa i količina gibanja sustava

Ako obje strane u jednadžbi (6.35) deriviramo po vremenu

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2} \tag{6.36}$$

dobivamo izraz koji povezuje brzinu centra masa s brzinama pojedinih čestica i njihovim masama

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.37}$$

Iz ove jednadžbe slijedi još jedno važno svojstvo centra masa. Možemo je preinačiti u oblik

$$(m_1 + m_2)\,\vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{uk} \tag{6.38}$$

pa vidimo da produkt ukupne mase sustava i brzine centra masa odgovara zbroju količina gibanja tijela u sustavu. U odjeljku 6.1 uveli smo pojam ukupne količine gibanja sustava tijela kao formalnu konstrukciju, napominjući da $\vec{p}_{uk}$ ne možemo pridijeliti nekom određenom tijelu. Sada možemo reći da se sustav tijela u cjelini ponaša tako kao da je u njegovu centru masa jedno tijelo koje sadrži cjelokupnu masu sustava, a giba se brzinom $\vec{v}_{CM}$ takva iznosa i smjera da mu možemo formalno pripisati količinu gibanja cijelog sustava $\vec{p}_{uk}$.

Primjena Newtonovih zakona na centar masa

Krenimo korak dalje i derivirajmo jednadžbu (6.37) po vremenu, pa dobivamo

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.39}$$

Ovu je jednadžbu korisno primijeniti u dva posebna slučaja. U prvome pretpostavimo da u sustavu tijela djeluju samo unutarnje sile. Zbog trećeg Newtonova zakona imamo tada

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_{CM} = 0 \tag{6.40}$$

Unutarnje sile ne mogu ubrzati centar masa. One samo ubrzavaju pojedina tijela u sustavu, dok centar masa ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu.

Analizirajmo sada slučaj u kojem na tijela u sustavu djeluju vanjske sile $\vec{F}_{v1}$, odnosno $\vec{F}_{v2}$, a nema unutarnjih sila. Jednadžba (6.39) daje

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{v1} + \vec{F}_{v2}}{m_1 + m_2} \tag{6.41}$$

Ovdje nalazimo još jedno neobično svojstvo centra masa. Njegovu akceleraciju možemo dobiti formalnom primjenom drugoga Newtonova zakona s tim da računamo kao da na ukupnu masu sustava djeluje ukupna vanjska sila.

Napomena: U ovome primjeru tijela su potpuno nepovezana i neovisna. Svaka od vanjskih sila djeluje samo na po jedno od tijela.

Poopćenje na sustav s više tijela

Ako imamo N tijela raspoređenih nekako u prostoru, položaj centra masa dan je izrazom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{6.42}$$

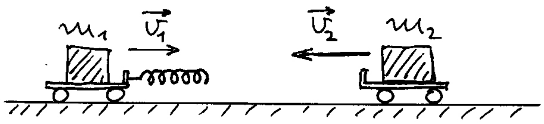
Analogno se mogu napisati izrazi za brzinu centra masa i akceleraciju.

Napomena: U jednadžbi (6.42) znak sume mora stajati zasebno u brojniku i u nazivniku. Postavljanje samo jednog znaka sume ispred razlomka bilo bi pogrešno jer bi se dobio drugačiji rezultat.

6.4 Elastičan i neelastičan sraz dvaju tijela

Sraz dvaju tijela je pojava koju svakodnevno doživljavamo, pa nam je važno znati koji se fizikalni procesi pritom odvijaju i koje zakonitosti vrijede.

Kao modelni primjer za sraz dvaju tijela mogu nam poslužiti dvoja kolica prikazana na slici 6.5. U idealiziranom slučaju zanemarujemo trenje, a podrazumijeva se također da je zanemarivo uzajamno gravitacijsko privlačenje kolica. Stoga smatramo da na kolica ne djeluju nikakve sile prije sraza, pa se ona gibaju stalnim brzinama. Ukupna energija sustava sastoji se od kinetičkih energija kolica.



Slika 6.5: Modelni sustav za proučavanje elastičnog sraza.

Tek kada dođe do dodira između opruge, koja je učvršćena na prvim kolicima, i drugih kolica, počinje stiskanje opruge, pa se javljaju unutarnje sile u sustavu. U tom procesu pretvara se dio kinetičke energije kolica u potencijalnu energiju opruge. Ako dvoja kolica s oprugom razmatramo kao izolirani sustav tijela, možemo ustvrditi da u njemu vlada zakon očuvanja ukupne mehaničke energije, te zakon očuvanja ukupne količine gibanja.

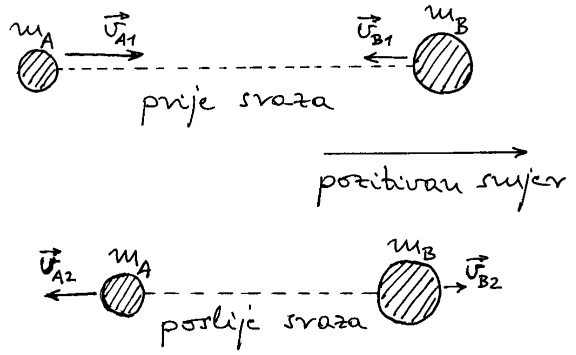
Opruga ne ostaje u stisnutom (deformiranom) stanju. Elastična sila djeluje na svaka kolica, tako da dolazi do njihova razilaženja. Pritom opruga gubi svoju elastičnu potencijalnu energiju, koja se pretvara u kinetičku energiju kolica. Nakon razlaza, iznova nastane stanje u kojem nema djelovanja sila na kolica, te se svaka od njih giba nekom stalnom brzinom. Drugim riječima, iznova nastupi stanje u kojem ukupnu mehaničku energiju sustava čine samo kinetičke energije dvaju kolica.

Možemo rekapitulirati sraz zapažanjem da za vrijeme dok djeluju elastične sile opruge, dolazi do prijenosa dijela količine gibanja s jednih kolica na druga s time da ukupna količina gibanja ostane neizmijenjena. Također dolazi do izmjene kinetičkih energija kolica pri čemu se kao privremeni posrednik javlja potencijalna energija opruge. To je opće obilježje svakog elastičnog sraza.

6.4.1 Centralni sraz elastičnih kugli

Sraz elastičnih kugli susrećemo u raznim prilikama. Pritom nismo u stanju uočiti deformaciju kugli koja nastane u trenutku njihova dodira, no jasno nam je da se ona morala pojaviti i odigrati istu ulogu koju je imala opruga u modelnom srazu kolica s oprugom iz slike 6.5.

Razmotrimo slučaj *centralnog sraza*, koji nastaje kada se središta kugli gibaju na istom pravcu, kao što prikazuje slika 6.6. Neka su poznate mase kugli i njihove brzine prije sraza. Postavlja se pitanje kolike su brzine kugli nakon sraza.



Slika 6.6: Obilježavanje brzina dvaju tijela prije sraza i nakon njega. U svrhu algebarskog računanja brzina postavljen je pozitivan smjer osi.

U načelu, problem bi se mogao rješavati primjenom Newtonovih zakona. Međutim, za takav postupak bilo bi nam potrebno poznavati elastična svojstva kugli, da bismo mogli odrediti sile koje nastaju pri deformaciji za vrijeme dodira kugli, te proračunati promjene njihovih brzina uslijed djelovanja tih sila. To bi bio dosta složen zadatak.

Mnogo je jednostavnije riješiti problem primjenom zakona očuvanja mehaničke energije i zakona očuvanja količine gibanja u zatvorenom sustavu. Tim zakonima možemo povezati bilo koja dva stanja sustava. Budući da nam je poznato stanje prije

sraza, a interesira nas stanje poslije sraza, primijenimo zakone očuvanja upravo na ta dva stanja. Time izbjegavamo rješavanje složenije situacije u stanjima koja se pojavljuju za vrijeme dodira kugli.

Označimo indeksima 1 i 2 stanja prije i poslije sraza, te ih povežimo zakonima očuvanja

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 \quad (6.43)$$

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \quad (6.44)$$

Ovdje smo brzine zapisali kao algebarske veličine, što podrazumijeva da smo na pravcu sraza dogovorno odredili pozitivan smjer (npr. smjer u desno na slici 6.6).

Gornje dvije jednadžbe su dovoljne za izračunavanje dviju nepoznanica v_{A2} i v_{B2}. U tu svrhu, zgodno je najprije preurediti te jednadžbe tako da grupiramo članove koji se odnose na pojedine kugle sa svake strane znaka jednakosti

$$m_A \left(v_{A1}^2 - v_{A2}^2\right) = m_B \left(v_{B2}^2 - v_{B1}^2\right) \quad (6.45)$$

$$m_A \left(v_{A1} - v_{A2}\right) = m_B \left(v_{B2} - v_{B1}\right) \quad (6.46)$$

Dijeleći ove dvije jednadžbe, uz uvažavanje pravila o razlici kvadrata, lako dobivamo

$$v_{A1} + v_{A2} = v_{B2} + v_{B1} \quad (6.47)$$

Iako dobivena relacija ne predstavlja konačan rezultat koji nas interesira, ipak iz nje slijedi važan zaključak

$$v_{A1} - v_{B1} = v_{B2} - v_{A2} \quad (6.48)$$

Relativna brzina približavanja kugli prije sraza $(v_{A1} - v_{B1})$ jednaka je relativnoj brzini udaljavanja kugli nakon sraza $(v_{B2} - v_{A2})$.

Nastavimo s traženjem nepoznanica iz dviju linearnih jednadžbi (6.46) i (6.47). Rješenja su

$$v_{A2} = \frac{2m_B v_{B1} + v_{A1}\left(m_A - m_B\right)}{m_A + m_B} \quad (6.49)$$

$$v_{B2} = \frac{2m_A v_{A1} + v_{B1}\left(m_B - m_A\right)}{m_A + m_B} \quad (6.50)$$

To su opća rješenja za centralni sraz elastičnih kugli uz bilo koje početne uvjete.

Napomena: Podrazumijeva se da smo cjelokupno razmatranje proveli u nekom inercijalnom sustavu. Lako je provjeriti da se isti oblik rješenja zadržava ako sve brzine transformiramo u neki drugi inercijalni sustav koji se giba npr. brzinom V duž pravca na spojnici kugli.

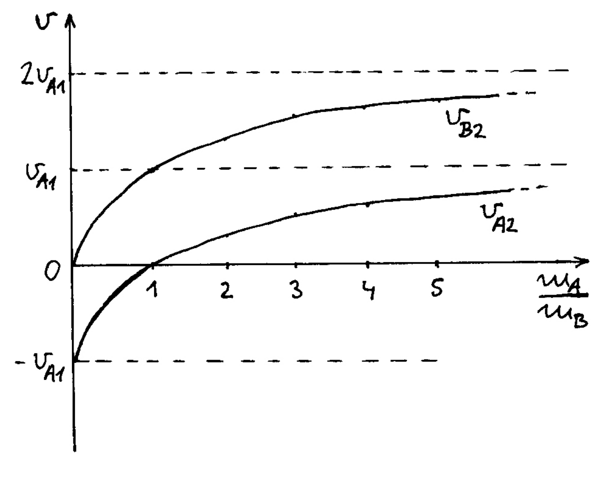
Projektil i meta

Kao poseban slučaj centralnog sraza zanimljivo je razmotriti nalet jedne kugle (projektila) na drugu kuglu koja prvotno miruje (meta). Postavljajući u općim rješenjima $v_{B1} = 0$ za mirujuću metu, dobivamo jednostavnije izraze za brzine kugli nakon sraza

$$v_{A2} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1} = \frac{\frac{m_A}{m_B} - 1}{\frac{m_A}{m_B} + 1} v_{A1} \quad (6.51)$$

$$v_{B2} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1} = \frac{2\frac{m_A}{m_B}}{\frac{m_A}{m_B} + 1} v_{A1} \quad (6.52)$$

Zadana je početna brzina projektila v_{A1}. Brzine projektila i mete nakon sraza ovise o omjeru njihovih masa. To je zgodno analizirati grafički (slika 6.7)



Slika 6.7: Brzina mete i projektila nakon sraza u ovisnosti o omjeru masa projektila i mete, a uz zadanu brzinu projektila prije sraza.

Ako je masa projektila mnogo manja od mase mete $\left(\frac{m_A}{m_B} << 1\right)$, onda se projektil odbije približno istom brzinom, ali suprotnim smjerom (negativan predznak), od one kojom je naletio na metu, tj. $v_{A2} \approx -v_{A1}$. U tom slučaju, meta dobije zanemarivu brzinu, tj. $v_{B2} \approx 0$. U praksi doživljavamo takav ishod kada god bacamo lopticu okomito prema zidu. Naime, zid se ponaša ekvivalentno ogromnoj kugli na koju nalijeće loptica u centralnom srazu. Loptica se odbije istom brzinom natrag. Također, ako pustimo lopticu da slobodno pada na horizontalan pod, ona će se odbiti uvis istom brzinom koju je imala uoči dodira s tlom.

Napomena: Kod slobodnog pada loptica se ubrzava. Tu bismo morali uzimati u obzir pretvaranje gravitacijske potencijalne energije sustava loptice i Zemlje u kinetičku energiju loptice (Zemlja se praktički ne pomiče zbog ogromne mase). Za primjenu jednadžbe (6.51) relevantne su samo brzine loptice uoči sraza s tlom i netom nakon sraza.

U slučaju kada su projektil i meta dvije jednake kugle, tj. kada su im mase izjednačene $\left(\frac{m_A}{m_B} = 1\right)$, krivulje na slici 6.7 pokazuju da se projektil u srazu zaustavi ($v_{A2} = 0$), a meta stekne brzinu koju je imao projektil prije sraza ($v_{B2} = v_{A1}$). U praksi takav sraz možemo vidjeti kada biljarska kugla naleti centralno na drugu, koja je dotad mirovala.

Ako je pak masa projektila bar malo veća od mase mete $\left(\frac{m_A}{m_B} > 1\right)$, obje se kugle nakon sraza gibaju u istome smjeru, s time da projektil ima neku manju brzinu od mete (slika 6.7). U graničnom slučaju, kada neka ogromna kugla nalijeće na malenu $\left(\frac{m_A}{m_B} >> 1\right)$, ogromna se kugla (projektil) nakon sraza nastavi gibati praktički istom brzinom kao prije sraza ($v_{A2} \approx v_{A1}$), dok malena kugla (meta) dobije gotovo dvostruku brzinu ($v_{B2} \approx 2v_{A1}$).

Koliko se energije prenese s projektila na metu u pojedinim slučajevima?

Energija projektila prije sraza nam je poznata jer se pretpostavlja da su masa i brzina prije sraza zadani

$$E_{A1} = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 \tag{6.53}$$

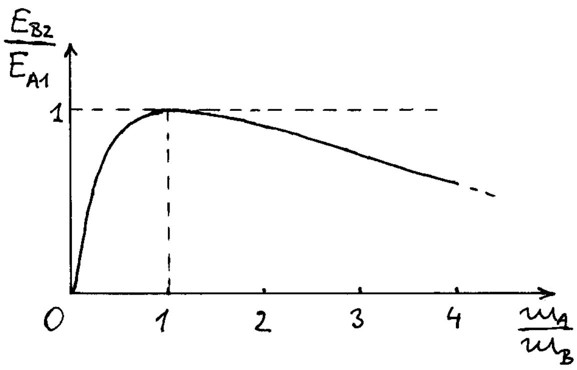
dok energiju mete nakon sraza moramo izračunati

$$E_{B2} = \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 = \frac{1}{2} m_B \frac{4m_A^2}{(m_A + m_B)^2} v_{A1}^2 \tag{6.54}$$

Omjer tih dviju energija iznosi

$$\frac{E_{B2}}{E_{A1}} = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} = \frac{4\frac{m_A}{m_B}}{\left(\frac{m_A}{m_B} + 1\right)^2} \tag{6.55}$$

Zgodno je grafički prikazati omjer dviju energija kao funkciju omjera masa (slika 6.8). Uočavamo da se najveća predaja energije ostvaruje kada su mase projektila i mete jednake $\left(\frac{m_A}{m_B} = 1\right)$. Tada se, naime, cjelokupna energija projektila prenese na metu.



Slika 6.8: Omjer energije prenesene na metu prema energiji projektila prije sraza u ovisnosti o omjeru masa projektila i mete.

Promatranje centralnog sraza kugli u referentnom sustavu centra masa

Već smo ranije isticali da se brzine tijela uvijek definiraju u odnosu na neki referentni sustav. Uobičajeno je da se referentni sustav u kojemu mjerni instrumenti miruju naziva *laboratorijskim.* Tako bismo mogli reći da su prethodna razmatranja centralnog sraza provedena u laboratorijskom referentnom sustavu sa zadanim brzinama kugli prije sraza i izračunatim brzinama nakon sraza.

Budući da smo u odjeljku 6.3 saznali kako centar masa ima neka istaknuta svojstva, moglo bi nam biti zanimljivo upoznati kako se odvija sraz kugli

promatran iz referentnog sustava koji je vezan uz centar masa. Ako kugle u laboratorijskom sustavu imaju brzine prije sraza v_{A1} i v_{B1}, onda centar masa u tom sustavu ima brzinu

$$v_{CM} = \frac{m_A v_{A1} + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} \tag{6.56}$$

Možemo sada transformirati brzine kugli iz laboratorijskog sustava u referentni sustav u kojem centar masa miruje. To znači da relativna brzina jednog referentnog sustava u odnosu na drugi iznosi $V = v_{CM}$. Odaberimo simbol u za označavanje brzina kugli u odnosu na referentni sustav centra masa, pa za brzine prije sraza možemo pisati

$$u_{A1} = v_{A1} - v_{CM} = \frac{m_B}{m_A + m_B}(v_{A1} - v_{B1}) \tag{6.57}$$

$$u_{B1} = v_{B1} - v_{CM} = \frac{m_A}{m_A + m_B}(v_{B1} - v_{A1}) \tag{6.58}$$

gdje smo u računanju upotrijebili izraz za v_{CM} iz jednadžbe (6.56).

Za vrijeme sraza djeluju unutarnje sile sustava dviju kugli, no one ne mogu promijeniti brzinu centra masa. Stoga v_{CM} iz jednadžbe (6.56) predstavlja i dalje brzinu gibanja referentnog sustava centra masa u odnosu prema laboratorijskom sustavu, pa brzine kugli nakon sraza možemo transformirati

$$u_{A2} = v_{A2} - v_{CM} = \frac{m_B}{m_A + m_B}(v_{B1} - v_{A1}) \tag{6.59}$$

$$u_{B2} = v_{B2} - v_{CM} = \frac{m_A}{m_A + m_B}(v_{A1} - v_{B1}) \tag{6.60}$$

gdje smo u računanju upotrijebili izraze za v_{A2} i v_{B2} iz jednadžbi (6.49) i (6.50). Usporedbom brzina kugli prije i poslije sraza u referentnom sustavu centra masa nalazimo

$$u_{A2} = -u_{A1} \tag{6.61}$$

$$u_{B2} = -u_{B1} \tag{6.62}$$

Gledano u referentnom sustavu centra masa, svaka kugla nakon sraza zadržava isti iznos brzine, no mijenja smjer. Ovaj rezultat je puno jednostavniji od onoga za v_{A2} i v_{B2} u laboratorijskome referentnom sustavu.

Zapravo, zgodno je uočiti da se, prema jednadžbama (6.61) i (6.62), svaka kugla odbije kao da je imala sraz sa zidom. To je lako razumjeti jer znamo da se brzina centra masa ne može promijeniti djelovanjem unutarnjih sila sustava za vrijeme sraza. Ako je centar masa mirovao prije sraza, onda on nastavi mirovati i nakon sraza. Svaka se kugla, dakle, odbije kao da centar masa predstavlja nepomičan zid.

Na kraju ovog razmatranja, vrijedi osvrnuti se i na količine gibanja u sustavu centra masa. Množenjem jednadžbi (6.57) i (6.58) s m_A, odnosno m_B nalazimo

$$m_A u_{A1} + m_B u_{B1} = 0 \tag{6.63}$$

To je očekivani rezultat. U referentnom sustavu u kojem centar masa miruje, ukupna količina gibanja iščezava, sukladno jednadžbi (6.38) u kojoj bismo postavili $u_{CM} = 0$. Isti rezultat mora vrijediti i nakon sraza. Uistinu, ako sada jednadžbe (6.59) i (6.60) pomnožimo s m_A, odnosno m_B dobivamo da je

$$m_A u_{A2} + m_B u_{B2} = 0 \tag{6.64}$$

Radi cjelovitosti pogleda, dodajmo još zapažanje da smo, poznavajući svojstva centra masa iz odjeljka 6.3, mogli odmah napisati jednadžbe (6.63) i (6.64), a iz njih pak odrediti pravilnost izraženu u jednadžbama (6.61) i (6.62).

6.4.2 Necentralni sraz

Razmotrimo slučaj projektila i mete s time da pravac kojim se giba središte projektila prolazi mimo središta mete, ali ipak ne dalje od zbroja radijusa dviju kugli. Tada dolazi do *necentralnog sraza.* Na slici 6.9a prikazan je projektil i meta prije sraza i u trenutku dodira kugli, kada se može uočiti normalan i tangencijalan smjer. Rastavimo li brzinu projektila prije sraza na normalnu i tangencijalnu komponentu, te idealiziramo površine kugli tako da na njima ne nastaje učinak trenja, možemo zaključiti da se tangencijalne komponente brzina ne će promijeniti

$$v_{A2t} = v_{A1t} \tag{6.65}$$

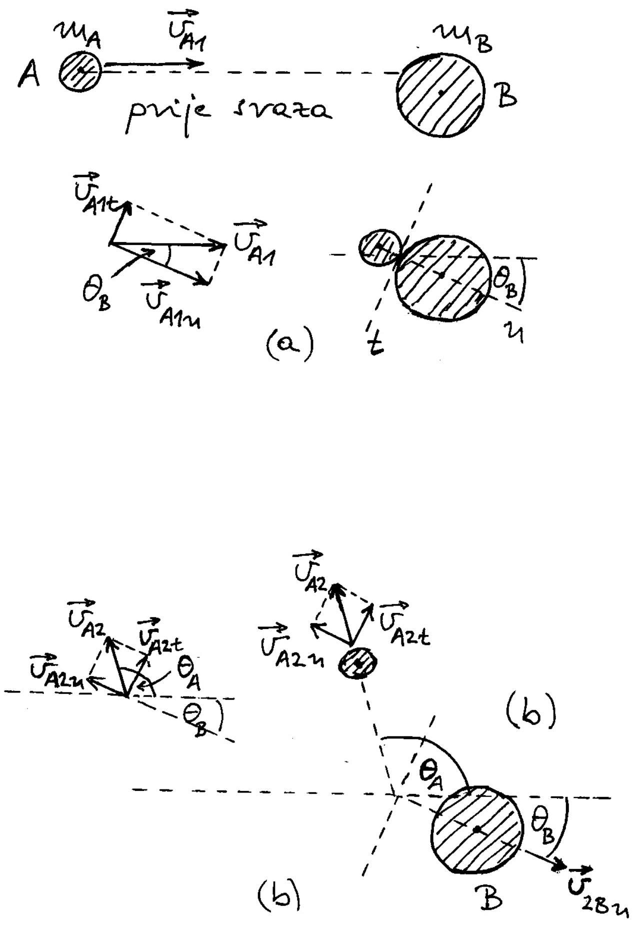
$$v_{B2t} = 0 \tag{6.66}$$

Za normalne komponente brzina možemo primijeniti rezultate ranije dobivene za centralni sraz

$$v_{A2n} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\, v_{A1n} \qquad (6.67)$$

$$v_{B2n} = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\, v_{A1n} \qquad (6.68)$$

Na slici 6.9b prikazane su kugle nakon sraza sa svojim brzinama. Kut θ_B je određen odnosima uoči sraza koje se mogu pratiti i na slici 6.9a. Uviđamo da vrijedi



Slika 6.9: (a) Projektil i meta prije sraza i u trenutku dodira kugli. Pomoćni crtež sa strane prikazuje rastavljanje brzine projektila uoči sraza na tangencijalnu i normalnu komponentu. Naznačen je kut θ_B pod kojim će biti odbačena meta. (b) Brzine kugli nakon elastičnog sraza. Naznačen je kut θ_A između smjerova brzine projektila prije i poslije sraza (kut raspršenja). Pomoćni crtež sa strane služi za utvrđivanje omjera u jednadžbi (6.70).

$$tg\,\theta_B = \frac{v_{A1t}}{v_{A1n}} \qquad (6.69)$$

Želimo izračunati kut raspršenja projektila θ_A. Iz slike 6.9b možemo odrediti

$$tg\,(\theta_A + \theta_B) = \frac{v_{A2t}}{v_{A2n}} = \frac{m_A + m_B}{m_A - m_B}\, tg\,\theta_B \qquad (6.70)$$

gdje je iskorišten izraz u jednadžbi (6.67) i jednakost tangencijalnih komponenti (6.65). U daljnjem računu primijenimo poznatu trigonometrijsku formulu

$$tg\,(\theta_A + \theta_B) = \frac{tg\,\theta_A + tg\,\theta_B}{1 - tg\,\theta_A\, tg\,\theta_B} \qquad (6.71)$$

tako da nakon sređivanja nalazimo rješenje

$$tg\,\theta_A = \frac{\frac{2\,m_B}{m_A+m_B}\, tg\,\theta_B}{tg^{\,2}\,\theta_B + \frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}} \qquad (6.72)$$

Dobiveno rješenje mora biti ispravno i u posebnom slučaju centralnog sraza. Tada je nužno $\theta_B = 0$, pa iz jednadžbe (6.72) slijedi $tg\,\theta_A = 0$, što znači da je $\theta_A = 0$, ili pak $\theta_A = \pi$. To su očekivani mogući rezultati za različite omjere masa.

U općenitom slučaju, θ_B može poprimiti bilo koju vrijednost od 0 do $\pi/2$. Kut θ_B ovisi o geometrijskim uvjetima u kojima se odvija sraz. Postavlja se pitanje kako se mijenja kut raspršenja projektila θ_A u ovisnosti o promjeni kuta θ_B. Analizu postavljenog problema moramo provesti zasebno za različite omjere masa.

Najjednostavniji je slučaj kada su mase projektila i mete jednake ($m_A = m_B$). Iz jednadžbe (6.72) tada dobivamo

$$tg\,\theta_A = \frac{1}{tg\,\theta_B} = ctg\,\theta_B \quad \Longrightarrow \theta_A + \theta_B = \frac{\pi}{2} \quad (6.73)$$

Ovo je zanimljiv rezultat koji kaže da se dvije jednake kugle nakon sraza uvijek razilaze pod pravim kutom, bez obzira na uvjete prije sraza. Tu zakonitost je zgodno imati na umu kod biljarskih kugli i drugim sličnim prilikama.

Napomena: U posebnom slučaju savršeno centralnog sraza, projektil se potpuno zaustavi, pa nije moguće govoriti o smjeru njegove brzine. Ali već kod malenog odstupanja od centralnog

sraza, projektil poprimi nakon sraza neku (malenu) brzinu, te je moguće utvrditi njen smjer i ustanoviti da vrijedi zakonitost o okomitim brzinama.

U svim slučajevima kada je masa projektila veća od mase mete $m_A > m_B$, razlomci u jednadžbi (6.72) podliježu uvjetima

$$\frac{2\,m_B}{m_A + m_B} < 1 \tag{6.74}$$

$$\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} > 0 \tag{6.75}$$

Kada god su ti uvjeti ispunjeni, jednadžba (6.72) daje odnos

$$tg\,\theta_A < \frac{1}{tg\,\theta_B} \quad \Longrightarrow \quad \theta_A + \theta_B < \frac{\pi}{2} \tag{6.76}$$

Zanimljivo je pitanje koje vrijednosti može poprimiti θ_A kada se θ_B mijenja od 0 do $\pi/2$, sukladno mogućim eksperimentalnim uvjetima u kojima se postavlja sraz. Za $\theta_B = 0$ odmah nalazimo iz jednadžbe (6.72) da je $\theta_A = 0$, gdje je uzeto također u obzir da je $m_A > m_B$. To je zapravo očekivani rezultat za centralni sraz u kojem projektil veće mase od mete nastavi put nakon sraza u istom smjeru. Za ostale slučajeve, jednadžbu (6.72) možemo analizirati kao funkciju

$$y = \frac{ax}{x^2 + b} \tag{6.77}$$

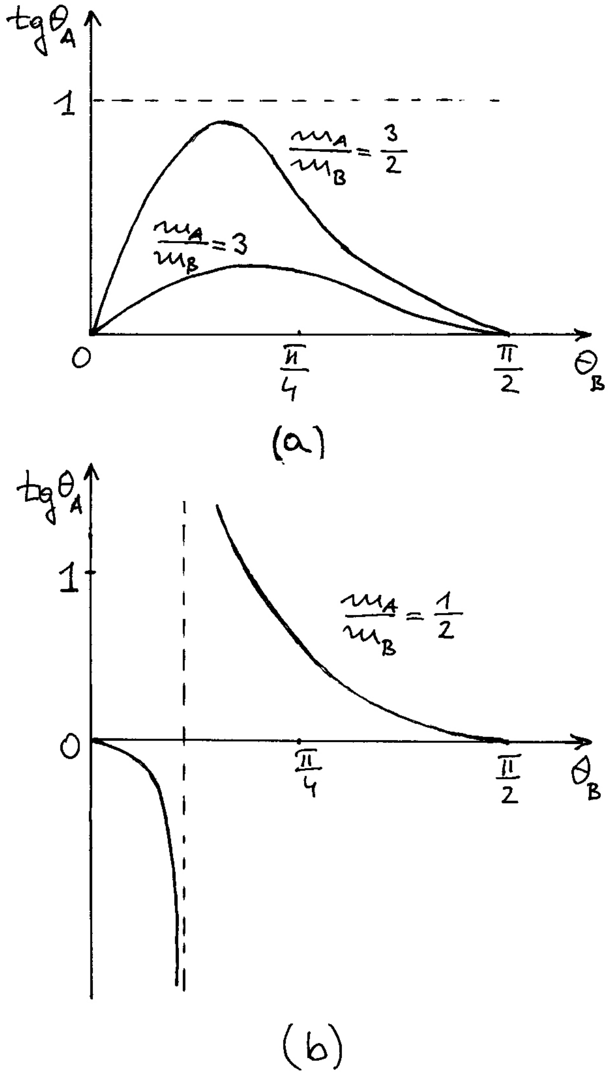
u kojoj x igra ulogu varijable koja zamjenjuje $tg\theta_B$. Budući da su konstante a i b pozitivne, funkcija $y(x)$ ima pozitivne vrijednosti za svaki pozitivan x. Nadalje, možemo uočiti da za $\theta_B \to \pi/2$ imamo $x \to \infty$, pa fnkcija $y(x)$ teži u nulu. U tim okolnostima, funkcija $f(x)$ mora imati maksimum na nekoj konačnoj vrijednosti x_m. To je lako naći postavljanjem uvjeta da prva derivacija funkcije iščezava. Nakon laganog računa dobiva se $x_m = \sqrt{b}$. Budući da je $b < 1$, nalazimo $tg\,\theta_{Bm} < 1$, odnosno $\theta_{Bm} < \pi/4$. Tada je kut raspršenja projektila maksimalan

$$tg\,\theta_{Am} = \frac{m_B}{\sqrt{m_A^2 - m_B^2}} \tag{6.78}$$

Iz ovog se rezultata vidi da, u slučajevima kada je masa projektila mnogo veća od mase mete, nije moguće postići značajniji kut raspršenja projektila. Ako je pak masa m_A tek neznatno veća od m_B, postiže se θ_{Am} gotovo jednak $\pi/2$.

Napomena: Rezultat (6.78) ne smije se primijeniti kada je točno $m_A = m_B$. Tada je, naime, $b = 0$ u jednadžbi (6.77), pa derivacija takve funkcije $f(x)$ ne iščezava ni za koji konačan x.

Ovisnost kuta raspršenja projektila θ_A o kutu θ_B, koji možemo postaviti odabirom eksperimentalnih uvjeta sraza, prikazan je na slici 6.10a za dva različita izbora omjera masa $(m_A/m_B) > 1$.



Slika 6.10: (a) Ovisnost kuta raspršenja projektila o upadnom kutu θ_B (kut što ga upadna brzina projektila čini sa spojnicom kugli u trenutku dodira). Krivulje se odnose na dva slučaja u kojima je masa projektila veća od mase mete. (b) Ovisnost kuta raspršenja projektila o upadnom kutu u slučaju kada je masa projektila manja od mase mete.

Moramo još obraditi i slučajeve kada je masa projektila manja od mase mete ($m_A < m_B$). U jednadžbi (6.72) imamo sada u nazivniku negativan član, tako da cijeli nazivnik može poprimiti od negativnih do pozitivnih vrijednosti kada se θ_B eksperimentalno mijenja. Za dovoljno malene vrijednosti θ_B, nazivnik u jednadžbi (6.72) je negativan

$$tg^2\,\theta_B + \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} < 0 \qquad (6.79)$$

tako da se dobiva $tg\,\theta_A < 0$, dakle tupi kut raspršenja projektila ($\theta_A > \pi/2$). To je očekivan rezultat u kojem se projektil manje mase odbija djelomično unatrag od mete koja ima veću masu.

Ako se θ_B eksperimentalno povećava, dolazimo do uvjeta

$$tg^2\,\theta_B + \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = 0 \qquad (6.80)$$

Tada jednadžba (6.72) daje $\theta_A = \pi/2$. Projektil se odbije pod pravim kutom u odnosu na smjer svog naleta prije sraza. Kut θ_B, kod kojeg se ostvaruje ovaj uvjet, ovisi o omjeru masa projektila i mete.

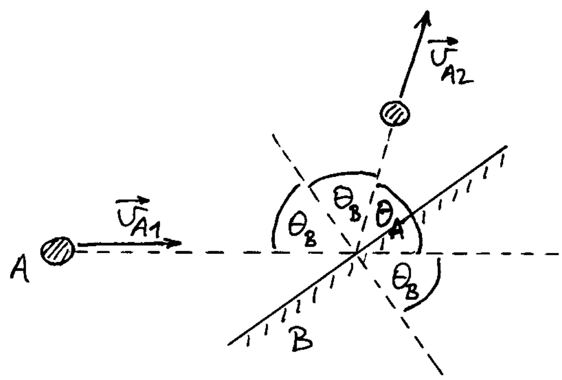
Konačno, kada se θ_B dalje poveća, nazivnik u jednadžbi (6.72) postaje pozitivan, tako da kut raspršenja projektila postaje oštar ($\theta_A < \pi/2$). Kako eksperimentalno povećavamo $\theta_B \to \pi/2$, smanjuje se kut raspršenja projektila $\theta_A \to 0$.

Slika 6.10b prikazuje primjer ovisnosti kuta raspršenja projektila θ_A o upadnom kutu θ_B, koji možemo eksperimentalno mijenjati. Lako se može uočiti kada je ispunjen uvjet iz jednadžbe (6.80), pa je $\theta_A = \pi/2$.

Granični slučaj sraza projektila sa zidom

Kod centralnog sraza obradili smo i granični slučaj u kojem kao metu odabiremo kuglu ogromnog radijusa i mase. Na mjestu gdje udara projektil, možemo smatrati kao da je površina praktički dio ravne plohe. Necentralni sraz svodi se u tom slučaju na upadanje projektila pod kutom θ_B na praktički ravnu plohu iza koje stoji ogromna masa, pa je nazivamo zidom (slika 6.11).

Problem elastičnog sraza sa zidom lako rješavamo rastavljajući upadnu brzinu projektila $\vec{v}_{A1}$ na okomitu i tangencijalnu komponentu. Idealizirajući dodirne plohe projektila i zida tako da nema trenja, tangencijalna komponenta brzine projektila ostaje neizmijenjena nakon sraza, dok normalna komponenta brzine promijeni smjer, ali zadrži iznos. Iz toga je lako zaključiti da se projektil odbije od zida brzinom $\vec{v}_{A2}$, koja ima isti iznos kao upadna, a usmjerena je za kut θ_B na suprotnu stranu od okomice na zid (slika 6.11).



Slika 6.11: Projektil nalijeće na elastičan zid. Upadni kut θ_B mjeri se između smjera brzine projektila prije sraza i okomice na zid. Kut refleksije se mjeri od okomice prema smjeru brzine projektila nakon sraza, a jednak je upadnome kutu. Kut raspršenja θ_A računa se između smjerova brzine projektila prije i poslije sraza sa zidom.

Ovdje želimo pokazati da identičan rezultat dobivamo dosljednom primjenom jednadžbe (6.72). Uzimajući granični slučaj ogromne mete kao zida, nalazimo

$$\lim_{m_B\to\infty} \frac{2\,m_B}{m_A + m_B} = 2 \qquad (6.81)$$

$$\lim_{m_B\to\infty} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = -1 \qquad (6.82)$$

Jednadžbu (6.72) tada svodimo na izraz

$$tg\,\theta_A = \frac{2\,tg\,\theta_B}{tg^2\,\theta_B - 1} = -tg\,2\theta_B = tg\,(\pi - 2\theta_B) \qquad (6.83)$$

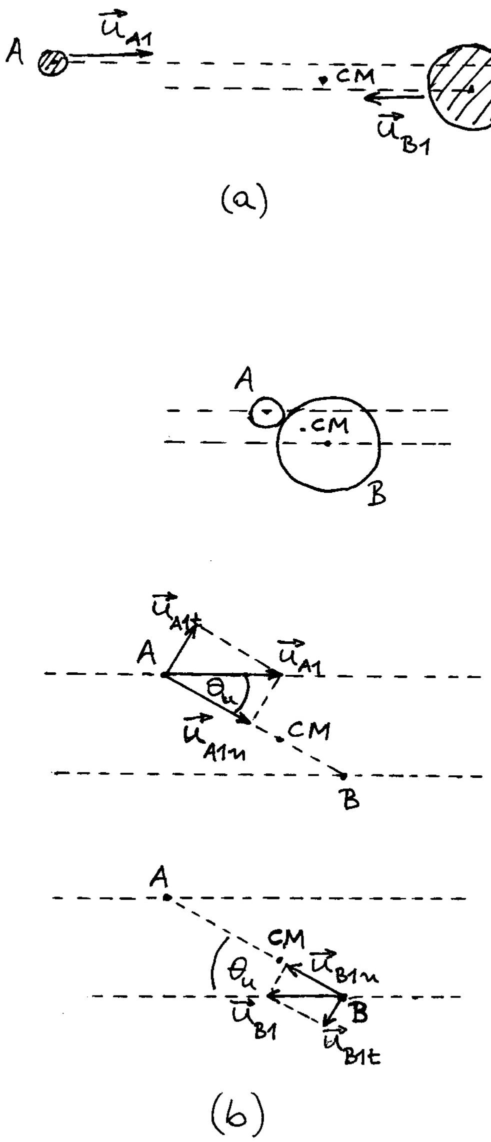
gdje smo ujedno primijenili poznate trigonometrijske relacije za tangens kuta. Kao konačan rezultat, možemo pisati

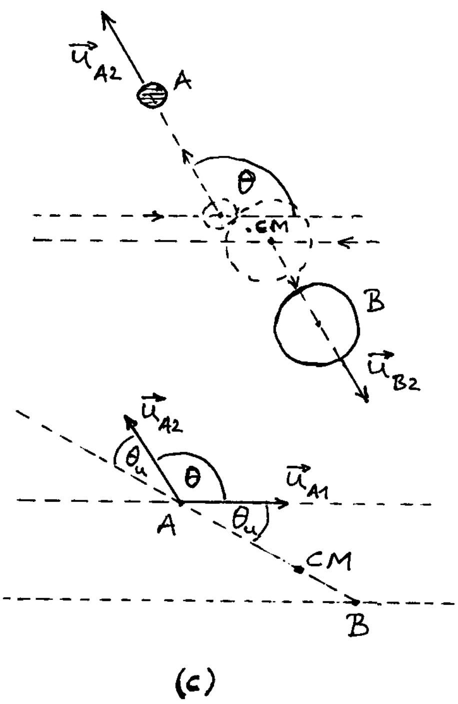
$$\theta_A = \pi - 2\theta_B \qquad (6.84)$$

Vidimo da generalna jednadžba (6.72) očekivano daje ispravan rezultat i u ovom posebnom slučaju. Slika 6.11 pokazuje odnos kutova iz jednadžbe (6.84).

Necentralni sraz u referentnom sustavu centra masa

Kod centralnog sraza vidjeli smo da jednadžbe postaju znatno jednostavnije ako se promatranje obavlja iz referentnog sustava centra masa. Zanimljivo je sada razmotriti i necentralni sraz u takvu sustavu. Slika 6.12a prikazuje kugle prije necentralnog sraza. U referentnom sustavu centra masa, kugle imaju brzine $\vec{u}_{A1}$ i $\vec{u}_{A2}$ prije sraza. Na slici 6.12b prikazana je situacija u trenutku kada se kugle dodirnu, a na pomoćnim su crtežima prikazane brzine svake od kugli zasebno, rastavljene u tangencijalnu





Slika 6.12: (a) U referentnom sustavu centra masa dvije se kugle gibaju na paralelnim pravcima koji su razmaknuti manje od zbroja radijusa dviju kugli, tako da slijedi necentralni sraz. Centar masa (CM) je u svakome trenutku na spojnici središta kugli. (b) Situacija u trenutku dodira dviju kugli. Na dvama pomoćnim uvećanim crtežima prikazane su brzine svake od kugli i njihovo rastavljanje na tangencijalne i normalne komponente. Označen je upadni kut θ_u u sustavu centra masa. (c) Brzine kugli nakon sraza u sustavu centra masa. Označen je kut raspršenja θ u sustavu centra masa. Na pomoćnom uvećanom crtežu prikazan je odnos upadnog kuta i kuta raspršenja.

i normalnu komponentu. Na njima se također vidi upadni kut θ_u što ga brzina kugle čini s okomicom na tangencijalnu dodirnu plohu, što je zapravo smjer normalne komponente brzine.

Idealizirajući površine kugli tako da na njima ne dolazi do efekta trenja, možemo zaključiti da se pri srazu tangencijalne komponente brzina ne mijenjaju

$$u_{A2t} = u_{A1t} \tag{6.85}$$

$$u_{B2t} = u_{B1t} \tag{6.86}$$

Za normalne komponente brzina možemo primije-

niti rezultat poznat iz centralnog sraza

$$u_{A2n} = -u_{A1n} \quad (6.87)$$
$$u_{B2n} = -u_{B1n} \quad (6.88)$$

Iz gornjih jednadžbi neposredno slijedi zaključak da se iznosi brzina pojedinih kugli ne mijenjaju

$$|\vec{u}_{A2}| = |\vec{u}_{A1}| \quad (6.89)$$
$$|\vec{u}_{B2}| = |\vec{u}_{B1}| \quad (6.90)$$

Na slici 6.12c prikazane su kugle nakon sraza sa pripadnim brzinama. One su po iznosima jednake brzinama prije sraza (slika 6.12a), ali su im smjerovi otklonjeni za kut raspršenja θ u odnosu prema odgovarajućim smjerovima prije sraza.

U svrhu određivanja kuta raspršenja θ, nacrtane su zasebno na slici 6.12d brzine kugle A prije i poslije sraza, te je crtkanom linijom povučen pravac koji prolazi kroz središta kugli u trenutku njihova prvog dodira. Radi općeg snalaženja, naznačen je također centar masa i pravac po kojem je dolazila kugla B. Uočljiv je upadni kut θ_u između brzine prije sraza $\vec{v}_{A1}$ i crtkanog pravca. Uvažavajući jednadžbe (6.85) i (6.87), zaključujemo da i brzina $\vec{v}_{A2}$ nakon sraza čini kut θ_u s crtkanim pravcem. Iz slike je zatim jasno da vrijedi

$$\theta = \pi - 2\theta_u \quad (6.91)$$

Odmah primjećujemo da je ovaj rezultat po formi identičan s onim iz jednadžbe (6.84), pa je komentar neizbježan. Važno je imati na umu da odnos kutova u jednadžbi (6.91) vrijedi općenito za bilo koji sraz kugli, neovisno o omjeru masa, kada se promatra u referentnom sustavu centra masa. Za razliku od toga, rezultat iz jednadžbe (6.84) odnosi se samo na poseban slučaj sraza kugle s ogromnom metom (zidom), koji se promatra u laboratorijskom sustavu. Vidimo da, u odnosu na promatranje sraza u laboratorijskom sustavu, promatranje u sustavu centra masa donosi veliko pojednostavljenje jer ispada kao da je svaka kugla doživjela sraz sa zidom. Isti smo fenomen već raspravili u slučaju centralnog sraza u referentnom sustavu centra masa.

6.4.3 Neelastičan sraz

Razmotrimo sada slučajeve sraza kugli, ili tijela drugih oblika, načinjena od materijala koji nije savršeno elastičan. Deformacija, koja nastane tijekom prve faze sraza, ne ispravlja se dovoljno brzo u drugoj fazi, tako da se tijela razdvoje, tj. izgube kontakt, i prije potpunog ispravljanja deformacije. Zbog toga je rad unutarnjih sila, koji se pretvori u kinetičku energiju tijela, manji nego kod savršeno elastičnog sraza. To je *djelomično neelastičan sraz.*

Dio potencijalne energije, stvorene prvotnom deformacijom tijela, ostane u tijelima nakon njihova razdvajanja kao energija koja se zatim raspodijeli po cijelom tijelu u obliku titranja atoma. To se naziva toplinska energija jer je po svojoj prirodi ista kao i ona koju u obliku topline dovodimo tijelu prilikom grijanja.

Napomena: U praksi je teško opaziti povećanje temperature jer se obično radi o nedovoljno velikoj količini energije, ali ona ipak postoji. To je primjer zakona očuvanja ukupne energije.

Zgodan primjer nesavršeno elastičnog sraza nalazimo kod promatranja čelične kuglice koju pustimo da slobodno pada na horizontalnu čeličnu podlogu. U odbijanju od podloge, kuglica će imati nešto manju brzinu nego u padu netom prije dodira podloge. Stoga će se kuglica podići na nešto manju visinu od one s koje smo je prvotno ispustili. Otpor zraka ima pritom praktički zanemarivu ulogu. Omjer brzina nakon sraza i uoči njega naziva se *koeficijent restitucije*. Savršeno elastičan materijal, kod kojega bi koeficijent restitucije bio jednak jedinici, predstavlja idealizaciju koje u stvarnosti nema. Dobar čelik ima koeficijent restitucije koji doseže vrijednost blizu jedinice. U nekim športskim disciplinama važno je propisati koeficijent restitucije. Tako je npr. za loptice u golfu maksimalno dozvoljen koeficijent restitucije 0,83 (u praksi se najviše upotrebljava 0,78). U tenisu je propisan koeficijent restitucije 0,85 za sve vrste reketa, dok je za loptice u stolnom tenisu propisana vrijednost 0,94.

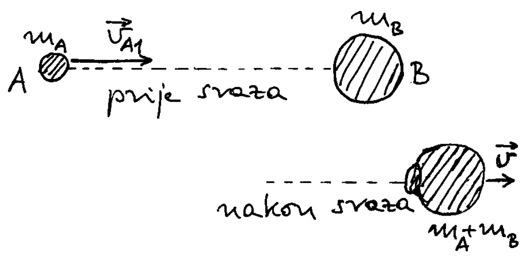
Potpuno neelastičan sraz

Kao krajnju suprotnost savršeno elastičnom srazu, imamo *potpuno neelastičan sraz* kod kojega tijela ostanu slijepljena nakon sraza. Postavlja se pitanje možemo li primjenom zakona očuvanja dobiti rješenje za ovakav sraz.

Ponajprije moramo uvidjeti da zakon o očuvanju ukupne mehaničke energije ne vrijedi kod neelastičnog sraza jer se dio energije pretvara u to-

plinsku energiju. Preostaje nam jedino zakon o očuvanju ukupne količine gibanja, koji je uvijek primjenljiv, jer se temelji na trećem Newtonovu zakonu. No, i broj nepoznanica se smanji na jednu, jer slijepljene mase nakon sraza imaju jednu brzinu, koju želimo odrediti.

Razmotrimo primjer potpuno neelastičnog sraza putujućeg projektila i mirujuće mete, kako prikazuje slika 6.13.



Slika 6.13: U neelastičnom srazu nastanu deformacije tijela koje se ne ispravljaju. Nakon sraza tijela ostaju trajno spojena u jednu cjelinu.

Primijenimo zakon očuvanja ukupne količine gibanja na stanja prije i poslije sraza

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (m_A + m_B)\, v \tag{6.92}$$

gdje v označava brzinu slijepljenog tijela nakon sraza. Ako smatramo da je zadana brzina projektila prije sraza v_{A1}, a za mirujuću metu uvrstimo $v_{B1} = 0$, preostaje kao jedina nepoznanica u jednadžbi (6.92) brzina v, koju je lako odrediti

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B}\, v_{A1} \tag{6.93}$$

Zanimljivo je utvrditi koliki se dio početne kinetičke energije tijela pretvorio u toplinsku energiju. Prije sraza imali smo kinetičku energiju projektila

$$E_{KA} = \frac{1}{2}\, m_A v_{A1}^2 \tag{6.94}$$

dok nakon sraza imamo kinetičku energiju slijepljenog tijela AB

$$E_{KAB} = \frac{1}{2}\,(m_A + m_B)\, v^2 = \frac{m_A^2 v_{A1}^2}{2\,(m_A + m_B)} \tag{6.95}$$

Možemo napraviti omjer kinetičkih energije prije i poslije sraza

$$\frac{E_{KAB}}{E_{KA}} = \frac{m_A}{m_A + m_B} < 1 \tag{6.96}$$

Sasvim očekivano, kinetička energija nakon sraza manja je od one prije sraza, bez obzira na odabrani omjer masa. Razlika kinetičkih energija pretvorena je u toplinu

$$Q = E_{KA} - E_{KAB} = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\, v_{A1}^2 \tag{6.97}$$

Možemo sada izračunati omjer

$$\frac{Q}{E_{KA}} = \frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{1}{\frac{m_A}{m_B} + 1} \tag{6.98}$$

koji nam kaže koliki dio prvotne kinetičke energije projektila se pretvori u toplinu. Vidimo da se, kod naleta projektila male mase na metu velike mase, gotovo cjelokupna kinetička energija projektila pretvori u toplinu. Ako povećavamo omjer masa m_A/m_B, smanjuje se udio kinetičke energije koji se pretvori u toplinu. U ekstremnom slučaju, kada ogroman projektil udari u malenu metu, održi se gotovo cjelokupna kinetička energija.

Kao svakodnevan primjer, možemo navesti pad nekog tijela na tlo gdje se zaustavi. Ma kako teško bilo to tijelo, gledajući iz ljudskih razmjera, cjelokupna kinetička energija koju ono ima uoči dodira s tlom pretvori se u toplinu jer je Zemlja ima ogromnu masu i ne će se pokrenuti uslijed tog neelastičnog sraza.

Neelastičan sraz u sustavu centra masa

Opis neelastičnog sraza u sustavu centra masa lako je dobiti. U tu svrhu nađimo najprije brzinu centra masa u odnosu na laboratorijski referentni sustav

$$v_{CM} = \frac{m_A v_{A1} + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} = \frac{m_A}{m_A + m_B}\, v_{A1} \tag{6.99}$$

Odmah uviđamo da se radi o istoj brzini koju smo dobili za spojeno tijelo u jednadžbi (6.93). To je zapravo logično jer se centar masa mora nalaziti u spojenom tijelu nakon sraza. Jednadžba (6.99) pak kaže da se centar masa gibao tom istom brzinom i prije sraza dok tijela nisu bila spojena. Radi se o svojstvu centra masa kojemu se brzina ne može

promijeniti djelovanjem unutarnjih sila sustava tijela.

Transformirajmo sada brzine iz laboratorijskog referentnog sustava u referentni sustav u kojemu centar masa miruje. Brzine tijela prije sraza iznose

$$u_{A1} = v_{A1} - v_{CM} = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_{A1} \tag{6.100}$$

$$u_{B1} = v_{B1} - v_{CM} = -\frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1} \tag{6.101}$$

Nakon sraza imamo spojeno tijelo AB koje miruje u sustavu centra masa, odnosno brzina mu je $u = 0$. Isti rezultat dobivamo i formalnom transformacijom brzine v iz laboratorijskog sustava u sustav centra masa

$$u = v - v_{CM} = 0 \tag{6.102}$$

gdje smo uvažili jednadžbe (6.93) i (6.99). Dobiveni rezultat bitno se razlikuje od onoga za savršeno elastičan sraz. Kod potpuno neelastičnog sraza, tijela imaju neke brzine prije sraza, gledano u referentnom sustavu centra masa, no brzina spojenog tijela nakon sraza postaje nula.

Postignuti zaključak možemo dalje iskoristiti za energijska razmatranja u referentnom sustavu centra masa. Tijela su imala neke kinetičke energije prije sraza, a poslije sraza nema više kinetičke energije. Prema tome, cjelokupna kinetička energija, koja je postojala prije sraza, pretvorena je u toplinu

$$Q = \frac{1}{2} m_A u_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B u_{B1}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_{A1}^2 \tag{6.103}$$

Dobiveni rezultat za toplinu jednak je onome koji je izračunat iz veličina u laboratorijskom referentnom sustavu (jednadžba (6.97)). Očekivano, iznos topline ne ovisi o izboru referentnog sustava.

6.4.4 Pogovor o srazu tijela i povijesni osvrt na razvoj pojma energije

Može se postaviti pitanje zašto smo posvetili toliko prostora srazu tijela. Dio razloga leži u tome što je sraz tijela jedna od čestih pojava, pa je vrijedno upoznati njene zakonitosti. No prava je svrha toliko razrađenog prikazivanja svih detalja u srazu bila da se uvjerimo u moć primjene zakona očuvanja. Uistinu je impresivno koliko smo rezultata uspjeli dobiti počevši samo od jednadžbi koje sadrže zakon očuvanja ukupne energije i zakon očuvanja ukupne količine gibanja. Izvod istih rezultata bio bi načelno moguć primjenjujući izravno Newtonove zakone na gibanje tijela, no bio bi to mnogo složeniji postupak.

U ovoj je prilici također zanimljivo izložiti kako je proučavanje sraza kugli odigralo značajnu ulogu u razvoju mehanike, te posebno u stvaranju pojma energije u fizici. Naime, u Newtonovoj se fizici nije spominjala energija, ni kao osnovni, a ni kao izvedeni pojam. Međutim, gotovo istodobno s Newtonovim radom objavljen je jedan Leibnizov članak[1] u kojemu se osporava važnost Descartesove količine gibanja (shvaćene u ono doba kao produkt "veličine" tijela i iznosa brzine, bez isticanja smjera, tj. kao skalarna veličina). Descartes je, naime, smatrao da tijelo nosi u sebi količinu gibanja koju može predati drugome tijelu samo u srazu, a budući da se, po njegovoj općoj filozofskoj misli, svi procesi u prirodi svode na mnoštvo srazova, ukupna bi količina gibanja u Svemiru morala biti konstantna. Leibniz je pak ustvrdio da glavna veličina koju u sebi nosi tijelo u gibanju, odgovara produktu mase i kvadrata brzine tijela, te je tu veličinu nazvao slikovito *"vis viva"* (živa sila). Zahvaljujući upravo toj veličini, smatrao je Leibnitz, tijelo u gibanju ima sposobnost izvesti nekakav učinak prilikom sraza s drugim tijelom. Leibnitz je tako dopunio raniju Galileijevu teoriju po kojoj u prirodi može postojati *"vis mortua"* (mrtva sila) kao napetost koja u određenom trenutku može pokrenuti tijelo u gibanje (npr. nategnut luk za odapinjanje strelice, savinuta šipka ili ploča, itd.). Očito je da su Galilei i Leibnitz bili na dobru putu ka utemeljenju potencijalne i kinetičke energije, iako pod drugim nazivima. Međutim, razvoj događaja nije išao tako glatko.

Razvila se žustra znanstvena polemika, koja se prenijela i u 18. stoljeće. Prijepori su se sveli na dva osnovna pitanja. Prvo je bilo utvrditi koja veličina bolje predstavlja, kako su tada često govorili, "silu tijela u gibanju" uslijed koje tijelo u gibanju ima sposobnost izvesti neki učinak na drugo tijelo prilikom sraza. Drugo je važno pitanje bilo koja veličina ostaje očuvana u svim slučajevima sraza dvaju tijela.

[1] G. W. Leibniz, *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturam* (Kratak prikaz pogreške slavnoga Descartesa i drugih glede prirodnoga zakona), Acta Eruditorum, 1686.

Smatralo se važnim mjeriti udubljenja koja nastanu padom tvrde kuglice na podlogu od mekane gline ili voska jer se veličina tih udubljenja uzimala kao mjera za "silu kuglice u gibanju" tik uoči sraza. No, zaključci nisu uvijek bili jednodušni zbog različitih kriterija za mjerenje veličine udubljenja (dubina na sredini, ili površina udubljenja, ili pak istisnuti volumen). U detaljno promišljenim mjerenjima, nizozemski je fizičar W. 'sGravesande utvrdio da dvije kuglice jednakih veličina, ali različitih masa, načine jednaka udubljenja prilikom pada na podlogu od gline ukoliko se visine s kojih su ispuštene odnose obrnuto proporcionalno njihovim masama. Budući da je još od Galileija bilo poznato da je kvadrat brzine uoči pada tijela na tlo proporcionalan visini s koje je tijelo ispušteno, lako je bilo zaključiti da su kuglice u navedenome 'sGravesandeovu pokusu imale jednake produkte $m_i v_i^2$. Taj je rezultat išao u prilog važnosti Leibnitzove "žive sile" kao veličine koja predstavlja mogući učinak tijela u gibanju. Međutim, u drugim 'sGravesandeovim pokusima izvedenima pomoću glinenih kuglica obješenih na njihala utvrđeno je da se u srazu obje kuglice mogu zaustaviti, što znači da se ukupna "živa sila" izgubi. Tako je ustanovljeno da "živa sila" ipak nije univerzalno očuvana veličina u svim slučajevima, nego samo u posebnom slučaju savršeno elastičnog sraza koji je još ranije bio analizirao Huygens. Konačno, ako se na njihala postave metalne kuglice, a na mjesto njihova sraza postavi glinena ploča, dobiva se rezultat koji kazuje da svaka kuglica izdubi u glinenoj ploči jamicu koja je proporcionalna produktu mase i kvadrata brzine kuglice uoči sraza, no isto tako obje kuglice izgube svoje "žive sile". Jedino je vektorska suma količina gibanja ostajala u svakome slučaju očuvana.

Tijekom navedene znanstvene rasprave u kojoj su značajnije sudjelovali Jean d'Alembert[2] i Ruđer Bošković[3], razbistrilo se da je moguće razmatrati dva različita učinka sile, shvaćene u Newtonovu značenju tog pojma. Jedno je djelovanje sile u vremenu $\vec{F}\Delta t$ koje uzrokuje promjenu količine gibanja, a drugo je djelovanje sile na putu $\vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ kojim se promijeni veličina proporcionalna kvadratu brzine.

Naziv *energija* (grč. *energeia - učinak*) za produkt mase i kvadrata brzine tijela prvi je upotrijebio Thomas Young tek početkom 19. stoljeća. Sredinom 19. stoljeća predložen je prvi put naziv *kinetička energija* za veličinu u kojoj stoji faktor 1/2 ispred produkta mase i kvadrata brzine tijela, te naziv *potencijalna energija* umjesto prijašnje "mrtve sile". Novi termini nisu bili odmah široko prihvaćeni, pa se do kraja 19. stoljeća u mnogim udžbenicima fizike još uvijek upotrebljavao izraz "vis viva", iako s jasnim značenjem koje danas pripisujemo kinetičkoj energiji.

Pojam energije je bitno dopunjen spoznajom da i toplina predstavlja oblik energije, a utvrđeni su i drugi oblici energije. To je omogućilo formuliranje općeg zakona o očuvanju energije, koji je prihvaćen kao jedan od temeljnih zakona fizike.

[2] Jean d'Alembert, *Traité de dynamique*, Paris, 1743.
[3] Rogerius Boscovich, *De viribus vivis*, Romae, 1745.

Poglavlje 7

MEHANIKA KRUTOG TIJELA

U prethodnim smo poglavljima svodili tijela na čestični model, koji je bio uveden već u prvome poglavlju. Čak i kada je bilo očito da se radi o nekom realnom prostranom tijelu, smatralo se da u svakom trenutku svi dijelovi tijela imaju istu brzinu, tako da su njihove putanje jednake po obliku, pa se zapravo mogu predstaviti jednom jedinom putanjom. Ako je neka sila djelovala na tijelo, prešutno se podrazumijevalo da je hvatište sile u centru mase tijela.

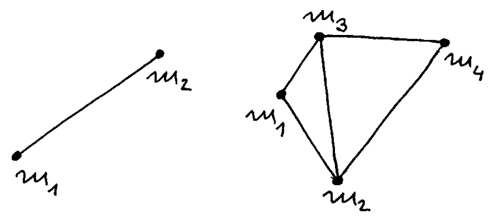
U ovome ćemo poglavlju primijeniti sve dosad naučene zakonitosti i metode mehanike na objekt koji nazivamo *krutim tijelom.* Po definiciji, kruto tijelo se sastoji od mnoštva čestica s *postojanim međusobnim udaljenostima.* To je, razumije se, idealizacija jer je svako tijelo bar malo elastično, tj. razmaci među atomima se daju malo promijeniti pod djelovanjem vanjskih sila, no taj se efekt zanemaruje u razmatranju mehanike krutog tijela.

7.1 Statika krutog tijela

Kada smo u prethodnim poglavljima razmatrali tijelo u čestičnom modelu, sve su sile koje djeluju na tijelo imale hvatište nužno u istoj točki, tj. tamo gdje se nalazi čestica. Zbrajanje sila moglo se tada izvršiti izravno i tako odrediti rezultanta. Kod krutog tijela, koje ima neku rasprostranjenost, situacija nije tako jednostavna. Stoga nam je najprije potrebna jedna uvodna rasprava o svojstvima krutog tijela.

7.1.1 Osnovni pojmovi o krutom tijelu

Za pravilno shvaćanje krutog tijela korisno je najprije uvesti neke jednostavne modele i na njima objasniti nove pojmove, a tek kasnije prijeći na realnu situaciju. Na slici 7.1 prikazan je model krutog tijela sa svega dvije čestice koje imaju mase m_1 i m_2. Vezu među njima održava idealno tanka šipka zanemarive mase, koja osigurava postojanost udaljenosti među česticama. Slika 7.1 prikazuje također i model nešto složenijeg krutog tijela s četiri čestice povezane tankim šipkama. Lako možemo nadalje zamisliti još složenija kruta tijela koja bi se sastojala od mnoštva povezanih čestica.



Slika 7.1: Modelni sustavi krutog tijela koje se sastoji od dvije ili više čestica povezanih čvrstim šipkama idealno zanemarive mase.

Ukupnu masu krutog tijela dobivamo jednostavnim zbrajanjem masa pojedinih čestica

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{7.1}$$

Za razmatranje mehanike krutog tijela potrebno je poznavati i njegov *centar masa*, koji određujemo na isti način kao i u slučaju sustava međusobno nevezanih čestica iz odjeljka 6.3. Najčešće se kruto tijelo razmatra u *homogenom* gravitacijskom polju, koje djeluje na svaku česticu krutog tijela kao vanjska sila proporcionalna masi čestice. No, učinak svih vanjskih sila na sustav čestica je takav kao da ukupna vanjska sila djeluje na ukupnu masu, koja je smještena u centar masa. U ovome se slučaju

radi o ukupnoj gravitacijskoj sili koja djeluje kao da je cijela masa tijela koncentrirana u centru masa, pa se ono naziva *težištem* tijela. Za položaj težišta preuzimamo izraz za centar masa

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{7.2}$$

Napomena: U nehomogenom gravitacijskom polju težište tijela ne mora biti u istoj točki u kojoj se nalazi centar masa. Dijelovi tijela koji se nalaze u jačem gravitacijskom polju imat će veći doprinos određivanju položaja težišta od onih dijelova koji su u slabijem gravitacijskom polju.

Model kontinuirane raspodjele mase

Realno se tijelo sastoji od atoma, a svakome od njih je glavnina mase koncentrirana u jezgri. Dakle, struktura realnog tijela je u svakom slučaju zrnata, te je ispravno govoriti o mnoštvu čestica koje tvore neko realno tijelo. Međutim, kod računanja mnogih veličina zgodnije je sumu po česticama zamijeniti nekim integralom, a za to nam je potrebna kontinuirana funkcija unutar volumena tijela.

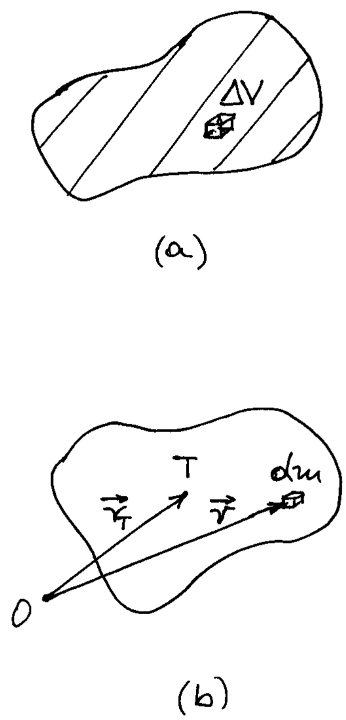
Slika 7.2a prikazuje neko tijelo i u njemu element volumena ΔV oko neke točke. Uzmimo da je element ΔV dovoljno velik da sadrži mnoštvo atoma ukupne mase Δm. S makroskopske točke gledišta, ΔV može biti dovoljno malen da se njegov položaj unutar cijeloga tijela može smatrati dovoljno dobro određenim. Tada definiramo *lokalnu gustoću mase*

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{7.3}$$

Razmotrimo sada susjedne elemente volumena ΔV i mase atoma unutar svakog od tih volumena, te odredimo lokalne gustoće mase. Ako su elementi volumena ΔV odabrani tako da budu dovoljno maleni, lokalne gustoće mase u susjednim elementima volumena razlikovat će se tek neznatno, pa možemo niz diskretnih vrijednosti zamijeniti kontinuiranom funkcijom $\rho(\vec{r})$, koju nazivamo *gustoćom mase.* Tada možemo pisati u diferencijalnoj formi

$$dm = \rho(\vec{r})\, dV \tag{7.4}$$

Slika 7.2b prikazuje tijelo u kojem je infinitezimalni element mase dm na položaju $\vec{r}$ u odnosu prema proizvoljno odabranom ishodištu O. Položaj težišta $\vec{r}_T$ računa se po formuli



Slika 7.2: (a) Tijelo unutar kojega je identificiran maleni dio volumena ΔV. (b) Skica za izračunavanje položaja težišta tijela u modelu kontinuirane gustoće mase.

$$\vec{r}_T = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{\int_V dm} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV \tag{7.5}$$

koja je dobivena prelaskom od sume u jednadžbi (7.2) na integral.

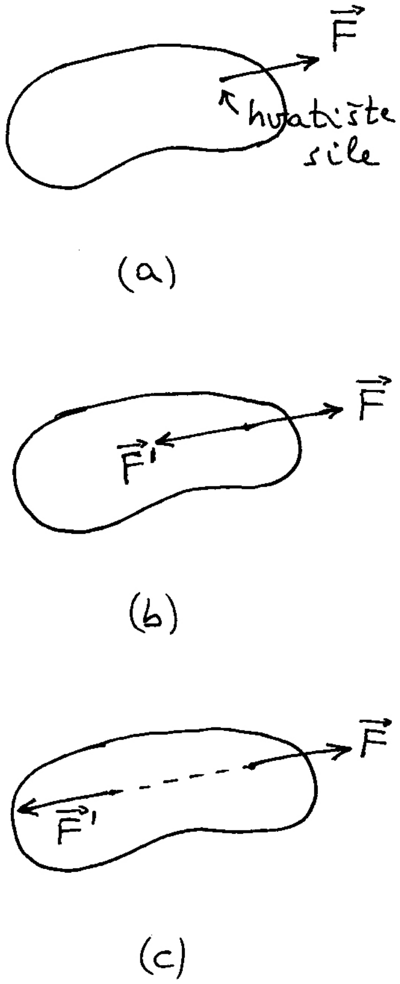
Napomena: Članovi $m_i \vec{r}_i$ prelaze u infinitezimalne elemente $\vec{r} dm$ jer se masa dm nalazi na položaju $\vec{r}$, kao što se masa m_i nalazi na položaju $\vec{r}_i$. Bilo bi potpuno pogrešno napisati $m d\vec{r}$, jer bi to značilo da se masa m pomaknula za $d\vec{r}$.

7.1.2 Sila kao klizni vektor u krutom tijelu

Kod sustava nevezanih čestica, koji smo razmatrali u odjeljku 6.3, mogli smo zamisliti da vanjska sila djeluje na neku od čestica i uzrokuje promjenu njena gibanja, bez utjecaja na ostale čestice u sustavu. Kod krutog tijela, situacija je potpuno različita. Možemo i sada zamisliti da vanjska sila

djeluje izravno na neku od čestica krutog tijela, no djelovanje te sile neminovno ima utjecaja i na sve druge čestice u tijelu jer su međusobne udaljenosti čestica postojane.

Napomena: Postojanost međusobnih udaljenosti čestica u krutom tijelu ostvaruje se putem unutarnjih sila. Kod krutog tijela zanemarujemo malene deformacije koje mogu pritom nastati.



Slika 7.3: (a) Vanjska sila $\vec{F}$ djeluje izravno na neku česticu u tijelu. Tu točku smatramo hvatištem sile. (b) Djelovanje sile $\vec{F}$ na tijelo možemo uravnotežiti drugom vanjskom silom $\vec{F}\,'$ koja djeluje na istu česticu tijela kao i sila $\vec{F}$. (c) Ravnoteža se postiže i kada sila $\vec{F}\,'$ djeluje na bilo koju drugu česticu na pravcu nositelju sile $\vec{F}$ jer je po definiciji krutog tijela razmak među česticama nepromjenljiv.

Razmotrimo detaljnije ovo pitanje. Točka u kojoj izravno djeluje neka vanjska sila $\vec{F}$ naziva se *hvatište* sile. Na slici 7.3a prikazano je neko tijelo na koje djeluje vanjska sila u proizvoljno odabranom hvatištu. Postavlja se pitanje kako možemo uravnotežiti djelovanje ove sile.

Sigurno je da djelovanje sile $\vec{F}$ možemo uravnotežiti postavljanjem protusile $\vec{F}\,' = -\vec{F}$, koja bi djelovala na istu česticu tijela, tj. imala bi hvatište u istoj točki. Naime, tada je legitimno zbrojiti dvije sile, jer obje djeluju na istu česticu, a rezultanta tih sila iščezava, pa nema nikakva učinka. To je prikazano a slici 7.3b.

Međutim, ravnotežu možemo postići i postavljanjem protusile $\vec{F}\,'$ tako da ona izravno djeluje na *neku drugu* česticu tijela, s time da se ta čestica nalazi negdje na pravcu nositelju sile $\vec{F}$, kako to prikazuje slika 7.3c. Sile $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ nastoje razmaknuti dvije čestice u kojima su im hvatišta, no to im ne uspijeva jer se radi o krutom tijelu. Prema tome, sila $\vec{F}\,'$ će imati isti učinak kao i u slučaju na slici 7.3b.

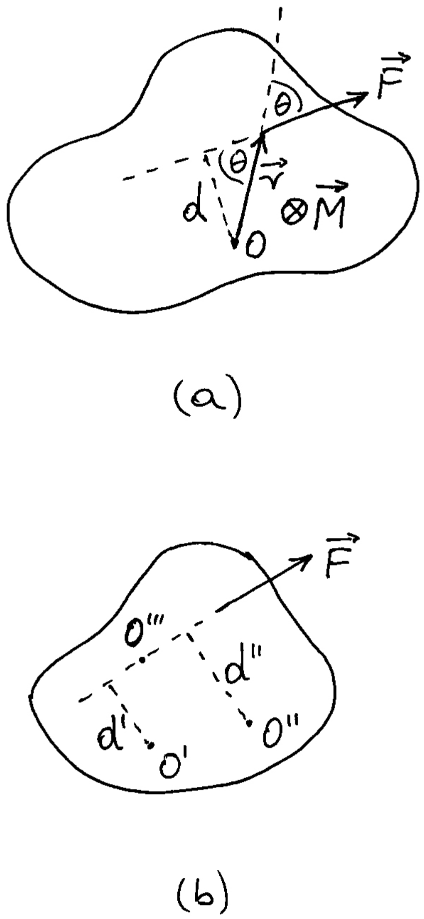
Lako je zaključiti da i silu $\vec{F}$ možemo pomicati slobodno duž njena pravca nositelja, a učinak na tijelo će ostati neizmijenjen. Zbog tog svojstva kažemo da je vanjska sila na kruto tijelo *klizni vektor.*

Moment sile na kruto tijelo

Razmotrimo još i moment vanjske sile $\vec{F}$ s obzirom na proizvoljnu točku O, kako prikazuje slika 7.4a. Hvatište sile nalazi se na udaljenosti $\vec{r}$ od točke O, pa je moment sile $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Smjer momenta sile je okomit na ravninu u kojoj leže vektori $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a određuje se pravilom desne ruke. Za iznos momenta sile imamo

$$M = F\, r \sin\theta = F\, d \tag{7.6}$$

gdje je θ kut između vektora $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a d je najkraća udaljenost točke O od pravca nositelja sile, koja se obično naziva *krak sile.* Iz slike je vidljivo da se, pomicanjem sile $\vec{F}$ duž pravca nositelja, mijenjaju r i θ, ali se ne mijenja $d = r\sin\theta$, pa se ne mijenja ni iznos momenta sile, a ne mijenja se ni njegov smjer. Prema tome, sila ima svojstvo kliznog vektora u krutom tijelu i u pogledu zadržavanja neizmijenjenog momenta sile s obzirom na neku odabranu točku.



Slika 7.4: (a) Moment vanjske sile $\vec{F}$ s obzirom na proizvoljno odabranu točku O. (b) Jedna te ista sila stvara različite momente oko različitih odabranih točaka, npr. O', O'' i O'''.

Kako možemo opaziti učinak momenta sile s obzirom na neku točku?

Zamislimo da je kruto tijelo učvršćeno u točki O. Tada moment sile s obzirom na tu točku izražava nastojanje sile da zakrene tijelo oko nje.

Jedna te ista sila ima različite momente s obzirom na različite točke. Slika 7.4b prikazuje silu $\vec{F}$ i tri različite točke O', O'' i O'''. Zbog različitih krakova, momenti sila se razlikuju $Fd' \neq Fd''$, dok moment sile s obzirom na točku O''' iščezava, jer se ta točka nalazi na pravcu nositelju sile, pa je $d''' = 0$.

Ovo nas razmatranje uči da silu smijemo pomicati po njenu pravcu nositelju, ali je nikako ne smijemo translatirati na neki drugi paralelan pravac, budući da se time promijeni moment sile u odnosu na istu odabranu točku. To vrijedi za svaku točku koju bismo proizvoljno odabrali za određivanje momenta sile.

Razmotrimo sada pitanje uspostave ravnoteže u pogledu zakretanja tijela. U tu svrhu, moguće je postaviti protusilu $\vec{F}' = -\vec{F}$ na istome pravcu nositelju, tako da stvara moment sile $\vec{M}' = -\vec{M}$. Momenti sila nastoje jednako zakrenuti tijelo na suprotne strane, pa se njihova djelovanja poništavaju i tijelo ostaje u ravnoteži. Uvjet ravnoteže je u ovome slučaju ispunjen s obzirom na zakretanje oko bilo koje točke.

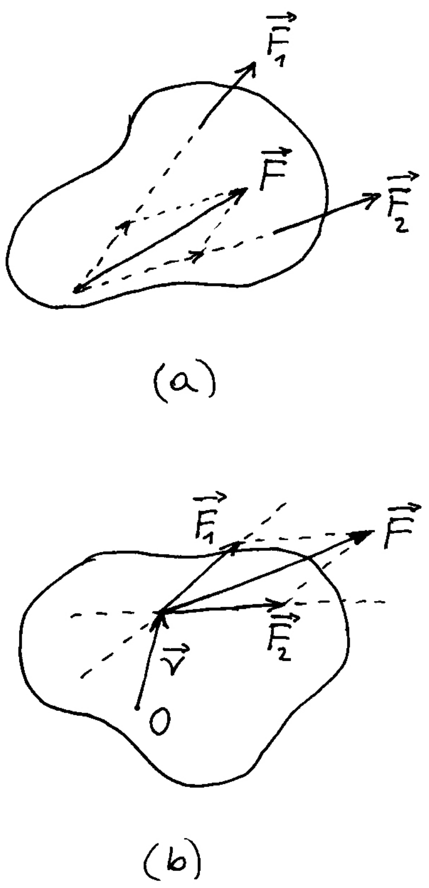
Napomena: Postavljanjem druge sile na neki drugi pravac nositelj, moglo bi se također postići poništavanje momenata sila s obzirom na odabranu točku u tijelu, ali to ne bi vrijedilo za sve druge točke u tijelu. Time se ne bi postigla opća ravnoteža. O tome će još biti riječi u ovome odjeljku.

7.1.3 Zbrajanje sila koje djeluju na kruto tijelo

Pođimo od prikaza na slici 7.5a gdje se vide dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje djeluju u različitim hvatištima na nekom tijelu. Postavlja se pitanje možemo li djelovanje tih dviju sila zamijeniti jednom jedinom silom, koja bi imala isti učinak na kruto tijelo kao što ga daju dvije sile. Problem nije tako jednostavan da bismo mogli samo primijeniti poznato pravilo o zbrajanju vektora. Potrebno je točno odrediti i pravac nositelj rezultante jer u protivnom učinak na kruto tijelo ne bi bio isti kao što to daju početne dvije sile.

Poslužimo se svojstvom kliznog vektora za sile u krutom tijelu tako da im hvatišta dovedemo u točku gdje se sijeku dva pravca nositelja (slika 7.5a). Tada možemo reći da obje sile djeluju na *istu* česticu krutoga tijela, pa ih možemo vektorski zbrojiti. Time smo nedvosmisleno dobili i pravac nositelj rezultantne sile $\vec{F}$. Nakon toga, možemo rezultantu $\vec{F}$ pomicati po njenom pravcu nositelju u razna druga hvatišta, bez promjene učinka na kruto tijelo.

Napomena: Sjecište pravaca nositelja sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ može se nalaziti i izvan volumena tijela. Formalno izvedemo vektorsko zbrajanje sila u toj točki, te zatim pomaknemo rezultantu duž njenog pravca nositelja tako da hvatište bude na nekoj od točaka unutar prostiranja tijela.



Slika 7.5: (a) Postupak određivanja rezultante dviju sila koje djeluju na kruto tijelo. Rezultanta ima utvrđen iznos i smjer, te pravac nositelj na kojem djeluje. Učinak rezultante na kruto tijelo može u potpunosti zamijeniti zajednički učinak dviju izvornih sila. (b) Moment rezultante dviju sila oko bilo koje odabrane točke O jednak je zbroju momenata izvornih sila oko iste točke.

Razmotrimo i pitanje ekvivalentnosti momenata sila s obzirom na neku proizvoljnu točku O. Na slici 7.5b prikazane su sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, te rezultanta $\vec{F}$, sve s hvatištem u istoj točki na udaljenosti $\vec{r}$ od O. Lako je utvrditi da vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 + \vec{M}_2 &= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 = \vec{r}\times\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\\ &= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M} \qquad (7.7)\end{aligned}$$

Moment rezultantne sile oko proizvoljne točke O jednak je zbroju momenata dviju sila oko iste točke. Drugim riječima, kada bi kruto tijelo bilo učvršćeno u točki O, rezultantna sila $\vec{F}$ imala bi isti učinak na zakretanje krutog tijela kao i sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zajedno.

Ako imamo više sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_N$, možemo ih postupno zbrajati $(\vec{F}_1+\vec{F}_2)+\vec{F}_3$, zatim $(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)+\vec{F}_4$, itd. Ovaj postupak možemo provesti do kraja ako sile koje zbrajamo nisu paralelne, pa uvijek možemo naći sjecište pravaca nositelja. Rezultat je jedna jedina sila $\vec{F}$, koja ima jednoznačno određen iznos i pravac nositelj.

Kako riješiti problem kada su sile paralelne?

Analizirajmo zbroj dviju sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje imaju stalne iznose, ali ih možemo zakretati tako da kut među njima postaje sve manji. Sjecište pravaca nositelja se sve više udaljava, a iznos rezultante $\vec{F}$ teži prema zbroju iznosa $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. U graničnom slučaju, dobivamo potpuno paralelne sile za koje očito mora vrijediti točno

$$F = F_1 + F_2 \qquad (7.8)$$

gdje smo sile napisali kao algebarske veličine podrazumijevajući dogovorno da je pozitivan smjer onaj duž kojega je položen vektor sile $\vec{F}_1$. Iznos rezultante smo lako dobili, no problem je kako odrediti pravac nositelj rezultante u situaciji u kojoj nema sjecišta pravaca nositelja dviju sila.

Poslužimo se u tu svrhu pravilom po kojemu moment rezultantne sile $\vec{F}$ mora dati po svemu jednak učinak na kruto tijelo kao što ga daju dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zajedno. Odaberimo učvršćenu točku O u ravnini koju određuju sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, kako pokazuje slika 7.6a. Najkraće udaljenosti točke O od pravaca nositelja tih sila iznose d_1 i d_2. U danom razmještaju, obje sile nastoje zakrenuti tijelo oko točke O u istome smjeru, pa se isto očekuje i od rezultante. Udaljenost d pravca nositelja rezultante od iste točke O možemo izračunati uvažavajući uvjet

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad \Longrightarrow \quad Fd = F_1 d_1 + F_2 d_2 \qquad (7.9)$$

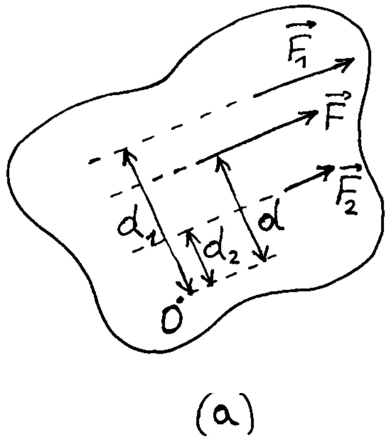
gdje i krakove sila uzimamo kao algebarske veličine smatrajući dogovorno da je pozitivan smjer od točke O prema pravcu nositelju sile $\vec{F}_1$.

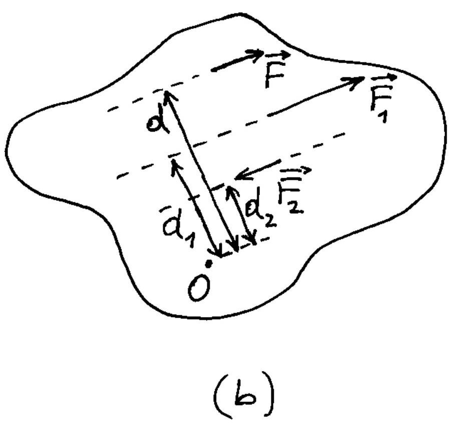
Napomena: Izborom pozitivnog smjera za algebarsko računanje sile i pozitivnog smjera za algebarsko računanje kraka sile, utvrdili smo zapravo pozitivan smjer za algebarsko računanje momenta sile.

Iz jednadžbi (7.8) i (7.9) nalazimo rezultat

$$d = \frac{F_1 d_1 + F_2 d_2}{F_1 + F_2} \tag{7.10}$$

Pravac nositelj rezultantne sile leži između dviju sila i to bliže onoj sili koja je po iznosu veća. Ako npr. zamislimo da se sila F_2 smanjuje prema nuli, rezultanta $\vec{F}$ primiče se sili $\vec{F}_1$. To se može utvrditi i uvidom u jednadžbu (7.10), gdje za $F_2 \to 0$ dobivamo $d \to d_1$.





Slika 7.6: (a) Rezultanta dviju paralelnih sila istoga smjera leži na pravcu nositelju između tih dviju sila, bliže onoj koja je veća po iznosu. Točan položaj pravca nositelja određuje se iz uvjeta jednakosti momenata sila oko proizvoljno odabrane točke O. (b) Rezultanta dviju antiparalelnih sila leži izvan pojasa koji omeđuju te sile i to s one strane gdje je veća od dviju sila.

Napomena: U određivanju pravca nositelja rezultante odabrali smo proizvoljno točku O. Algebarske vrijednosti d_1, d_2 i d mogu se promijeniti ako odaberemo neku drugu točku s obzirom na koju ćemo određivati momente sila, no dobiveni položaj pravca nositelja u odnosu prema pravcima nositeljima sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ne će se promijeniti.

Ako zamislimo da sila $\vec{F}_2$ promijeni smjer tako da nastanu dvije antiparalelne sile (slika 7.6b), možemo u prethodnim formulama samo uzeti vrijednosti $F_2 < 0$. Da bismo mogli bolje pratiti nastalu situaciju, prikladno je pisati $F_2 = -|F_2|$, tako da prethodne formule postaju

$$F = F_1 - |F_2| \tag{7.11}$$

$$d = \frac{F_1 d_1 - |F_2| d_2}{F_1 - |F_2|} \tag{7.12}$$

Pravac nositelj rezultante $\vec{F}$, sada je izvan pojasa koji je omeđen pravcima nositeljima sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ i to s one strane gdje je veća po iznosu sila. U to se lako uvjeriti ako točku O postavimo na pravac nositelj sile $\vec{F}_2$, tako da je $d_2 = 0$. Ako je $F_1 > |F_2|$ dobiva se $d > d_1$. To je lako razumjeti jer je rezultanta po iznosu manja ($F < F_1$), pa mora djelovati na većem kraku da bi stvorila isti moment sile kao sila $\vec{F}_1$ koja djeluje na manjem kraku. Sila $\vec{F}_2$ ne daje moment sile u ovome odabiru točke O.

U slučaju $F_1 < |F_2|$, imamo $d < 0$, tj. pravac nositelj rezultante nalazi se u odnosu prema točki O na suprotnoj strani od sile $\vec{F}_1$.

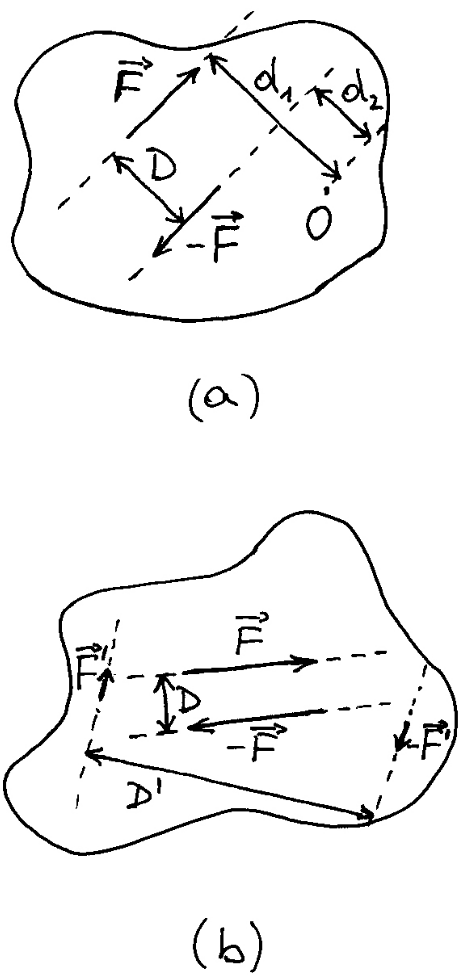
7.1.4 Par sila

Nastavimo prethodno razmatranje antiparalelnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, s time da iznos druge sile mijenjamo tako da postaje sve bliži iznosu prve sile ($|F_2| \to F_1$). Prema jednadžbi (7.11), iznos rezultante iščezava ($F \to 0$), dok se prema jednadžbi (7.12) pravac nositelj rezultante udaljava u beskonačnost ($d \to \infty$).

U graničnom slučaju ($|F_2| = F_1$), imamo dvije antiparalelne sile točno jednakih iznosa, koje djeluju na paralelnim pravcima nositeljima. Takav sustav nazivamo *par sila* ili *spreg.* Rezultanta para sila trebala bi imati iščezavajući iznos, a pravac nositelj bi morao biti u beskonačnosti. To nije realno

ostvariva sila, pa kažemo da se par sila ne može nadomjestiti jednom jedinom rezultantnom silom.

Jedini učinak para sila na kruto tijelo očituje se u momentu sile. Na slici 7.7a prikazan je par sila $\vec{F}$ i $-\vec{F}$ na paralelnim pravcima nositeljima, međusobno udaljenim za D. U odnosu prema proizvoljno odabranoj točki O, svaka od sila stvara moment sile. Oni su suprotnih smjerova, a iznosi im se razlikuju jer su krakovi sila nejednaki. Za moment para sila dobivamo u algebarskom zapisu



Slika 7.7: (a) Dvije antiparalelne sile jednakih iznosa na međusobno razmaknutim pravcima nositeljima nazivamo *parom sila*. Moment određenog para sila jednak je s obzirom na bilo koju točku. (b) Djelovanje para sila na kruto tijelo može se uravnotežiti jedino nekim drugim parom sila koji ima jednak po iznosu i suprotan po smjeru moment sila.

$$M = Fd_1 - Fd_2 = F(d_1 - d_2) = FD \qquad (7.13)$$

Moment para sila jednak je produktu iznosa (jedne) sile i međusobnog razmaka pravaca nositelja dviju sila.

Vidimo da moment para sila ne ovisi o izboru točke O. To znači da će dani par sila jednako nastojati zakrenuti kruto tijelo oko bilo koje učvršćene točke.

Možemo li ipak nečim nadomjestiti dani par sila?

Vidjeli smo da par sila ne možemo nadomjestiti nekom rezultantnom silom, ali je moguće nadomjestiti ga drugim parom sila koji ima isti moment. To je prikazano na slici 7.7b. Sile $\vec{F}^{\,'}$ i $-\vec{F}^{\,'}$ razmaknute na udaljenost $D^{'}$ čine nadomjesni par sila ako je zadovoljen uvjet

$$F^{'}D^{'} = FD \qquad (7.14)$$

Provedeno razmatranje relevantno je i za mogućnost uspostave ravnoteže kod djelovanja nekog para sila na kruto tijelo. Ravnotežu ne možemo uspostaviti jednom protusilom, nego je za to potreban neki drugi par sila, kojemu je moment jednak po iznosu, ali suprotnog smjera od momenta prvog para sila.

7.1.5 Uvjeti ravnoteže krutog tijela

Da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži, moraju biti ispunjena dva uvjeta. Prvi je uvjet da suma svih vanjskih sila, koje djeluju na tijelo, mora iščezavati

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (7.15)$$

Drugi uvjet kaže da suma svih momenata sila, koje djeluju na tijelo, mora iščezavati

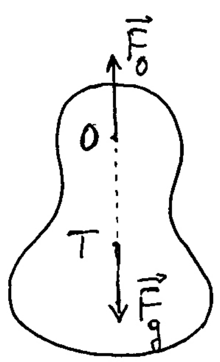
$$\sum_k \vec{M}_k = 0 \qquad (7.16)$$

Prema potrebi, sile i momente sila možemo rastavljati na komponente u povoljno odabranom koordinatnom sustavu. Tada uvjete ravnoteže zapisujemo za komponente duž svake od osi zasebno.

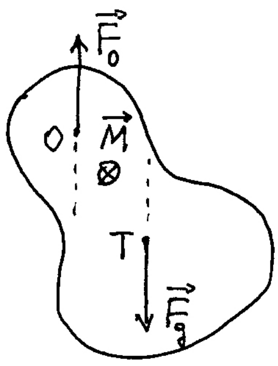
Ravnoteža obješenog tijela

Svakodnevno možemo uočiti poneko tijelo obješeno o neki klin ili kuku. Kada tijelo miruje, postignuta je ravnoteža, no ako ga zakrenemo oko objesišta i zatim pustimo, ono će se vraćati u položaj ravnoteže. Razmotrimo to pitanje kod tijela prikazanog na slici 7.8. Na tijelo uvijek djeluju dvije vanjske sile. Jedna od njih je gravitacijska sila $\vec{F}_g$ kojom Zemlja privlači tijelo. Kako smo ranije obrazlagali, hvatište te sile je u težištu tijela. Druga sila $\vec{F}_O$ je ona kojom klin u objesištu djeluje na tijelo prema gore.

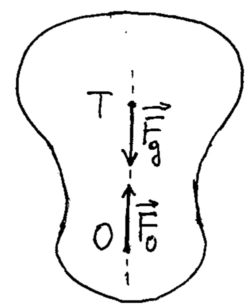
Napomena: Za svaku od tih sila postoji sila reakcije. To su sile kojom obješeno tijelo djeluje na Zemlju, odnosno na klin. Njih ovdje ne razmatramo jer o njima ne ovisi ravnoteža tijela koja nas sada interesira.



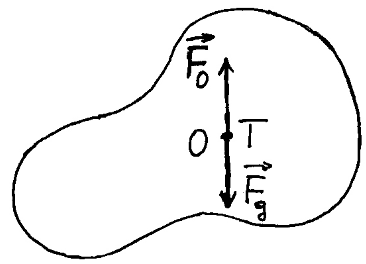
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 7.8: (a) Obješeno tijelo nalazi se u položaju stabilne ravnoteže kada je težište vertikalno ispod objesišta. (b) Kada je obješeno tijelo otklonjeno od položaja stabilne ravnoteže, javlja se moment para sila koji ga nastoji zakrenuti prema položaju stabilne ravnoteže. (c) Kada se težište tijela dovede točno iznad objesišta, nema momenta sila na tijelo, no radi se o labilnoj ravnoteži. Kod i najmanjeg otklona od tog položaja nastaje moment sile koji nastoji zakrenuti tijelo dalje od položaja labilne ravnoteže u smjeru prema položaju stabilne ravnoteže. (d) Kada je tijelo obješeno u samome težištu, ono se nalazi u indiferentnoj ravnoteži jer moment sile na tijelo iščezava u bilo kojoj od mogućih orijentacija tijela.

Kada se težište tijela nalazi točno ispod objesišta, tijelo je u ravnoteži (slika 7.8a). Tada moraju biti ispunjena oba uvjeta ravnoteže. Ako nam je poznata masa tijela, možemo izračunati $F_g = mg$, a sila objesišta na tijelo mora biti po iznosu $F_O = F_g$, kako bi bio zadovoljen prvi uvjet ravnoteže. Drugi uvjet ravnoteže je ispunjen time što pravac nositelj svake od sila prolazi kroz točku O, pa moment sile iščezava. Alternativno bismo mogli sile $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_O$

tretirati kao par sila, te utvrditi da moment para sila iščezava jer se obje sile nalaze na istome pravcu nositelju.

Ako zakrenemo tijelo oko objesišta, težište više nije vertikalno ispod njega, pa nema ravnoteže (slika 7.8b). Razumije se, ako bismo željeli zadržati tijelo u takvome položaju, morali bismo na tijelo djelovati još jednom vanjskom silom (nije prikazana na slici 7.8b). U trenutku otpuštanja tijela, na njega djeluju samo sile $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_O$ prikazane na slici 7.8b. One zadovoljavaju prvi uvjet ravnoteže, ali ne i drugi. Moment sile $\vec{F}_g$ oko točke O zakreće tijelo prema položaju ravnoteže. Alternativno možemo uzeti sile $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_O$ kao par sila, pa reći da moment tog para sila zakreće tijelo.

Napomena: Nakon trenutka otpuštanja, kada tijelo stekne neku trenutnu brzinu rotacije, potrebna je odgovarajuća centripetalna sila kojom klin u objesištu djeluje na tijelo suprotno od smjera u kojem se nalazi težište. Tu silu treba dodati sili $\vec{F}_O$ prikazanoj na slici 7.8b. O rotaciji tijela oko učvršćene osi bit će govora detaljnije u sljedećem odjeljku.

Zakrenemo li tijelo tako da mu težište dođe točno iznad objesišta, nastaje ponovo ravnoteža (slika 7.8c) jer su ispunjena oba uvjeta. No, postoji bitna razlika između položaja ravnoteže na slikama 7.8a i c. Napravi li se bilo koji, pa i najmanji, otklon od nekog od položaja ravnoteže, nastaje moment sile $\vec{F}_g$ koji zakreće tijelo uvijek prema onome položaju ravnoteže u kojemu je težište ispod objesišta. Zato kažemo da je u tome položaju ostvarena *stabilna ravnoteža*(slika 7.8a). Položaj u kojemu je pak težište iznad objesišta predstavlja *labilnu ravnotežu.* Tijelo u njemu može opstati samo kada je savršeno postavljeno, a to je u praksi gotovo nemoguće.

Postoji i *indiferentna ravnoteža* kada tijelo može biti zakrenuto oko klina za bilo koji kut i ostaje u tom položaju jer nema razlike među raznim položajima. Naime, svaki od tih položaja predstavlja ravnotežu. To se postiže kada je objesište točno u težištu tijela, kako prikazuje slika 7.8d. Sile $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_O$ djeluju trajno u istoj točki tijela, a rezultanta tih sila iščezava, pa su ostvarena oba uvjeta ravnoteže.

Ravnoteža tijela na horizontalnoj podlozi

Kada se tijelo nalazi na horizontalnoj podlozi, njegovo je težište uvijek iznad uporišta, pa se postavlja pitanje ravnoteže. Tijelo nepravilna oblika može imati više različitih načina ostvarivanja stabilne ravnoteže, tj. one u koju se tijelo vraća nakom malenog otklona. U svakome od stabilnih ravnotežnih položaja, tijelo ostvaruje barem tri kontakta (uporišta) s horizontalnom podlogom. Težište tijela nalazi se negdje iznad površine trokuta koje čine tri uporišta. Ako uspijemo zakrenuti tijelo oko spojnice dvaju uporišta tako da težište tijela dođe točno iznad te linije, nastaje labilna ravnoteža. Dovoljan je samo maleni otklon od položaja labilne ravnoteže da tijelo počne padati prema prijašnjem, ili nekom drugom položaju stabilne ravnoteže.

Kugla na horizontalnoj podlozi. Na slici 7.9a prikazana je homogena kugla kojoj je težište u njenom geometrijskom središtu. Na kuglu djeluje gravitacijska sila $\vec{F}_g$ s hvatištem u težištu i sila normalne reakcije podloge $\vec{N}$ s hvatištem u dodirnoj točki kugle s podlogom. One su jednakog iznosa, ali suprotnih smjerova na istome pravcu nositelju. Stoga su ostvarena oba uvjeta ravnoteže.

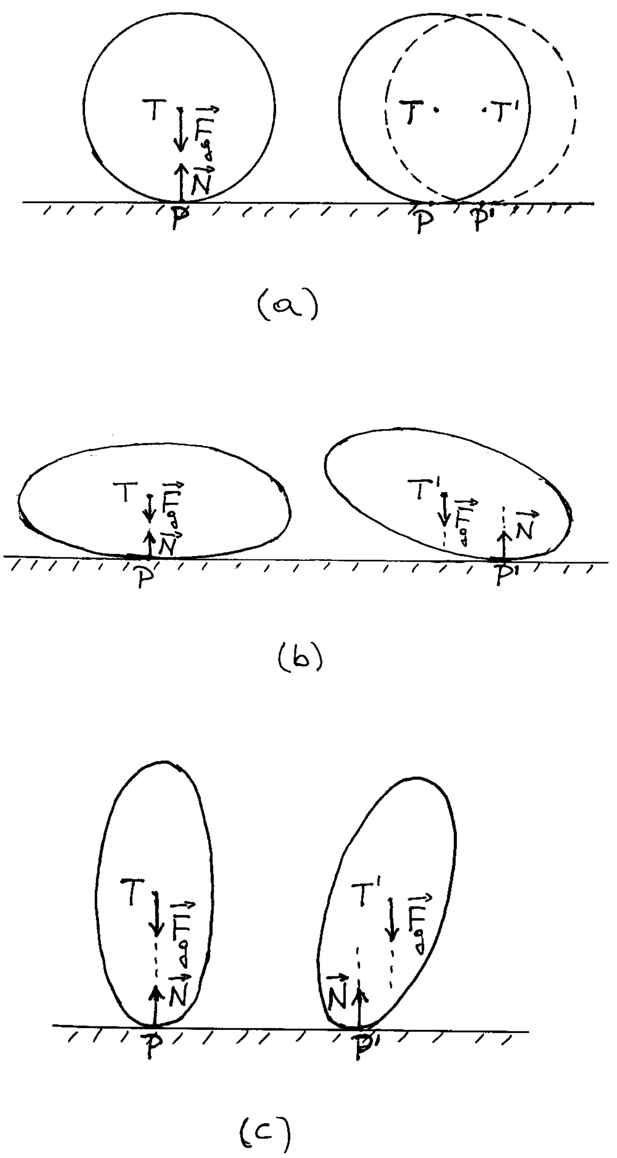
Ako malo otkotrljamo kuglu u nekom smjeru, promijeni se dodirna točka kugle s podlogom (slika 7.9a), no težište se opet nalazi iznad dodirne točke, pa je stalno ispunjen uvjet ravnoteže. To znači da je kugla na horizontalnoj podlozi u indiferentnoj ravnoteži.

Možemo primijetiti da se kod kotrljanja kugle dodirna točka pomiče na horizontalnoj podlozi za isti iznos kao i težište iznad nje. Razlog tome leži u geometrijskom odnosu po kojemu je udaljenost težišta od dodirne točke jednaka radijusu zakrivljenosti kugline plohe na kojoj se ostvaruje dodir s podlogom.

Jajoliko tijelo na horizontalnoj podlozi. Iskustveno je poznato da se stabilna ravnoteža jajolikog tijela ostvaruje u položaju koji prikazuje slika 7.9b. Razlog leži u tome što je udaljenost težišta od dodirne točke manja od radijusa zakrivljenosti površine jajolikog tijela u okolini dodirne točke, tako da se kod malenog nagiba tijela dodirna točka na horizontalnoj podlozi pomakne više nego što se pomakne težište tijela. Stoga sila $\vec{F}_g$ stvara moment

sile oko dodirne točke u smjeru koji odgovara povratku jajolikog tijela u stanje stabilne ravnoteže.

Ako pak postavimo jajoliko tijelo kao na slici 7.9c, ostvarena je labilna ravnoteža, koja nam je također iskustveno poznata. U tom je slučaju težište udaljenije od dodirne točke, nego što iznosi radijus zakrivljenosti jajolikog tijela u okolini dodirne točke. Stoga se kod zakretanja tijela težište pomakne više nego dodirna točka, pa sila $\vec{F}_g$ stvara moment koji dalje zakreće tijelo prema položaju stabilne ravnoteže.



Slika 7.9: (a) Homogena kugla na horizontalnoj podlozi nalazi se uvijek u položaju indiferentne ravnoteže jer je težište uvijek točno iznad dodirne točke s podlogom, pa moment sile na kuglu iščezava. (b) Jajoliko tijelo ima položaj stabilne ravnoteže u kojemu je radijus zakrivljenosti lokane dodirne plohe veći od udaljenosti težišta od dodirne točke. (c) U položaju labilne ravnoteže jajolikog tijela radijus zakrivljenosti lokalne dodirne plohe manji je od udaljenosti težišta od dodirne točke.

Ravnoteža na sferno udubljenoj podlozi

Dobro je poznato da će se kuglica, postavljena na sferno udubljenu podlogu, otkotrljati prema najnižoj točki. Moment sile koji pokreće to gibanje može se analizirati na način kao u prethodnim primjerima. Također je moguće analizirati slučajeve jajolikog tijela na takvoj podlozi, no time se ne ćemo dalje baviti.

Ravnoteža u jednostavnim konstrukcijama

Sastavne dijelove jednostavnih konstrukcija možemo ponekad smatrati krutim tijelima, te primijeniti uvjete ravnoteže da bismo odredili nepoznate sile. Kroz dva primjera pokazat ćemo kako se praktično primjenjuju uvjeti ravnoteže.

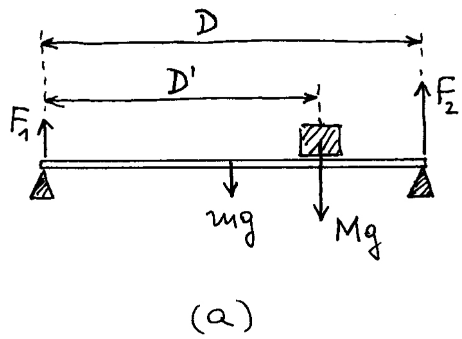
Greda s teretom na potpornju. Slika 7.10a prikazuje horizontalnu gredu mase m i duljine D položenu na krajevima na dva potpornja. Greda je opterećena utegom mase M postavljenim na udaljenosti D' od lijevog kraja. Postavlja se pitanje kolika su opterećenja na potpornjima, odnosno kolike su sile F_1 i F_2 na slici 7.10a.

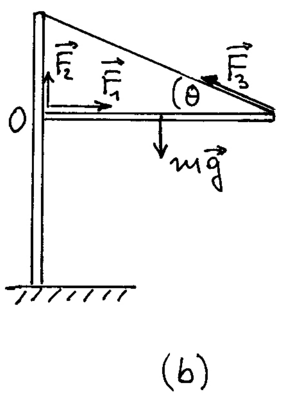
Ponajprije moramo razabrati na koje bi tijelo bilo povoljno primijeniti uvjete ravnoteže da bismo dobili odgovor na postavljeno pitanje. Uvidom u sliku 7.10a nalazimo da je greda jedino tijelo koje povezuje nepoznate sile F_1 i F_2 s ostalim poznatim silama. Primjenjujući prvi uvjet ravnoteže na gredu, dobivamo

$$F_1 + F_2 = mg + Mg \tag{7.17}$$

gdje smo silu kojom teret djeluje na gredu označili kao Mg. Izvorno se radi o sili kojom Zemlja privlači teret, no kada teret miruje na gredi, onda on djeluje na gredu jednakom silom.

Kada primjenjujemo drugi uvjet ravnoteže, moramo odabrati povoljnu točku s obzirom na koju ćemo računati momente sila. U ovome slučaju





Slika 7.10: (a) Ravnoteža opterećene grede na krajnjim potpornjima. (b) Ravnoteža grede koju odrava nosivi stup i napeto čelično uže.

zgodno je odabrati jedno od uporišta grede tako da sila koja djeluje u tome uporištu ne daje moment sile. Za izbor lijevog uporišta, imamo

$$F_2 D = mg\frac{D}{2} + MgD' \tag{7.18}$$

Ovo je jednadžba s jednom nepoznanicom F_2, koju možemo odmah odrediti. Drugu nepoznanicu možemo odrediti uvrštavanjem razultata za F_2 u jednadžbu (7.17).

Greda na stupu s čeličnim užetom. U drugom primjeru na slici 7.10b, potrebno je odrediti napetost čeličnog užeta koje ide od vrha stupa do kraja grede. Poznata je masa m grede i kut θ što ga čelično uže čini s horizontalnom gredom. Greda je drugim krajem učvršćena za stup tako da on djeluje na gredu nekom silom, koju pak možemo rastaviti na horizontalnu komponentu $\vec{F}_1$ i vertikalnu komponentu $\vec{F}_2$. Prvi uvjet ravnoteže primjenjujemo zasebno na horizontalne i vertikalne komponente svih sila koje djeluju na gredu

$$F_1 = F_3 \cos\theta \tag{7.19}$$

$$mg = F_2 + F_3 \sin\theta \tag{7.20}$$

Za primjenu drugog uvjeta ravnoteže, povoljno je odabrati točku gdje je horizontalna greda učvršćena za stup

$$mg\frac{D}{2} = (F_3 \sin\theta)\, D \tag{7.21}$$

Iz ovog uvjeta neposredno možemo odrediti silu F_3 koja predstavlja napetost čeličnog užeta

$$F_3 = \frac{mg}{2\sin\theta} \tag{7.22}$$

Vidimo da nam za određivanje napetosti užeta nije bilo potrebno poznavati silu kojom stup djeluje na horizontalnu gredu. No ako želimo, možemo iz jednadžbi (7.19) i (7.20) odrediti obje komponente F_1 i F_2.

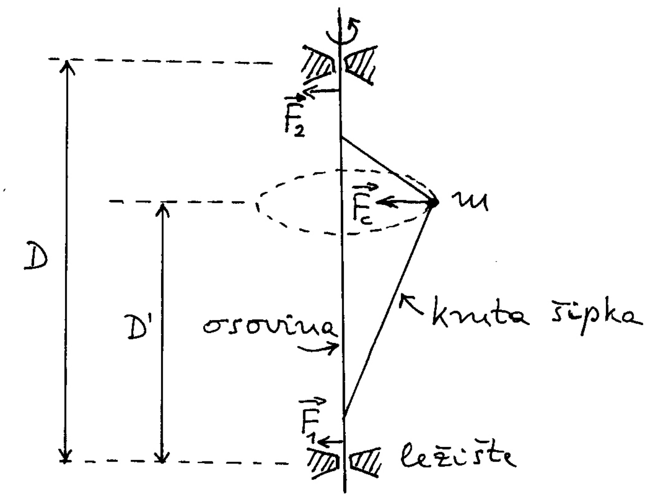
7.2 Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

Iskustveno nam je poznato da tijelo, općenito nepravilnog oblika, može rotirati oko proizvoljno zadane osi ukoliko je ona nekako učvršćena. Razmotrimo ovo pitanje malo detaljnije da bismo spoznali čemu zapravo služi učvršćenje osi, te kakve se sile tu javljaju. U početku ne ćemo uzimati u obzir gravitacijsku silu na kruto tijelo nego samo sile vezane uz samu rotaciju, a kasnije ćemo razmotriti i učinak gravitacijske sile.

7.2.1 Uvjeti rotacije oko nepomične osi

Krenimo od jednostavnog modela krutog tijela, kojemu je praktički sva masa koncentrirana u malenoj kugli, a ona je pak vezana krutim šipkama zanemarive mase na tanku osovinu, također zanemarive mase (slika 7.11). Da bi os rotacije bila nepomična u prostoru, potrebna su barem dva učvršćena ležišta za osovinu. U svrhu dokazivanja ove tvrdnje, pretpostavimo da takvo kruto tijelo rotira oko osi konstantnom kutnom brzinom ω. Lako uočavamo da rotaciju ovoga modelnog krutog tijela možemo svesti na kružno gibanje kuglice

mase m, budući da su mase šipki zanemarive. Primijenimo stoga znanje stečeno u odjeljku 2.5 koje nam kaže da je za održavanje kružnog gibanja potrebna centripetalna sila $\vec{F}_c$, kako je naznačeno na slici 7.11. Ona dolazi od djelovanja konstrukcije osovine i dviju krutih šipki na kuglicu.



Slika 7.11: Rotacija modelnog krutog tijela koje se sastoji od jedne čestice mase m povezane idealnim krutim šipkama i osovinom bez mase. Potrebna centripetalna sila $\vec{F}_c$ na česticu dolazi (posredno) od djelovanja ležišta silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na osovinu.

Prema trećemu Newtonovu zakonu, kuglica djeluje (posredno preko šipki) silom $-\vec{F}_c$ na osovinu. Sa stajališta osovine, to je vanjska sila koja mora biti uravnotežena kako se osovina ne bi mogla pomicati u prostoru. Iz slike 7.11 je vidljivo da se uravnoteženje postiže djelovanjem ležišta na osovinu (sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$). Da bismo dobili iznose tih sila, možemo postaviti uvjete ravnoteže na osovinu kao zasebno tijelo. Prvi uvjet ravnoteže daje

$$F_1 + F_2 - F_c = 0 \tag{7.23}$$

dok za drugi uvjet ravnoteže možemo uzimati momente sila npr. oko donjeg ležišta osovine

$$F_c D^{'} - F_2 D = 0 \tag{7.24}$$

gdje je s $D^{'}$ označena udaljenost od donjeg ležišta do središta kružnice po kojoj se giba kuglica, dok je udaljenost dvaju ležišta D. Tim dvjema jednadžbama potpuno su određene dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ u ležištima. Evidentno je da sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ rotiraju kako rotira i kuglica. Time se opterećenje ležišta premiješta kružno.

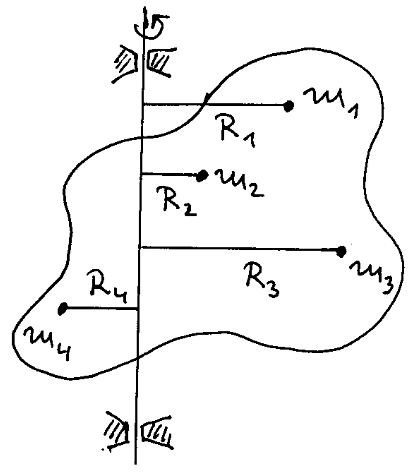
7.2.2 Rotacija realnog krutog tijela

Realno kruto tijelo sastoji se od mnoštva čestica. Kod njegove rotacije oko učvršćene osi, sve se čestice gibaju kružno jednom te istom (trenutnom) kutnom brzinom. Središta svih kružnica nalaze se na osi rotacije. Slika 7.12 prikazuje neko realno kruto tijelo i nekoliko naznačenih čestica u njemu. Udaljenost čestice mase m_i od osi rotacije predstavlja radijus kružnice R_i.

Kod razmatranja dinamike kružnog gibanja čestice u odjeljku 2.5, naučili smo da je, kod rotacije oko zadane osi, relevantna veličina komponenta kutne količine gibanja duž osi rotacije. Ovdje to primjenjujemo na skup svih čestica koje čine kruto tijelo, pa pišemo

$$L_z = L_{z1} + L_{z2} + ... = \sum_i L_{zi} \tag{7.25}$$

gdje smo os z koordinatnog sustava postavili duž



Slika 7.12: Rotacija realnog krutog tijela oko učvršćene osi. Kao primjer su naznačene neke čestice u tijelu i pripadni radijusi kružnica po kojima se gibaju tijekom rotacije tijela oko zadane osi.

osi rotacije tijela. Pozivajući se opet na rezultate iz odjeljka 2.5, kutna količina gibanja i-te čestice oko osi z iznosi $L_{zi} = m_i R_i^2 \omega$, pa za kruto tijelo imamo

$$\begin{aligned} L_z &= m_1 R_1^2\,\omega + m_2 R_2^2\,\omega ... \\ &= \left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + ...\right)\,\omega = I_z\,\omega \end{aligned} \quad (7.26)$$

gdje izraz

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \quad (7.27)$$

predstavlja *moment inercije krutog tijela oko osi z*. Valja imati na umu da se ovako izračunat moment inercije tijela odnosi samo na tu os. Ako bismo kao os rotacije uzeli neki drugi paralalan pravac, udaljenosti R_i imale bi druge vrijednosti i rezultat za moment inercije bio bi drugačiji. O tome će još biti riječi nešto kasnije.

Možemo također izračunati kinetičku energiju rotacije krutog tijela jednostavnim zbrajanjem kinetičkih energija pojedinih čestica

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\,I_z\,\omega^2 \quad (7.28)$$

gdje smo uvažili poznati odnos $v_i = R_i\,\omega$ i relaciju (7.27). Vidimo da moment inercije I_z ima kod rotacije krutog tijela analognu ulogu kao masa m kod translacijskog gibanja.

7.2.3 Izračun momenta inercije za neka simetrična tijela

Za izračunavanje momenta inercije krutog tijela oko neke osi, pogodno je preuzeti model kontinuirane raspodjele mase koji smo uveli u odjeljku 7.1, te prijeći od sume u jednadžbi (7.27) na integral po volumenu krutog tijela

$$I_z = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho(\vec{r})\,dV \quad (7.29)$$

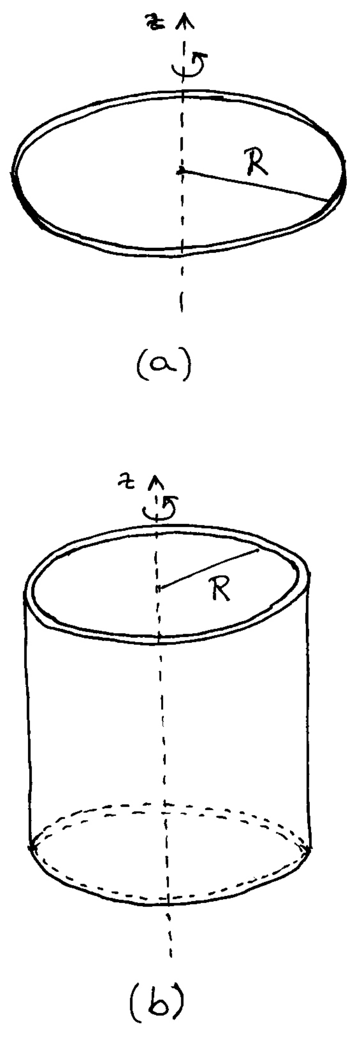
Napomena: Valja pripaziti da se za R uvijek uzme udaljenost elementa mase dm od osi rotacije, a ne od neke fiksne točke.

Izraz (7.29) je lako primijeniti na homogena tijela u kojima je $\rho(\vec{r}) = \rho = konst.$ Kao primjer, provest ćemo račun za nekoliko jednostavnih simetričnih tijela s time da os rotacije postavimo tako da prolazi kroz težište krutog tijela, te da ima smjer osi simetrije tijela.

Tanak prsten. Podrazumijevamo da je prsten tanak ako mu je debljina mnogo manja od radijusa R (slika 7.13a). Moment inercije oko osi simetrije kroz težište iznosi

$$I_z = \int_V R^2 dm = R^2 \int_V dm = mR^2 \quad (7.30)$$

gdje smo R^2 mogli staviti ispred znaka integrala jer su svi elementi mase dm jednako udaljeni od odabrane osi rotacije. Uočavamo da je moment inercije tankog prstena jednak kao da se radi o kružnom gibanju čestice s koncentriranom masom m na udaljenosti R od središta kružnice.



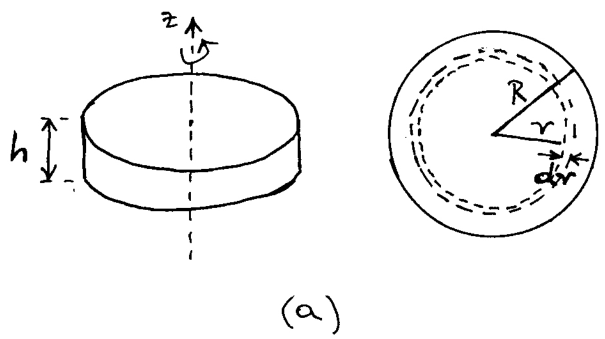
Slika 7.13: (a) Skica za izračunavanje momenta inercije tankog prstena pri rotaciji oko osi simetrije. (b) Tanka cijev koja rotira oko svoje osi simetrije.

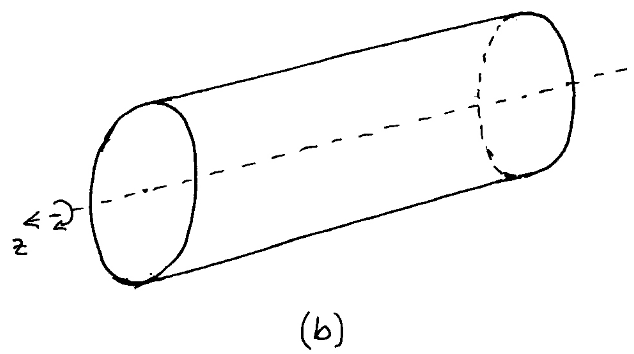
Tanka cijev. Za tanku cijev (slika 7.13b) možemo smatrati kao da se sastoji od niza priljubljenih tankih prstenova kojima su središta nanizana duž osi simetrije. Stoga za moment inercije tanke cijevi možemo odmah napisati rezultat

$$I_z = mR^2 \tag{7.31}$$

gdje je m ukupna masa tanke cijevi, a R je njen radijus.

Disk. Na slici 7.14a prikazan je disk debljine h i radijusa R, te je naznačena os simetrije. U svrhu izračunavanja momenta inercije, načinimo zamišljenu podjelu diska na niz koncentričnih tankih prstenova (promjenljivog) radijusa r i širine dr. U pogledu odozgo na disk prikazan je jedan od takvih zamišljenih prstenova. Njegova je masa





Slika 7.14: (a) Homogen disk u rotaciji oko svoje osi simetrije. Pomoćni crtež prikazuje zamišljeni prsten radijusa r i širine dr kojim se služimo u postupku izračuna momenta inercije diska. (b) Homogen valjak u rotaciji oko svoje osi simetrije.

$$dm = \rho\, dV = \rho\, 2\, r\, \pi\, h\, dr = \frac{2\, m}{R^2}\, r\, dr \tag{7.32}$$

gdje smo za gustoću mase uvažili izraz $\rho = m/V = m/(\pi R^2 h)$. Moment inercije takvog prstena iznosio bi $r^2 dm$, pa moment inercije diska dobivamo integriranjem

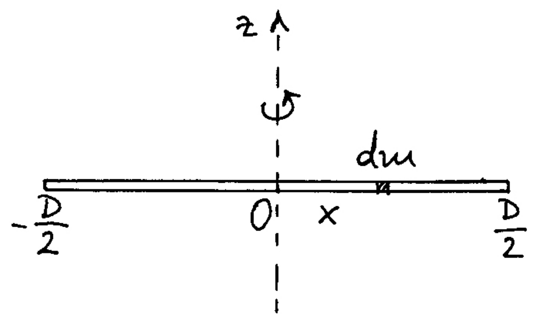
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R \frac{2\, m}{R^2}\, r^3 dr = \frac{1}{2}\, m\, R^2 \tag{7.33}$$

Dobili smo zanimljiv rezultat koji kaže da disk s jednoliko raspodijeljenom masom po cijelom krugu ima moment inercije upola manji od prstena kojemu je sva masa na udaljenosti R od središta.

Valjak. U izvodu momenta inercije za disk mogli smo uočiti da rezultat ne ovisi o debljini diska D. To znači da dobiveni rezultat za disk vrijedi i za valjak bilo koje duljine. Razumije se, potrebno je u formulu uvrstiti odgovarajuću masu valjka.

Jednakovrijedno razmišljanje bilo bi da sastavimo niz istovrsnih diskova duž osi simetrije (slika 7.14b).

Tanak štap. Na slici 7.15 prikazan je štap kojemu je debljina mnogo manja od njegove duljine. Os rotacije je postavljena okomito na štap i prolazi kroz težište. Neka je masa štapa m, a njegova duljina D, tako da je linearna gustoća mase $\lambda = m/D$.



Slika 7.15: Tanak štap duljine D u rotaciji oko osi koja prolazi njegovim središtem i okomita je na sam štap. Element mase dm nalazi se na udaljenosti x od ishodišta O.

Stoga se na svakom elementu duljine dx nalazi masa $dm = \lambda dx$. Kada se element mase dm nalazi na udaljenosti x od središta, njegov moment inercije iznosi $x^2 dm$, pa za cijeli štap dobivamo integriranjem

$$I_z = \int_{-D/2}^{D/2} x^2 dm = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{m}{D}\, x^2 dx = \frac{1}{12}\, mD^2 \tag{7.34}$$

7.2.4 Steinerov poučak o paralelnim osima

U praksi možemo imati slučajeve u kojima učvršćena os rotacije ne prolazi kroz težište. Tada nam je od koristi Steinerov poučak o paralelnim osima, koji postavlja jednostavnu relaciju između momenta inercije oko osi kroz težište tijela i momenta inercije oko neke paralelne osi.

Izvod Steinerova poučka zgodno je provesti smatrajući da se kruto tijelo sastoji od mnoštva čestica. Slika 7.16 prikazuje kruto tijelo i neku njegovu česticu mase m_i. Koordinatni sustav $Oxyz$ postavljen je tako da je ishodište O u težištu T tijela, a os z se podudara s osi rotacije. Ujedno je prikazana jedna paralelna os rotacije, udaljena za d od prve. Ona prolazi kroz točku O' s koordinatama (a, b) u ravnini xy.

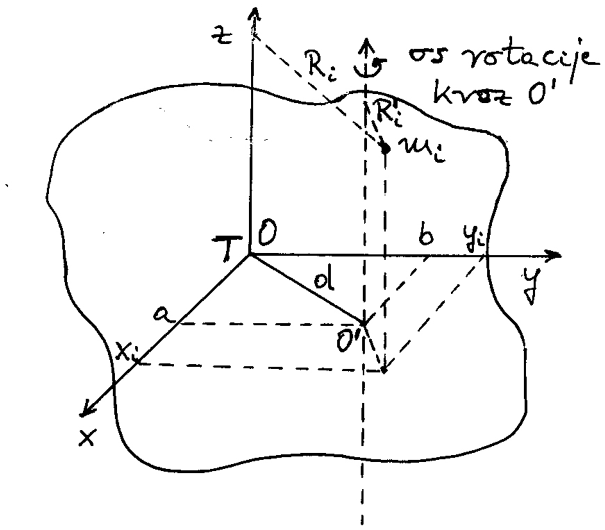
Promatrana čestica mase m_i ima koordinate (x_i, y_i). Označimo njenu udaljenost od osi kroz težište kao R_i, a udaljenost od paralelne osi kroz točku O' kao R_i'. Služeći se Pitagorinim poučkom možemo napisati

$$d^2 = a^2 + b^2 \tag{7.35}$$
$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \tag{7.36}$$
$$R_i'^2 = (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 \tag{7.37}$$

Moment inercije oko osi kroz O' iznosi

$$\begin{aligned} I_z' &= \sum_i m_i R_i'^2 = \sum_i m_i \left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right] \\ &= \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) + \sum_i m_i (a^2 + b^2) - \\ &\quad -2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i \end{aligned} \tag{7.38}$$

Posljednja dva člana iščezavaju jer su povezani s definicijom težišta, a težište je u ishodištu



Slika 7.16: Skica za dokazivanje Steinerova teorema. Odabrana je proizvoljna os rotacije krutog tijela i zatim postavljen koordinatni sustav tako da mu ishodište O bude u težištu T tijela, a os z paralelna odabranoj osi rotacije tijela.

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = 0 \tag{7.39}$$
$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = 0 \tag{7.40}$$

Uvažavajući jednadžbe (7.35) i (7.36) dobivamo iz jednadžbe (7.38) rezultat

$$I_z' = I_z^T + m\, d^2 \tag{7.41}$$

gdje je s I_z^T označen moment inercije tijela oko osi kroz težište. To je *Steinerov poučak*. Moment inercije tijela oko neke osi jednak je zbroju momenta inercije oko paralelne osi kroz težište i umnoška mase tijela s kvadratom udaljenosti dviju osi.

Možemo primijeniti Steinerov poučak na izraz za kinetičku energiju rotacije oko osi kroz O'

$$E_K = \frac{1}{2}\, I_z' \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_z^T + m\, d^2\right)\omega^2 \tag{7.42}$$

Ako uočimo da je d radijus kružnice po kojoj se težište giba oko osi rotacije, onda za obodnu brzinu težišta pišemo $v_T = d\,\omega$, pa kinetičku energiju možemo izraziti kao

$$E_K = \frac{1}{2}\, I_z^T \omega^2 + \frac{1}{2}\, m\, v_T^2 \tag{7.43}$$

Kinetička energija tijela koje se vrti oko neke učvršćene osi jednaka je zbroju kinetičke energije koja pripada rotaciji tijela oko paralelne osi kroz težište i kinetičke energije zbog kružnog gibanja težišta oko osi rotacije.

Primijenimo Steinerov poučak još i na izraz za kutnu količinu gibanja kod rotacije oko osi kroz $O^{'}$

$$\begin{aligned} L_z^{'} &= L_z^{'}\, \omega = \left(I_z^T + m\, d^2\right) \omega \\ &= I_z^T\, \omega + m\, v_T\, d \end{aligned} \tag{7.44}$$

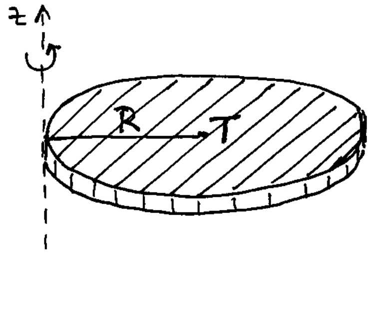
Kutna količina gibanja tijela koje se vrti oko neke osi jednaka je zbroju kutne količine gibanja u rotaciji tijela oko paralelne osi kroz težište i kutne količine gibanja koja odgovara kružnom gibanju težišta tijela oko osi rotacije.

Radi ilustracije konkretne primjene Steinerova poučka, razmotrimo slučaj rotacije diska oko osi koja prolazi točkom $O^{'}$ na obodu (slika 7.17). Udaljenost osi rotacije od težišta jednaka je radijusu R diska. Koristeći se prethodno izvedenim relacijama za rotaciju diska oko težišta, dobivamo rezultate

$$I_z^{'} = L_z^T + m\, R^2 = \frac{3}{2}\, m\, R^2 \tag{7.45}$$

$$E_K = \frac{1}{2}\, I_z^T\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, m\, v_T^2 = \frac{3}{4}\, m\, R^2\, \omega^2 \tag{7.46}$$

$$L_z^{'} = I_z^T\, \omega + m\, v_T\, R = \frac{3}{2}\, m\, R^2\, \omega \tag{7.47}$$

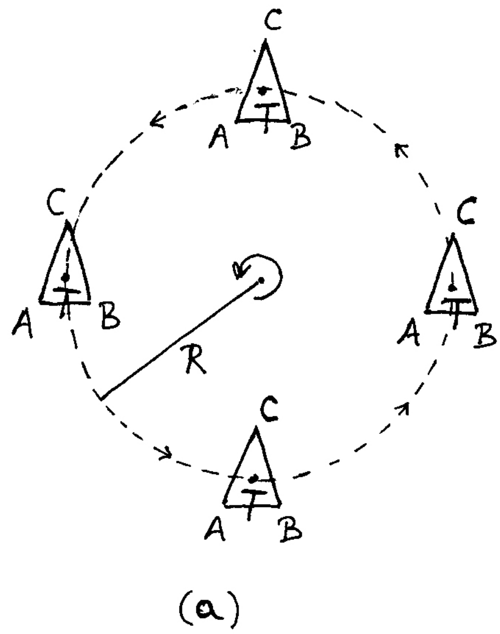


Slika 7.17: Rotacija diska oko osi koja prolazi njegovim obodom a paralelna je osi simetrije diska.

Dopunska objašnjenja i usporedbe

Prethodni rezultati postignuti primjenom Steinerova poučka navode nas na pomisao da se tu ne radi samo o zgodnoj aditivnosti u formulama, nego da možda postoji aditivnost u samim gibanjima. Ovo pitanje vrijedi razmotriti malo detaljnije.

Rotacija napram translacijskom kružnom gibanju. Na slici 7.18 prikazan je trokut ABC, sličan po formi strelici s vrhom u C, koji izvodi *translacijsko kružno gibanje.* Moramo pažljivo uočiti glavne odlike ovoga gibanja. Odmah uočavamo da se težište T trokuta giba po kružnici radijusa R oko osi okomite na ravninu crtnje. Međutim, trokut uvijek zadržava svoju orijentaciju s vrhom C prema gore. Lako je uočiti da vrh C izvodi također gibanje po kružnici radijusa R, ali središte te kružnice nije na istome mjestu kao i



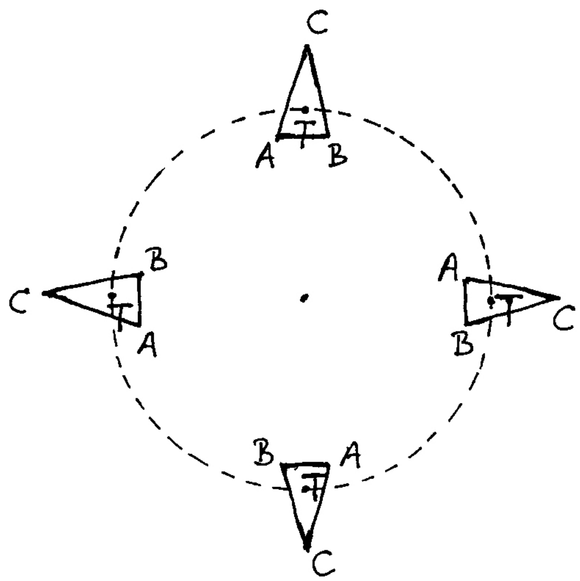
Slika 7.18: Translacijsko kružno gibanje trokuta ABC. Crtkanom kružnicom radijusa R označena je putanja težišta trokuta. Sam trokut uvijek zadržava istu orijentaciju u prostoru na slici (vrh C prema "gore"). Vrh C opisuje također kružnicu radijusa R (nije prikazana na slici), no njeno je središte pomaknuto za iznos $\overline{TC}$ iznad središta putanje težišta. Analogno pravilo vrijedi za svaku drugu točku trokuta.

središte kružnice po kojoj se giba težište. Dva su središta međusobno udaljena za dužinu $\overline{TC}$.

Jednako zaključivanje možemo provesti za svaku drugu točku trokuta. Dakle, osobina translacijskog kružnog gibanja je da se sve točke gibaju po kružnicama jednog te istog radijusa, ali su središta tih kružnica u različitim točkama. To nije rotacija tijela oko neke osi, pa smo upotrijebili izraz translacijsko kružno gibanje.

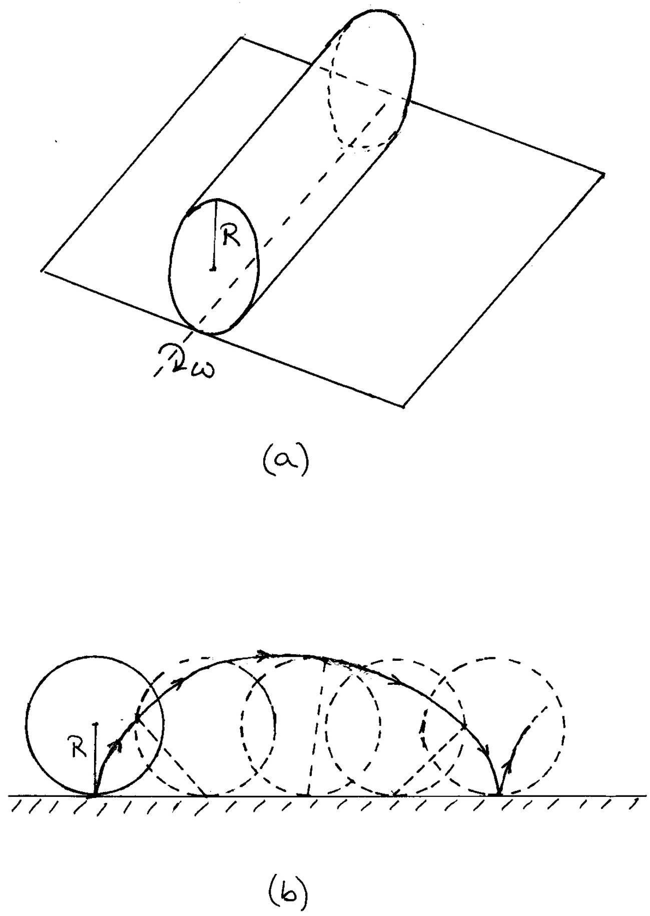
Razmotrimo sada pravu rotaciju trokuta ABC oko okomite osi rotacije, kako prikazuje slika 7.19. Ne samo da se težište trokuta giba po kružnici oko osi rotacije, nego se i cijeli trokut rotira oko težišta istom kutnom brzinom. Tako vidimo da se nakon npr. četvrtine kružnice koju prijeđe težište, vrh C zakrene također za četvrtinu okreta oko težišta. S tom spoznajom o dvostrukom gibanju tijela mogli bismo izravno napisati jednadžbe (7.43) i (7.44).

Rotaciju trokuta oko okomite osi možemo također analizirati prema kružnom gibanju njegovih točaka. Iz slike 7.19 razabiremo da se sve točke gibaju po koncentričnim kružnicama sa središtem na osi rotacije. Međutim, radijusi tih kružnica su različiti. To je dijametralno suprotna situacija od one na slici 7.18.



Slika 7.19: Rotacija trokuta ABC oko osi okomite na ravninu crtnje. Prikazana je crtkana kružnica po kojoj se giba težišta trokuta. Uz pomak težišta za npr. četvrtinu kruga, zakrene se i sam trokut za isti iznos oko vlastita težišta. Svaka od točaka trokuta opisuje kružnu putanju oko jednog te istog središta, no radijusi tih kružnica mogu biti različiti.

Kotrljanje valjka po ravnoj podlozi. Prikladno je na ovome mjestu izići malo izvan okvira rotacije krutog tijela oko učvršćene osi i napraviti usporedbu s kotrljanjem valjka po ravnoj podlozi, kao što to prikazuje slika 7.20a. Cijeli valjak rotira oko vlastite osi simetrije koja prolazi kroz njegovo težište, no težište valjka se pritom ne giba po



Slika 7.20: (a) Kotrljanje valjka radijusa R po ravnoj podlozi. Crtkano je naznačena dodirna linija valjka i podloge koja predstavlja trenutnu os rotacije valjka. (b) Putanja jedne točke na plaštu valjka tijekom njegova kotrljanja. Promatrana točka spojena je crtkanom linijom s trenutnom dodirnom točkom valjka s podlogom. Ta crtkana linija predstavlja trenutni radijus gibanja promatrane točke.

kružnici, nego po pravcu. Stoga se takvo gibanje ne može prikazati kao trajna rotacija valjka oko neke učvršćene osi poput slučaja s trokutom na slici 7.19.

Ipak, možemo uočiti da postoji trenutna rotacija valjka oko osi u kojoj valjak dodiruje ravnu podlogu. U tome trenutku, dodirna točka miruje, dok pojedine točke valjka imaju brzine koje odgovaraju obodnim brzinama na raznim udaljenostima od trenutne osi rotacije, s time da sve rotiraju istom trenutnom kutnom brzinom ω. Tako vidimo da težište ima brzinu $v_T = R\omega$, dok točka na suprotnoj strani od dodirne točke valjka ima trenutnu brzinu $2R\,\omega$.

Svaka točka na plaštu valjka dolazi u nekom trenutku u dodir s ravnom podlogom. Tada joj brzina trenutno iščezava, a tijekom vremena brzina joj se mijenja dok druge točke na plaštu dolaze slijedom u kontakt s ravnom podlogom. Slika 7.20b prikazuje putanju jedne odabrane točke na plaštu valjka u jednolikom kotrljanju. Također su prikazane i spojnice te točke s trenutnom dodirnom točkom valjka s podlogom. U odgovarajućem trenutku, ta spojnica predstavlja trenutni radijus po kojemu se zakreće promatrana točka na plaštu oko dodirne točke na podlozi. Trenutna brzina promatrane točke jednaka je produktu trenutnog radijusa i kutne brzine, a smjer joj je okomit na trenutni radijus, što ukazuje na tangentu na putanju promatrane točke.

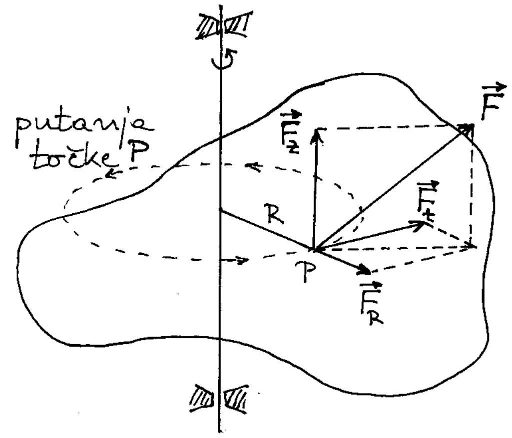
Općenito, gibanje nekog krutog tijela možemo uvijek prikazati kao istodobnu superpoziciju translacijskog gibanja po nekoj krivulji i rotacije tijela oko osi kroz težište. Os rotacije se pomiče tijekom vremena, a može i mijenjati svoj smjer. Ove spoznaje moramo imati na umu kod rješavanja praktičnih problema.

7.2.5 Dinamika rotacije krutog tijela oko učvršćene osi

Do sada smo rotaciju krutog tijela oko učvršćene osi samo opisivali (kinematički pristup), ne obazirući se na dinamiku rotacije. Razmotrimo sada učinak vanjske sile $\vec{F}$ koja djeluje na kruto tijelo u nekom hvatištu (slika 7.21). U općenitom slučaju, silu $\vec{F}$ možemo rastaviti na tri komponente

$$\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_t + \vec{F}_z \tag{7.48}$$

Radijalna komponenta nema učinka na kruto tijelo jer je ona kompenzirana djelovanjem protusile u ležištima osovine. Isto tako, komponenta sile duž



Slika 7.21: Vanjska sila $\vec{F}$ djeluje na kruto tijelo u odabranom hvatištu. Silu je moguće rastaviti na tri komponente. Radijalna komponenta i komponenta duž osi z kompenzirane su putem učvršćene osovine, dok tangencijalna komponenta slobodno mijenja brzinu rotacije krutog tijela.

osi z nema učinka na kruto tijelo jer se podrazumijeva da je osovina tako učvršćena u ležištima da ne može doći do njena proklizavanja duž osi z.

Jedino tangencijalna komponenta $\vec{F}_t$ stvara moment sile duž osi z

$$M_z = R\,F_t \tag{7.49}$$

koji mijenja kutnu količinu gibanja

$$dL_z = M_z\,dt \tag{7.50}$$

Ove su nam jednadžbe poznate iz odjeljka 2.5. Također možemo pisati

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\,(I_z\,\omega) = I_z\,\alpha \tag{7.51}$$

Moment inercije tijela ovisi samo o njegovoj građi i odabranoj osi rotacije, tako da vanjska sila mijenja kutnu brzinu rotacije tijela.

Pod vanjskom silom, koja djeluje na tijelo, valja podrazumijevati i gravitacijsku silu. Ako težište tijela leži na osi rotacije, gravitacijska je sila kompenzirana djelovanjem učvršćenih ležišta na osovinu krutog tijela. Ako se pak težište nalazi izvan osi rotacije, gravitacijska sila može imati i tangencijalnu komponentu na kružnicu oko osi rotacije, pa time utjecati na samu rotaciju krutog tijela.

Primjer ubrzanog kotrljanja valjka niz kosinu

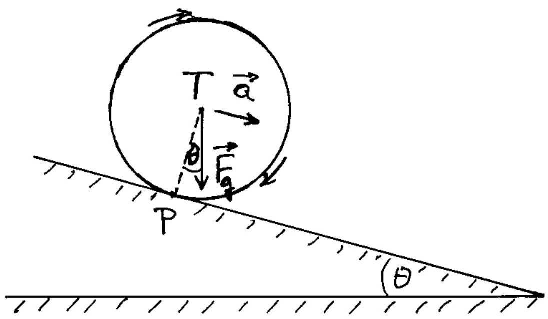
Poznavajući gornje jednadžbe, možemo rješavati brojne probleme iz rotacija krutih tijela oko zadane osi. Ovdje ćemo, radi ilustracije, pokazati samo jedan primjer iz svakidašnjeg iskustva. Na slici 7.22 prikazano je kotrljanje valjka niz kosinu. Trenutna os rotacije valjka prolazi točkom P u kojoj valjak dodiruje kosinu. Postavimo koordinatni sustav tako da os z bude u smjeru trenutne osi rotacije. Gravitacijska sila $\vec{F}_g$ stvara moment sile M_z^P oko osi z kroz točku P, tako da jednadžba gibanja glasi

$$M_z^P = I_z^P \alpha \tag{7.52}$$

Iz slike 7.22 vidimo da krak gravitacijske sile oko točke P iznosi $R \sin\theta$, pa možemo pisati

$$mgR\sin\theta = \left(I_z^T + mR^2\right)\alpha \tag{7.53}$$

gdje je ujedno primijenjen i Steinerov poučak. Iz ove relacije možemo odrediti kutnu akceleraciju α koja se odnosi na rotaciju oko niza trenutnih dodirnih točaka.



Slika 7.22: Kotrljanje homogenog valjka niz kosinu. U danome trenutku valjak rotira oko linije u kojoj se dodiruje s kosinom (okomita na ravninu vrtnje i prolazi kroz točku P). Gravitacijska sila stvara moment oko trenutne osi rotacije i uzrokuje kutnu akceleraciju valjka, pa time i akceleraciju težišta niz kosinu.

Najčešće nas zanima kojom se akceleracijom giba težište valjka niz kosinu. Tu akceleraciju možemo povezati s kutnom akceleracijom

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha \tag{7.54}$$

gdje je primijenjeno pravilo po kojemu za kotrljanje valjka po ravnoj podlozi vrijedi $v_T = R\omega$. Konačno dobivamo

$$a_T = \frac{mR^2}{I_z^T + mR^2}\,g\sin\theta \tag{7.55}$$

Za homogen valjak $I_z^T = (1/2)mR^2$, pa se dobiva rezultat $a_T = (2/3)g\sin\theta$, neovisno o masi i radijusu valjka. Međutim, ako imamo niz nehomogenih valjaka, kojima glavnina mase može biti raspoređena na različitim udaljenostima od osi simetrije, njihovi će momenti tromosti biti različiti, pa će u kotrljanju imati različite akceleracije.

7.3 Glavne osi krutog tijela

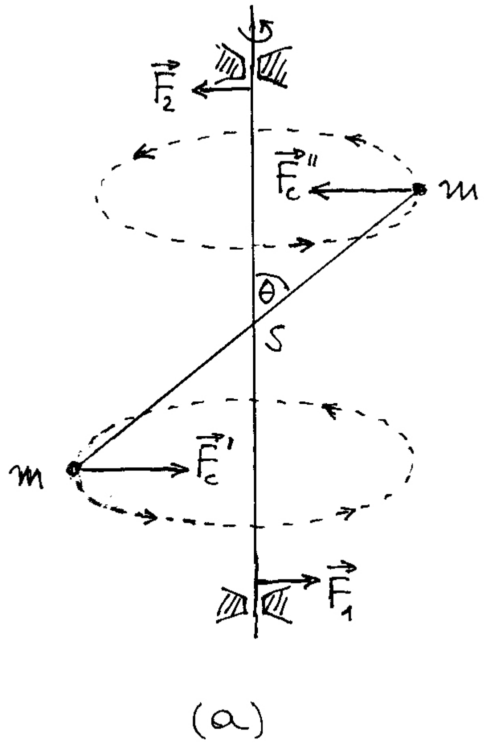
U prethodnom smo odjeljku ustanovili da je za rotaciju krutog tijela oko proizvoljno zadane osi potrebno djelovanje sila na osovinu kako bi os rotacije ostala nepomična u prostoru.

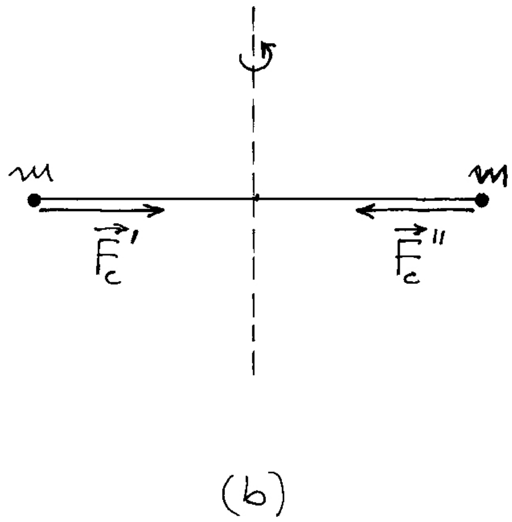
Zanimljivo je pitanje može li se naći neka posebna os rotacije krutog tijela tako da ležišta ne moraju djelovati silama na osovinu. U tome slučaju, ležišta ne bi bila ni potrebna. Drugim riječima, mogli bismo naprosto zavrtjeti kruto tijelo oko takve osi i ono bi se slobodno vrtjelo. Bila bi to *slobodna os.* Pritom pretpostavljamo da nema gravitacijskog djelovanja kao da se tijelo nalazi negdje daleko u Svemiru.

Uvjeti za slobodnu os

Možemo odmah ustvrditi da slobodna os krutog tijela mora prolaziti kroz težište (centar masa) tijela. Naime, prethodno smo utvrdili da rotaciju krutog tijela oko proizvoljne osi, koja ne prolazi kroz težište, možemo ekvivalentno prikazati kao superpoziciju kružnog gibanja težišta oko te osi i istodobne rotacije krutog tijela oko paralelne osi kroz težište. Ukoliko težište ne bi ležalo na odabranoj osi rotacije, morala bi postojati centripetalna sila koja bi masu koncentriranu u težištu prisiljavala na kružno gibanje, a to bi pak podrazumijevalo da ležišta moraju djelovati na osovinu, pa ona ne predstavlja slobodnu os krutog tijela.

Navedeni je uvjet o prolasku kroz težište nužan, ali nije i dovoljan da bi neka os rotacije bila slobodna os. Naime, postavljanjem proizvoljne osi rotacije kroz težište krutog tijela nije osigurano da će se rotacija oko te osi odvijati bez djelovanja sila u ležištima osovine. Razmotrimo kao primjer rotaciju jednog modelnog krutog tijela, koje se sastoji od dvije jednake kuglice mase m, spojene krutom šipkom zanemarive mase, kao što prikazuje slika 7.23a. Sredina spojne šipke učvršćena je na osovinu, također zanemarive mase, na način da šipka čini fiksan kut θ prema osovini. Kod rotacije ovoga modelnog krutog tijela nekom kutnom brzinom ω, mora na svaku kuglicu djelovati centripetalna sila (slika 7.23a). Te dvije sile $\vec{F}_c'$ i $\vec{F}_c''$ tvore par sila koji ima moment jednak produktu iznosa sile i udaljenosti pravaca nositelja (odjeljak 7.1). Budući da kruto tijelo ne može djelovati samo na sebe momentom sile, nego to može jedino činiti okolina, lako je zaključiti da potrebni moment dolazi od para sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ kojima ležišta djeluju na osovinu. Prema slici 7.23a, pravci nositelji sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ su razmaknuti više, pa iznosi sila mogu biti manji, tako da produkt iznosa sile i razmaka pravaca nositelja dade potrebni moment para sila. U svakom slučaju, očito je da razmatrana os rotacije nije slobodna os.



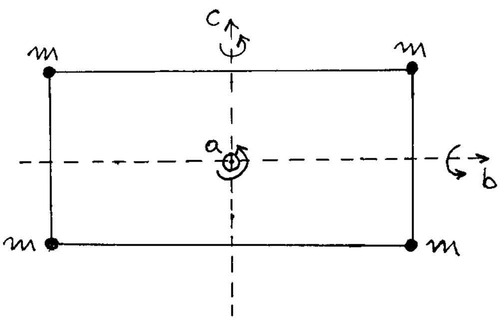


Slika 7.23: (a) Rotacija modelnog krutog tijela oko učvršćene osi. Tijelo se sastoji od dviju kuglica mase m na krajevima krute šipke zanemarive mase koja čini fiksan kut θ s osovinom. Za kružno gibanje svake kuglice potrebna je odgovarajuća centripetalna sila. Te sile nastaju djelovanjem ležišta na osovinu silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, što se dalje prenosi preko čvrste konstrukcije osovine i šipke na kojoj su kuglice. Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ su tolike da njihov zajednički moment odgovara momentu potrebitih centripetalnih sila. (b) U slučaju kada modelno kruto tijelo rotira tako da su potrebne centripetalne sile na istome pravcu nositelju, nisu potrebna ležišta za osovinu, tj. radi se o slobodnoj osi.

Prijenos djelovanja od osovine na krutu šipku s kuglicama ostvaruje se u čvrstom spoju na sredini tako da kut θ ostane fiksan. Kada vijak na spoju ne bi bio dovoljno stegnut, šipka bi se tijekom rotacije zakretala oko vijka tako da bi se kut θ povećavao sve dok ne dosegne iznos $\pi/2$. U tom bi se procesu pravci nositelji sila $\vec{F}_c'$ i $\vec{F}_c''$ približavali, sve dok se ne bi preklopili kao na slici 7.23b. Tada iščezava moment tog para sila, pa ujedno nestaje potreba da ležišta djeluju silama na osovinu. Os rotacije postaje slobodna, a za opstanak nužnih centripetalnih sila dostatna je čvrstoća same spojne šipke.

Proširimo razmatranje na malo složenije modelno kruto tijelo koje se sastoji od četiri jednake kuglice u vrhovima pravokutnika, spojene krutim šipkama zanemarive mase (slika 7.24). Lako je uočiti da ono

ima tri osi simetrije i oko svake od njih može rotirati bez postavljanja ležišta za osovinu. Naime, centripetalne se sile u tim slučajevima javljaju uvijek u paru, na istome pravcu nositelju, a njihovu opstojnost osigurava čvrstoća spojnih šipki. Takve se osi nazivaju *glavne osi krutog tijela*, ili *slobodne osi* zbog mogućnosti slobodne rotacije oko njih.



Slika 7.24: Modelno kruto tijelo sastavljeno od četiri jednake kuglice u vrhovima pravokutnika spojene čvrstim šipkama zanemarive mase. Iz simetrije tijela lako se uočavaju slobodne osi a, b i c.

Glavne osi nepravilnog krutog tijela

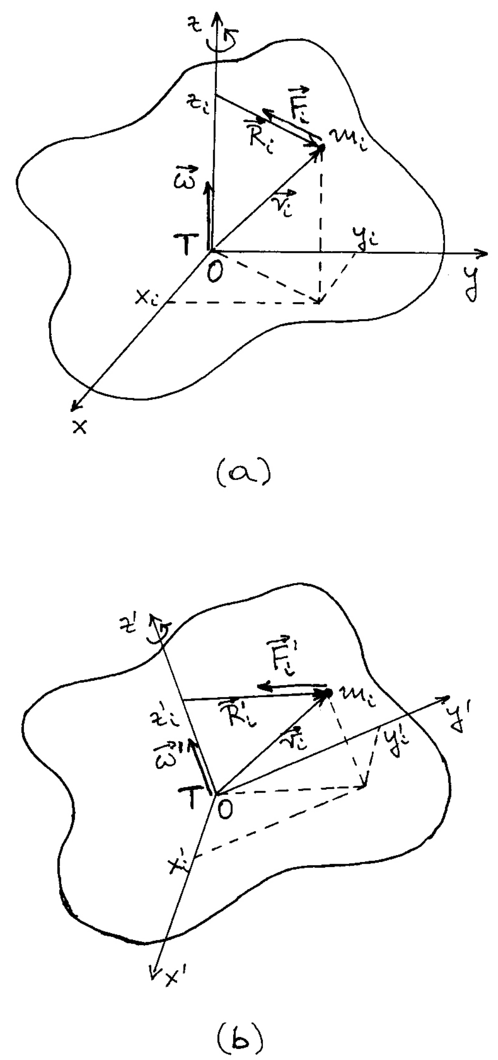
Razmotrimo pitanje glavnih osi kod krutog tijela općenito nepravilnog oblika kao što prikazuje slika 7.25a. Radi teorijske obrade postavljen je koordinatni sustav $Oxyz$ s ishodištem u težištu (centru masa) tijela. Zamislimo da kruto tijelo rotira oko osi z kutnom brzinom ω. Za kružno gibanje i-te čestice potrebno je da na nju djeluje centripetalna sila $\vec{F}_i = -m_i\,\omega^2\vec{R}_i$, gdje vektor $\vec{R}_i$ označava položaj i-te čestice u odnosu na središte kružnice po kojoj se ona giba (slika 7.25a). Centripetalnu silu $\vec{F}_i$ možemo napisati po komponentama

$$F_{ix} = -m_i\,\omega^2 x_i \tag{7.56}$$
$$F_{iy} = -m_i\,\omega^2 y_i \tag{7.57}$$
$$F_{iz} = 0 \tag{7.58}$$

Razumije se, komponente sile mijenjaju se u vremenu kako se čestica giba po kružnici, pa se mijenjaju koordinate $x_i(t)$ i $y_i(t)$. Moment ove sile oko ishodišta $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ možemo također napisati po komponentama

$$M_{ix} = -z_i\,F_{iy} = m_i\,\omega^2 y_i\,z_i \tag{7.59}$$
$$M_{iy} = z_i\,F_{ix} = -m_i\,\omega^2 z_i\,x_i \tag{7.60}$$
$$M_{iz} = 0 \tag{7.61}$$

Lako je napisati ukupni moment sile koji mora dje-



Slika 7.25: (a) Ishodište koordinatnog sustava smješteno je u težište krutog tijela. Kod rotacije oko osi z potrebna je odgovarajuća centripetalna sila za svaku česticu krutog tijela, a time i moment sile. Sumiranjem po svim česticama može se odrediti ukupni moment sile potreban za rotaciju tijela oko osi z. (b) Rotacija istog tijela oko neke druge osi z' iziskuje drugačije centripetalne sile na iste čestice krutog tijela, pa time i drugačiji ukupni moment sile na tijelo u cjelini.

lovati na cijelo kruto tijelo da bi ono imalo nepomičnu os rotacije duž osi z

$$M_x = \omega^2 \sum_i m_i\, y_i\, z_i \tag{7.62}$$

$$M_y = -\omega^2 \sum_i m_i\, z_i\, x_i \tag{7.63}$$

$$M_z = 0 \tag{7.64}$$

Ukoliko je raspored masa u tijelu takav da sume produkata u jednadžbama (7.62) i (7.63) iščezavaju, rotacija stalnom kutnom brzinom oko osi z odvijala bi se bez ikakva djelovanja momenta sile. To bi značilo da tijelo posjeduje glavnu os, te da ona u tome slučaju ima smjer upravo duž osi z.

Ako pak sume produkata u jednadžbama (7.62) i (7.63) ne iščezavaju, rotacija oko osi z zahtijevala bi djelovanje momenta sile. Zato umjesto rotacije oko osi z, ispitajmo rotaciju tijela oko osi $z^{'}$, koja pripada koordinatnom sustavu $Ox^{'}y^{'}z^{'}$, zakrenutom u odnosu prema sustavu $Oxyz$, kako npr. prikazuje slika 7.25b. Različitim postavljanjem sustava $Ox^{'}y^{'}z^{'}$ pokušajmo postići da kod rotacije tijela oko osi $z^{'}$ bude trajno

$$\sum_i m_i\, y_i^{'}\, z_i^{'} = 0 \tag{7.65}$$

$$\sum_i m_i\, z_i^{'}\, x_i^{'} = 0 \tag{7.66}$$

Moguće je teorijski pokazati (o tome će još biti riječi kasnije) da je za svako tijelo, ma kako ono bilo nepravilno, moguće utvrditi koordinatni sustav u kojemu vrijede uvjeti (7.65) i (7.66) za dano kruto tijelo. To znači da glavna os tog krutog tijela uistinu postoji, te da tako nađena os $z^{'}$ upravo pokazuje smjer glavne osi u tijelu.

Štoviše, teorija pokazuje da svako kruto tijelo mora imati tri uzajamno okomite glavne osi. Ako i os $x^{'}$ želimo postaviti u smjeru jedne od glavnih osi, moramo postići da u slučaju rotacije tijela oko osi $x^{'}$ iščezava ukupni moment centripetalnih sila. To će biti ispunjeno uz uvjete koje dobivamo cikličkom zamjenom indeksa u gornjim jednadžbama

$$\sum_i m_i\, z_i^{'}\, x_i^{'} = 0 \tag{7.67}$$

$$\sum_i m_i\, x_i^{'}\, y_i^{'} = 0 \tag{7.68}$$

Odmah možemo uočiti da je uvjet (7.67) isti kao (7.66), pa imamo samo jedan novi uvjet (7.68). To možemo razumjeti jer, uz već postavljenu os $z^{'}$, imamo samo jedan stupanj slobode u postavljanju osi $x^{'}$, koja mora biti u ravnini okomitoj na $z^{'}$. Pod stupnjem slobode podrazumijeva se ovdje mogućnost promjene jedne varijable (kuta zakreta) u postavljanju osi $x^{'}$.

Treća glavna os tijela uvijek je okomita na prve dvije. U gornjem bi slučaju os $y^{'}$ morala automatski biti treća glavna os. Uistinu, ako napišemo potrebne uvjete primjenjujući cikličku zamjenu, ustanovit ćemo da su oni već sadržani u uvjetima (7.68) i (7.65).

Tenzor inercije krutog tijela

Da bismo upotpunili spoznaje o glavnim osima krutog tijela, razmotrimo odnose kinematičkih kutnih veličina, tj. kutne brzine $\vec{\omega}$ i kutne količine gibanja $\vec{L}$. U tu svrhu odaberimo neko kruto tijelo i postavimo koordinatni sustav $Oxyz$ koji se, po pretpostavci, ne poklapa sa sustavom glavnih osi tog tijela. Neka to odgovara prikazu na slici 7.26a. Uzmimo da tijelo rotira nekom trenutnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$, koju možemo rastaviti na komponente duž osi tog proizvoljno odabranog koordinatnog sustava

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \hat{\jmath} + \omega_z \hat{k} \tag{7.69}$$

Potražimo trenutnu kutnu količinu gibanja cijelog tijela oko ishodišta O koordinatnog sustava

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{7.70}$$

gdje je $\vec{r}_i$ vektor trenutnog položaja i-te čestice u odnosu prema ishodištu O, a $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ je njena trenutna količina gibanja (slika 7.26a).

Izračunajmo najprije trenutnu brzinu i-te čestice

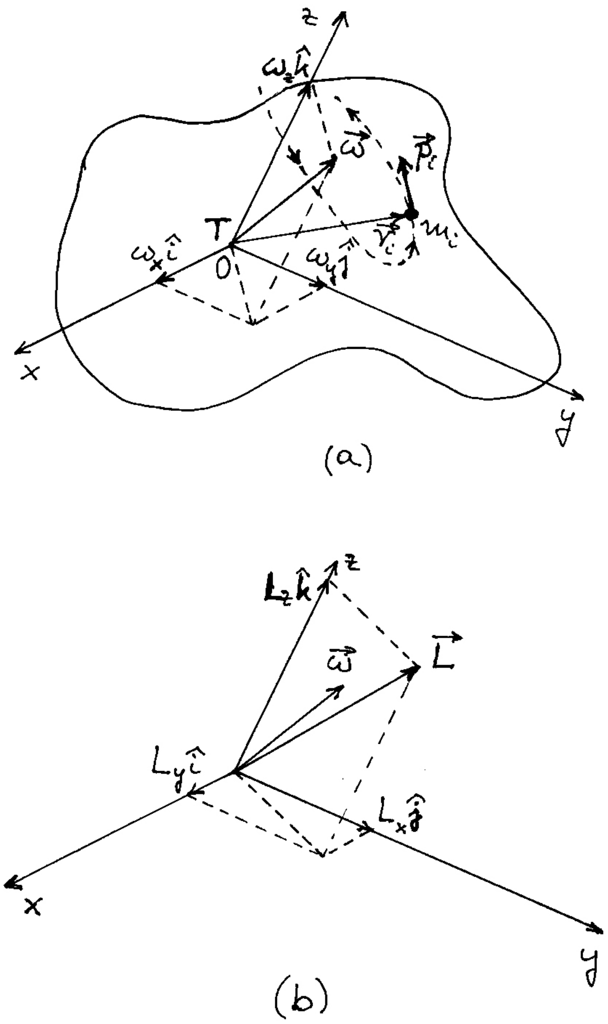
$$\begin{aligned}\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i &= (\omega_y z_i - \omega_z y_i)\, \hat{\imath} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)\, \hat{\jmath} \\ &\quad + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)\, \hat{k}\end{aligned} \tag{7.71}$$

Daljnjim vektorskim množenjem možemo izračunati

$$\begin{aligned}\vec{L}_i &= m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= m_i \left[\omega_x \left(y_i^2 + z_i^2\right) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i\right] \hat{\imath} \\ &\quad + m_i \left[-\omega_x x_i y_i + \omega_y \left(x_i^2 + z_i^2\right) - \omega_z y_i z_i\right] \hat{\jmath} \\ &\quad + m_i \left[-\omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i + \omega_z \left(x_i^2 + z_i^2\right)\right] \hat{k}\end{aligned} \tag{7.72}$$

Ukupnu trenutnu kutnu količinu krutog tijela možemo konačno napisati po komponentama (slika 7.26b)

$$L_x = I_x\omega_x - P_{xy}\omega_y - P_{xz}\omega_z \qquad (7.73)$$
$$L_y = -P_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - P_{yz}\omega_z \qquad (7.74)$$
$$L_z = -P_{xz}\omega_x - P_{yz}\omega_y + I_z\omega_z \qquad (7.75)$$



Slika 7.26: (a) Kruto tijelo rotira trenutnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$, koju možemo rastaviti na komponente u danom koordinatnom sustavu. Svaka čestica ima trenutnu količinu gibanja, pa se može izračunati pripadna kutna količina gibanja s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. (b) Sumiranjem po svim česticama u krutome tijelu može se izračunati ukupna kutna količina gibanja $\vec{L}$. Vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{L}$ općenito nisu kolinearni.

gdje su upotrijebljeni poznati izrazi za momente inercije oko pojedinih osi

$$I_x = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) \qquad (7.76)$$
$$I_y = \sum_i m_i \left(z_i^2 + x_i^2\right) \qquad (7.77)$$
$$I_z = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \qquad (7.78)$$

te uvedeni novi izrazi koji se nazivaju *produkti inercije*

$$P_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \qquad (7.79)$$
$$P_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i \qquad (7.80)$$
$$P_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i \qquad (7.81)$$

Ulogu ovih veličina možemo jasnije spoznati analizirajući jednostavnije slučajeve rotacije oko pojedinih osi koordinatnog sustava. Uzmimo da tijelo rotira stalnom kutnom brzinom oko osi z, tj. da vrijedi $\omega_x = \omega_y = 0$, a $\omega_z \neq 0$. Kutna količina gibanja ima tada komponente

$$L_x = -P_{xz}\omega_z \qquad (7.82)$$
$$L_y = -P_{yz}\omega_z \qquad (7.83)$$
$$L_z = I_z\omega_z \qquad (7.84)$$

Ukoliko produkti inercije ne iščezavaju, vektor $\vec{L}$ ima neiščezavajuće komponente duž osi x i y, što znači da nije kolinearan s $\vec{\omega}$. Tijekom rotacije krutog tijela vektor $\vec{L}$ kruži po konusu oko osi z.

Napomena: Produkti inercije P_{xz} i P_{yz} osciliraju tijekom vremena u skladu s ovisnošću $x_i(t)$ i $y_i(t)$.

Rotacija vektora $\vec{L}$ implicira njegovu vremensku promjenu, a za to je potrebno djelovanje odgovarajućeg momenta sile. Ovaj je zaključak u skladu s prethodnom analizom koja je dovela do jednadžbi (7.62)-(7.64), gdje sada možemo prepoznati produkte inercije P_{xz} i P_{yz}. Slične bismo analize mogli provesti za pretpostavljene rotacije oko osi x, ili y, te uočiti uloge odgovarajućih produkata inercije.

Vratimo se ipak razmatranju općenitijeg slučaja trenutne rotacije oko proizvoljne osi. Jednadžbe (7.73)-(7.75) možemo napisati u matričnoj formi

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (7.85)$$

Matrica 3×3 predstavlja *tenzor inercije* u koordinatnom sustavu $Oxyz$. Dijagonalni elementi su momenti inercije oko osi x, y i z, a nedijagonalni elementi su produkti inercije. Ovdje nam je važno još jednom naglasiti da razmatramo trenutnu rotaciju tijela oko neke osi, što znači da sve veličine u jednadžbi (7.85) uzimamo u nekom trenutku. Tijelo ima u tome trenutku neku orijentaciju u prostoru, odnosno u koordinatnom sustavu $Oxyz$. Drugim riječima, koordinate i-te čestice imaju određene vrijednosti u tome trenutku, pa stoga momenti inercije i produkti inercije tijela također imaju određene trenutne vrijednosti izračunate u sustavu $Oxyz$.

Lako je uočiti da je tenzor inercije simetričan oko dijagonale, tj. nedijagonalni element u n-tom retku i m-tom stupcu ($n \neq m$) jednak je onome koji se nalazi u m-tom retku i n-tom stupcu. Ovo svojstvo simetrije tenzora inercije nije posljedica neke simetrije tijela. Naprotiv, ono vrijedi za bilo koje tijelo, ma kako ono bilo nepravilno, jer smo upravo s takvom pretpostavkom započeli cijeli izvod.

Svojstvo simetrije tenzora inercije ima jednu veoma važnu posljedicu. Pretpostavimo da, umjesto u sustavu $Oxyz$, izrazimo sve veličine u nekom zakrenutom sustavu $Ox'y'z'$. Isti trenutni vektor $\vec{L}$ imao bi komponente $L_{x'}$, $L_{y'}$ i $L_{z'}$ duž novih osi. Analogno možemo reći i za komponente vektora $\vec{\omega}$. Matrični elementi tenzora inercije imali bi također neke nove vrijednosti. Naime, za danu trenutnu orijentaciju tijela u prostoru, jedna te ista i-ta čestica ima u sustavu $Oxyz$ koordinate x_i, y_i i z_i, dok u zakrenutom sustavu $Ox'y'z'$ ima drugačije koordinate x_i', y_i' i z_i', pa računanje matričnih elemenata tenzora inercije daje drugačije vrijednosti.

Zbog simetrije tenzora inercije, moguće je uvijek naći takav sustav $Ox'y'z'$ da iščeznu svi nedijagonalni elementi. Dokaz zahtijeva poznavanje matričnih transformacija i postupka dijagonalizacije, što ne ćemo izlagati u ovoj knjizi. No i bez upoznavanja s tim računom ne treba nas iznenaditi najavljeni rezultat. Naime, tenzor inercije ima šest nedijagonalnih elemenata, ali su zbog simetrije samo tri neovisna. Bilo koje zakretanje sustava $Ox'y'z'$ u odnosu na sustav $Oxyz$ može se izvesti slijedom od tri neovisna zakreta oko različitih osi, pa se odgovarajućim odabirom triju kutova zakreta može postići iščezavanje triju neovisnih nedijagonalnih elemenata tenzora inercije.

Pretpostavimo da smo našli laboratorijski (inercijalni) koordinatni sustav $Ox'y'z'$ u kojemu iščezavaju nedijagonalni elementi tenzora inercije krutog tijela u danome trenutku. Uvedimo sada koordinatni sustav $Oabc$, koji se u tome trenutku poklapa sa sustavom $Ox'y'z'$, pa i u njemu iščezavaju nedijagonalni elementi tenzora inercije. Međutim, smatrajmo da je sustav $Oabc$ nepomično vezan uz kruto tijelo, pa će u njemu trajno iščezavati nedijagonalni elementi tenzora inercije. Njegove dijagonalne elemente označimo simbolima I_a, I_b i I_c. $Oabc$ predstavlja sustav glavnih osi krutog tijela o kojemu smo već ranije govorili.

Prikazujući sada kutne kinematičke veličine u sustavu glavnih osi, možemo napisati matričnu jednadžbu

$$\begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (7.86)$$

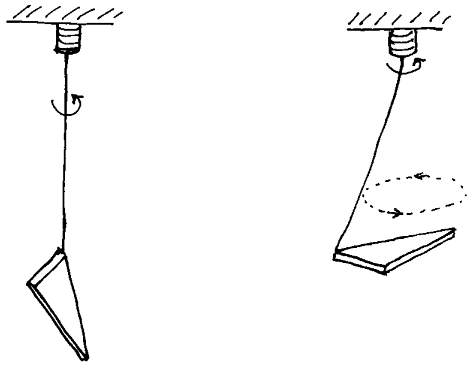
Alternativno, možemo napisati vektorsku jednadžbu

$$\vec{L} = I_a\, \omega_a\, \hat{a} + I_b\, \omega_b\, \hat{b} + I_c\, \omega_c\, \hat{c} \quad (7.87)$$

gdje su $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$ jedinični vektori duž glavnih osi krutog tijela. Zbog različitosti momenata inercije oko pojedinih glavnih osi, vektor $\vec{L}$ neće općenito biti kolinearan s vektorom $\vec{\omega}$. Kolinearnost se javlja jedino u slučajevima kada je vektor $\vec{\omega}$ položen duž neke od glavnih osi krutog tijela. Ovaj zaključak upotpunjuje raspravu povodom jednadžbi (7.82)-(7.84), a o njemu će još biti riječi kasnije.

Stabilna i labilna rotacija

Eksperimentalnu demonstraciju glavnih osi krutog tijela možemo pratiti ako tijelo objesimo na elastičnu nit i počnemo vrtjeti objesište niti (slika 7.27). Na tijelo počne djelovati moment sile duž vertikalne osi, pa se u općenitom slučaju opaža složenije gibanje u kojemu tijelo rotira, ali se ujedno i zakreće dok mu se glavna os a, oko koje je moment



Slika 7.27: Kada objesište rotira, uvija se elastična nit na kojoj visi tijelo. Kod brže vrtnje, tijelo se postavi tako da os rotacije bude duž glavne osi s najvećim momentom inercije.

inercije najveći, ne postavi duž nametnute osi rotacije u prostoru. Tada je postignuta *stabilna* rotacija.

Ukoliko je tijelo početno orijentirano tako da mu glavna os b bude točno u smjeru nametnute osi rotacije u prostoru, tijelo će upravo tako rotirati, no to je *labilna* rotacija jer će se, u slučaju nastanka i najmanjeg otklona osi b od tog smjera, otklon nastaviti povećavati s time da će se glavna os a u konačnici postaviti duž nametnute osi rotacije u prostoru.

Stabilna rotacija moguća je i oko glavne osi c, ali samo do malenih eventualnih otklona. Za veće otklone, tijelo se zakreće prema stabilnoj rotaciji oko glavne osi a.

7.4 Rotacija krutog tijela oko učvršćene točke

U prethodnim smo odjeljcima obrađivali rotaciju krutog tijela oko osi učvršćene u ležajima i rotaciju slobodnog krutog tijela oko glavne osi. U oba slučaja ostaje os rotacije nepomična u prostoru. Spomenuli smo i mogućnost da kruto tijelo trenutno rotira oko osi koja se ne poklapa s nekom od glavnih osi, ali nismo istražili evoluciju takva gibanja u uvjetima kada os rotacije nije učvršćena, tj. kada se ona može slobodno u prostoru zakretati.

7.4.1 Eulerove jednadžbe za rotaciju krutog tijela

Za matematički opis općenitog rotacijskog gibanja krutog tijela, potrebno je krenuti od temeljne dinamičke jednadžbe

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{7.88}$$

Promatranje obavljamo iz laboratorijskog inercijalnog sustava S, kojemu su osi $Oxyz$. Neka u tom referentnom sustavu tijelo ima u početnom trenutku neku kutnu brzinu rotacije oko osi koja se ne mora poklapati s nekom od glavnih osi krutog tijela. Interesira nas vremenska evolucija vektora kutne brzine $\vec{\omega}$, a nju ne možemo dobiti jednostavno iz jednadžbe (7.88) jer za općenito nesimetrično tijelo vektori $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ nisu nužno paralelni. Da bismo to bolje razumjeli, rastavimo trenutnu kutnu brzinu na komponente u koordinatnom sustavu $S^{'}$, kojemu se osi $Oabc$ podudaraju s glavnim osima krutog tijela

$$\vec{\omega} = \omega_a\,\hat{a} + \omega_b\,\hat{b} + \omega_c\,\hat{c} \tag{7.89}$$

Napomena: Vektor $\vec{\omega}$ u jednadžbi (7.89) nije kutna brzina rotacije tijela u odnosu prema sustavu glavnih osi. Naime, takve rotacije nema jer su glavne osi fiksno vezane za samo kruto tijelo. Vektor $\vec{\omega}$ predstavlja trenutnu kutnu brzinu rotacije krutog tijela u odnosu na laboratorijski inercijalni sustav. Načelno, svaki vektor možemo rastavljati na komponente duž osi bilo kojeg koordinatnog sustava, pa tako možemo i vektor $\vec{\omega}$ rastaviti na komponente duž osi rotirajućeg sustava $S^{'}$. Razumije se, te komponente imaju svoje vremenske ovisnosti, a upravo njih ćemo ovdje ispitivati.

Jednako tako i vektor trenutne kutne količine gibanja krutog tijela možemo rastaviti na komponente u sustavu $S^{'}$

$$\vec{L} = I_a\,\omega_a\,\hat{a} + I_b\,\omega_b\,\hat{b} + I_c\,\omega_c\,\hat{c} \tag{7.90}$$

što je zapravo prepisana jednadžba (7.87).

Problem možemo riješiti ako vremensku derivaciju vektora $\vec{L}$ u jednadžbi (7.88) povežemo s derivacijom tog vektora u sustavu $S^{'}$ koji je trajno vezan uz kruto tijelo i kao takav rotira u odnosu prema laboratorijskom sustavu upravo trenutnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Sukladno poznatoj nam relaciji (4.55), pišemo

$$\left[\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_S = \vec{\omega} \times \vec{L} + \left[\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{S'} \tag{7.91}$$

Drugi član s desne strane znaka jednakosti povezan je s promjenama vrijednosti komponenata kutne brzine sukladno jednadžbi (7.90)

$$\left[\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_{S'} = I_a \frac{d\omega_a}{dt}\,\hat{a} + I_b \frac{d\omega_b}{dt}\,\hat{b} + I_c \frac{d\omega_c}{dt}\,\hat{c} \tag{7.92}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (7.91) i (7.92) u (7.88) i rješavanjem vektorskog produkta, dobivamo rezultat koji možemo napisati po komponentama

$$I_a \frac{d\omega_a}{dt} - (I_b - I_c)\,\omega_b\omega_c = M_a \tag{7.93}$$

$$I_b \frac{d\omega_b}{dt} - (I_c - I_a)\,\omega_c\omega_a = M_b \tag{7.94}$$

$$I_c \frac{d\omega_c}{dt} - (I_a - I_b)\,\omega_a\omega_b = M_c \tag{7.95}$$

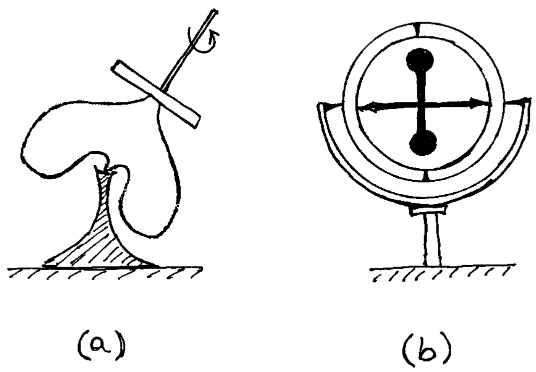
Dobili smo *Eulerove jednadžbe* za rotaciju krutog tijela.

Budući da su Eulerove jednadžbe napisane po komponentama u sustavu glavnih osi, ne izgeda na prvi pogled da bi one mogle biti od značajnije koristi u opisivanju gibanja krutog tijela u laboratorijskom inercijalnom sustavu. No, prepustimo konačan sud ishodu analize nekih posebnih slučajeva.

7.4.2 Slobodna rotacija osno simetričnog tijela oko težišta

Kod osno simetričnog tijela, jedna od glavnih osi je upravo njegova os rotacijske simetrije, koja se zbog svog isticanja naziva još i *os figure*. Označimo je kao os a, a moment inercije oko nje kao I_a. Za druge dvije glavne osi možemo odabrati bilo koje dvije uzajamno okomite osi koje leže u ravnini okomitoj na os a. Za njih vrijedi $I_b = I_c \neq I_a$.

Razmotrimo ovdje idealan slučaj u kojemu je tijelo potpuno slobodno od djelovanja bilo kakvog vanjskog momenta sile ($\vec{M} = 0$). Takvu bismo situaciju mogli zamisliti negdje u Svemiru, gdje je gravitacijsko djelovanje zanemarivo. Mnogo realističnije, može se takav slučaj ostvariti ako se postavi igličast potporanj točno u težištu tijela, kao što primjerice pokazuje slika 7.28a. Alternativno,



Slika 7.28: (a) Osno simetrično tijelo s uporištem u težištu. (b) Osno simetrično tijelo u kardanskom zglobu. Šiljci na stalku podržavaju vanjski prsten te mu omogućuju slobodnu rotaciju oko horizontalne osi. Od vanjskog prstena idu šiljci prema unutarnjem prstenu te ga podržavaju i omogućuju njegovu rotaciju. Osno simetrično tijelo ima svoje šiljke kojima je uprto u unutarnji prsten. Sustav triju para šiljaka omogućuje zakretanje tijela u svim smjerovima s time da težište ostaje na istome mjestu.

možemo postaviti tijelo u kardanski zglob kako je prikazano na slici 7.28b. U svakom slučaju, težište tijela miruje u laboratorijskom inercijalnom sustavu, a moguća je općenita rotacija tijela oko te točke.

Ako je po pretpostavci $\vec{M} = 0$, jednadžba (7.88) daje $\vec{L} = konst$. To znači da je kutna količina gibanja konstantna po iznosu i po smjeru u laboratorijskom inercijalnom sustavu. Ostaje pitanje ponašanja kutne brzine $\vec{\omega}$, koje moramo razmotriti.

Poseban slučaj. Rješenja vremenskih diferencijalnih jednadžbi uvijek zahtijevaju postavljanje nekih početnih uvjeta. Ovdje se to svodi na zadavanje triju komponenti vektora kutne brzine u početnom trenutku $t = 0$. Ako je u tom trenutku kutna brzina imala smjer duž osi figure a, takvo će se stanje održavati i dalje. To je smisao pojma glavne osi, koji smo već obradili u prethodnom odjeljku. U tome posebnom slučaju, vektori $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ su paralelni.

Općenit slučaj. Postavlja se pitanje kakvo gibanje nastaje u općenitom slučaju, kada kutna brzina ima u početnom trenutku neki smjer koji odstupa

od osi figure a za neki kut α. Eksperimentalnu izvedbu takve situacije mogli bismo ostvariti pomoću tijela probodenog npr. nekom iglom koja prolazi kroz težište, ali se ne poklapa s osi figure, nego čini s njom odabrani kut α. Igla može poslužiti kao osovina koju položimo u ležišta i zavrtimo tijelo dok ne postigne neku kutnu brzinu $\vec{\omega}$ duž smjera igle. Bila bi to rotacija oko nepomične osi za koju je potrebno djelovanje ležišta silama na osovinu, tj. djelovanje momenta sile na tijelo. Os figure bi u svome gibanju ocrtavala plašt zamišljenog geometrijskog stošca oko igle. Ako u nekom trenutku uklonimo ležišta osovine, prestane djelovanje momenta sile na tijelo, tj. ono postane potpuno slobodno. Smatrajmo taj trenutak početnim ($t = 0$). Kutna brzina ima u početnom trenutku smjer koji je imala učvršćena igla u prostoru, a os figure neki položaj na plaštu spomenutog stošca. Proučimo što se zbiva nakon što tijelo postane slobodno.

Riješimo problem najprije u sustavu glavnih osi tijela, a kasnije ćemo rezultat prenijeti u laboratorijski inercijalni sustav. Uvrštavajući $\vec{M} = 0$, te $I_b = I_c$ u Eulerove jednadžbe (7.93)-(7.95), dobivamo nakon sređivanja

$$\frac{d\omega_a}{dt} = 0 \tag{7.96}$$

$$\frac{d\omega_b}{dt} + \Omega\,\omega_c = 0 \tag{7.97}$$

$$\frac{d\omega_c}{dt} - \Omega\,\omega_b = 0 \tag{7.98}$$

gdje je uvedena pokrata

$$\Omega = \frac{I_a - I_b}{I_b}\,\omega_a \tag{7.99}$$

Veličina Ω ima očito dimenziju kutne brzine, a rješenja gornjih diferencijalnih jednadžbi glase

$$\omega_a(t) = A = konst. \tag{7.100}$$

$$\omega_b(t) = B\cos\Omega t \tag{7.101}$$

$$\omega_c(t) = B\sin\Omega t \tag{7.102}$$

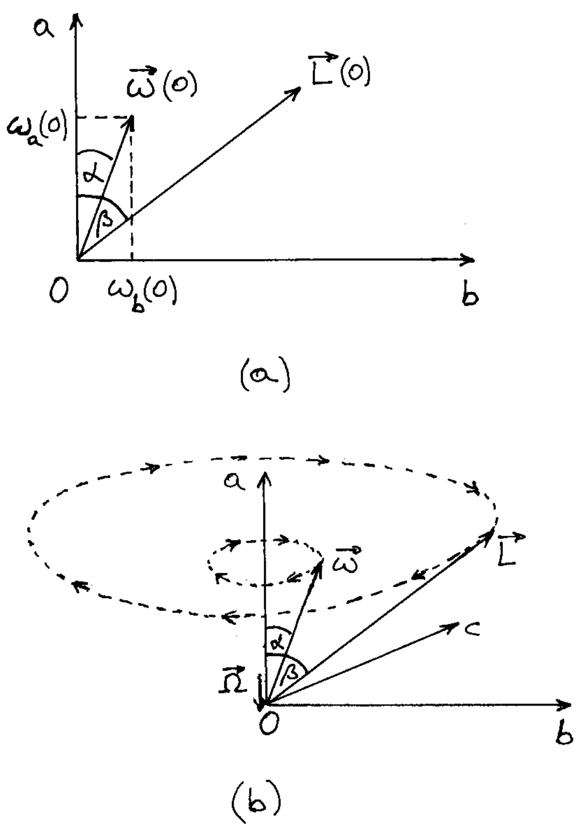
gdje je početni trenutak ($t = 0$) odabran tako da bude $\omega_b(0) = B$ i $\omega_c(0) = 0$. Možemo također pisati $A = \omega\cos\alpha$ te $B = \omega\sin\alpha$, tj. početni su uvjeti zadani iznosom kutne brzine ω i kutom α što ga vektor kutne brzine čini s osi figure krutog tijela.

Iz gornjih rješenja slijedi da se iznos vektora $\vec{\omega}$ tijekom vremena ne mijenja

$$\omega = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2 + \omega_c^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{7.103}$$

Vremenske promjene pojedinih komponenti pokazuju da vektor $\vec{\omega}$ rotira oko glavne osi a kutnom brzinom Ω. Pojavu kada os trenutne rotacije tijela polagano mijenja smjer u krug oko neke druge osi nazivamo *precesijom.* Ovdje možemo definirati vektor $\vec{\Omega} = \Omega\hat{a}$ kao kutnu brzinu precesije u sustavu glavnih osi krutog tijela.

Korisno je vizualizirati dosad uvedene vektore u sustavu glavnih osi krutog tijela. Slika 7.29a prikazuje stanje u trenutku $t = 0$, kada vektor kutne brzine rotacije $\vec{\omega}$ leži trenutno u ravnini Oab. Kut α što ga taj vektor čini s glavnom osi a određen je



Slika 7.29: (a) U početnom trenutku $t = 0$ vektor kutne brzine nalazi se u ravnini Oab glavnih osi krutog tijela. U odabranom primjeru je $I_b > I_a$ (tijelo je izduljeno duž osi figure), tako da je vektor kutne količine gibanja otklonjen od osi a za kut $\beta > \alpha$. (b) Oba vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{L}$ rotiraju (precesiraju) kutnom brzinom $\vec{\Omega}$ oko glavne osi a (os figure).

jednostavnom relacijom

$$tg\,\alpha = \frac{\omega_b(0)}{\omega_a(0)} = \frac{B}{A} \tag{7.104}$$

Koristeći se jednadžbom (7.90), možemo odrediti kut β što ga čini vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$ s glavnom osi a

$$tg\,\beta = \frac{I_b\,\omega_b(0)}{I_a\,\omega_a(0)} = \frac{I_b}{I_a}\,tg\,\alpha \tag{7.105}$$

Slučaj na slici 7.29a odnosi se na tijelo koje je izduljeno duž osi figure tako da za njega vrijedi odnos $I_b > I_a$, pa je slijedom gornjih jednadžbi $\beta > \alpha$.

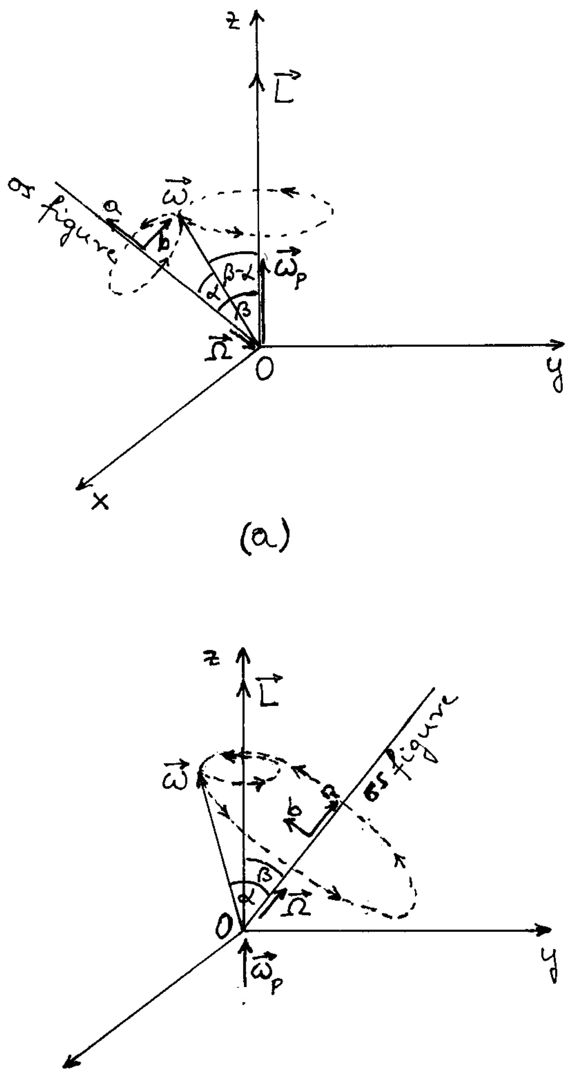
Prema jednadžbi (7.105), kut β je također konstanta kao i kut α, pa možemo odmah zaključiti da u sustavu glavnih osi vektor $\vec{L}$ rotira oko osi a kutnom brzinom precesije $\vec{\Omega}$, baš kao i vektor $\vec{\omega}$. Za izbor $I_b > I_a$ jednadžba (7.99) daje $\Omega < 0$, što znači da se precesija oko osi a odvija u negativnom smjeru, odnosno vektor $\vec{\Omega}$ leži duž negativnog smjera osi a, kako prikazuje slika 7.29b.

Napomena: Ne treba nas zabrinjavati što ovdje vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$ rotira, dakle nije konstantan, iako prema početnoj pretpostavci moment sile iščezava $\vec{M} = 0$. Naime, na slici 7.29b prikazana je evolucija vektora $\vec{L}$ u odnosu prema sustavu glavnih osi, koji nije inercijalan sustav jer rotira u odnosu na laboratorijski.

Nama je u konačnici važno doznati kako izgleda gibanje krutog tijela u laboratorijskom inercijalnom sustavu $Oxyz$. U tom je sustavu vektor kutne količine gibanja konstantan, pa je zgodno orijentirati koordinatni sustav tako da njegova os z bude položena upravo duž smjera vektora $\vec{L}$, kao što prikazuje slika 7.30a.

Da bi kruto tijelo u svakom trenutku rotiralo kutnom brzinom $\vec{\omega}$, a kutna količina gibanja tijela $\vec{L}$ ostajala fiksnom, mora se smjer vektora $\vec{\omega}$ mijenjati tijekom vremena tako da precesira oko osi z nekom kutnom brzinom $\vec{\omega}_p$. Naš je zadatak odrediti upravo tu kutnu brzinu precesije koja se opaža u laboratorijskom sustavu. Pri tome će nam pomoći poznavanje prethodno određene kutne brzine precesije $\vec{\Omega}$ u sustavu slobodnih osi krutoga tijela.

Precesija vektora $\vec{\omega}$ oko osi figure, koju smo u sustavu slobodnih osi prikazali na slici 7.29b, očituje se sada u slici 7.30a tako što se geometrijski stožac



Slika 7.30: (a) U laboratorijskom inercijalnom sustavu vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$ ostaje konstantan, a vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ i os figure tijela precesiraju kutnom brzinom $\vec{\omega}_p$ oko vektora $\vec{L}$. Proces se može opisati kao kotrljanje zamišljenog geometrijskog stošca s bazom okomitom na os figure (strelice na crtkanoj liniji označavaju smjer okretanja baze stošca) po plaštu fiksnog geometrijskog stošca oko vektora $\vec{L}$. Prikaz se odnosi na slučaj krutog tijela za koje vrijedi $I_b > I_a$. (b) Prikaz precesije vektora za kruto tijelo s $I_a > I_b$. Zamišljeni stožac s bazom okomitom na os figure kotrlja se tako da svojim plaštom s unutarnje strane oblaže plašt fiksnog stošca oko vektora $\vec{L}$.

s bazom oko osi figure kotrlja naslanjajući se svojim plaštom na drugi geometrijski stožac oko osi z. Dodirnu liniju dvaju stožaca čini vektor $\vec{\omega}$. Prilikom navedenog kotrljanja vektor $\vec{\omega}$ precesira oko osi z kutnom brzinom $\vec{\omega}_p$, a istodobno precesira i oko osi figure kutnom brzinom $\vec{\Omega}$. Naime, u kotrljanju stošca prema slici 7.30a, zakreće se os b tako da, relativno prema sustavu glavnih osi, vektor $\vec{\omega}$ precesira kutnom brzinom $\vec{\Omega}$.

Zamislimo vektor $\vec{r}$ koji bi uvijek slijedio smjer vektora $\vec{\omega}$. Tada bi se vrh vektora $\vec{r}$ gibao kružno oko osi z, a njegova bi obodna brzina u svakome trenutku morala biti određena bilo tako da se računa putem rotacije oko osi figure, ili konzistentno putem rotacije oko osi z, tj. mora biti ispunjen uvjet

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_p \times \vec{r} \tag{7.106}$$

Iz ove jednadžbe slijedi algebarski izraz

$$-\Omega \, \sin\alpha = \omega_p \, \sin(\beta - \alpha) \tag{7.107}$$

gdje smo unijeli negativan predznak tako da uz $\Omega < 0$ (za slučaj $I_b > I_a$) dobijemo pozitivnu veličinu s lijeve strane jednadžbe. Uvažimo li, pored izraza za Ω iz jednadžbe (7.99), također i poznatu trigonometrijsku relaciju za sinus razlike kutova, dobivamo

$$\frac{I_b - I_a}{I_b} \, \omega \cos\alpha \sin\alpha = \omega_p (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) \tag{7.108}$$

U jednadžbi (7.105) možemo tangense kutova izraziti putem omjera sinusa i kosinusa, te preinačiti tu jednadžbu u oblik

$$\cos\beta \sin\alpha = \frac{I_a}{I_b} \, \sin\beta \cos\alpha \tag{7.109}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (7.108) i sređivanjem dobivamo konačni rezultat

$$\omega_p = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \, \omega \tag{7.110}$$

Ako je zadana kutna brzina ω kojom rotira kruto tijelo, te kut α kao početni uvjet, možemo odrediti kut β poznavajući I_a i I_b, te konačno kutnu brzinu ω_p kojom vektor $\vec{\omega}$ i os figure precesiraju oko konstantnog vektora $\vec{L}$ u laboratorijskom inercijalnom sustavu.

U realnom promatranju takve rotacije krutog tijela oko zapaža os figure koja precesira oko nekog smjera u prostoru. Smjer vektora $\vec{\omega}$ nije posebno uočljiv. Tek ako se okomito na os figure postavi krug razdijeljen na tri jednaka kružna isječka, od kojih je svaki obojan drugom bojom, može se opaziti da vektor $\vec{\omega}$ ima trenutno smjer prema jednom od segmenata jer se uočava kružić boje tog segmenta, dok se oko kružića vidi vijenac u boji koju oko stvara miješajući tri boje. Precesija vektora $\vec{\omega}$ oko osi figure opaža se kao polagana ciklička promjena boje kružića.

Radi potpunosti ove rasprave o rotaciji slobodnog krutog tijela, dodana je i slika 7.30b koja prikazuje odnose vektora za tijelo koje je prošireno u ravnini okomitoj na os figure. Za njega vrijedi $I_a > I_b$, što daje $\alpha > \beta$. Oko plašta užeg stošca kotrlja se plašt šireg stošca tako da se dodiruju na mjestu vektora $\vec{\omega}$. U tom kotrljanju vektor izvodi precesiju oko osi z, ali i oko osi figure krutog tijela.

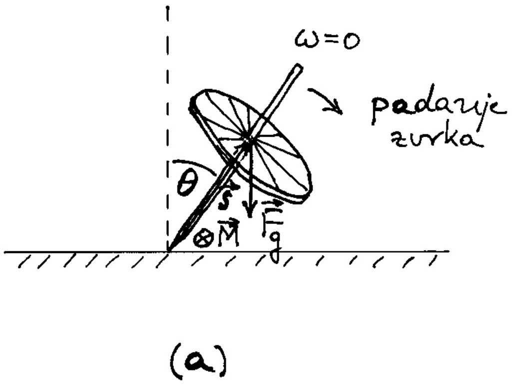
7.4.3 Gibanje zvrka oko učvršćene točke na osi simetrije

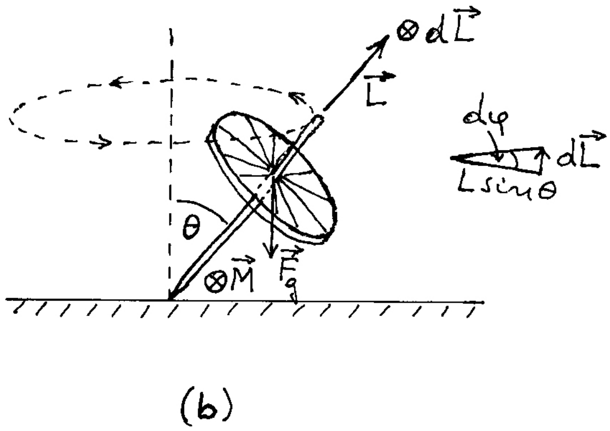
Zanimljiv je slučaj zvrka (osno simetričnog tijela) koji je učvršćen u nekoj točki na osi simetrije, udaljenoj od težišta tako da gravitacijsko polje može uzrokovati moment sile oko te točke. Takav je slučaj prikazan na slici 7.31a. U početnom trenutku, os simetrije zvrka nagnuta je za kut θ od vertikale. Ako zvrk tada ne rotira oko svoje osi, njegova kutna količina gibanja iščezava ($\vec{L} = 0$) i tek njegovim otpuštanjem iz početnog položaja dolazi do promjene

$$d\vec{L} = \vec{M} \, dt \tag{7.111}$$

gdje je $\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F}_g$ moment gravitacijske sile oko uporišne točke, a $\vec{s}$ je udaljenost težišta zvrka od uporišne točke. Smjer vektora $\vec{M}$ je okomit na $\vec{s}$ i $\vec{F}_g$ kako prikazuje slika 7.31a, te uzrokuje zakretanje zvrka oko te osi sve do njegova pada na podlogu. Pri tome vektor $\vec{L}$ raste od nule do neke vrijednosti uoči pada zvrka na podlogu, a njegov se smjer poklapa s onim vektora $\vec{M}$. To nije posebno zanimljiv proces, ali ga navodimo radi kontrasta s mnogo zanimljivijim ponašanjem rotirajućeg zvrka.

Na slici 7.31b prikazano je početno stanje u kojemu je zvrku dana kutna brzina rotacije $\vec{\omega}_a$ oko njegove osi simetrije (glavna os a), tako da ima početnu kutnu količinu gibanja $\vec{L} = I_a \, \vec{\omega}_a$. Nakon otpuštanja zvrka, dolazi uslijed djelovanja momenta sile $\vec{M}$ do promjene kutne količine gibanja





Slika 7.31: (a) Osno simetrično tijelo (zvrk) postavljeno je tako da ima jednu uporišnu točku na podlozi, a os simetrije mu je nagnuta za kut θ od vertikale. Nije uspostavljena početna rotacija zvrka oko njegove osi simetrije. Nakon otpuštanja, moment gravitacijske sile uzrokuje povećanje nagiba zvrka do njegova pada na podlogu. (b) Ako je zvrku dana početna rotacija oko njegove osi simetrije, odnosno pripadna kutna količina gibanja $\vec{L}$, nastaje precesija zvrka oko vertikalne osi jer moment gravitacijske sile uvijek uzrokuje promjenu $d\vec{L}$ u trenutnom smjeru $\vec{M}$. Pomoćni crtež sa strane prikazuje pogled odozgo na projekciju $L\sin\theta$ u horizontalnoj ravnini i promjenu $d\vec{L}$ koja dovodi do zaktreta za kut $d\varphi$ u intervalu vremena dt.

$d\vec{L}$, koja je okomita na zatečeni vektor $\vec{L}$. Rezultat je zakretanje vektora $\vec{L}$ oko vertikalne osi, kako je naznačeno na slici 7.31b. Na pomoćnom crtežu sa strane prikazana je projekcija vektora $\vec{L}$ na horizontalnu ravninu ($L\sin\theta$) i njeno zakretanje za kut $d\varphi$ u intervalu vremena dt. Iz prikazanog odnosa slijedi $dL = L\,\sin\theta\,d\varphi$, pa iz jednadžbe (7.111) slijedi

$$L\,\sin\theta\,d\varphi = m\,g\,s\,\sin\theta\,dt \tag{7.112}$$

odnosno kutna brzina precesije osi zvrka oko vertikalne osi

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{m\,g\,s}{I_a\,\omega_a} \tag{7.113}$$

Što je veća kutna brzina ω_a rotacije zvrka oko njegove osi simetrije, to je sporija precesija zvrka oko vertikalne osi. Također, zvrk s većim momentom inercije I_a oko osi simetrije, sporije će precesirati oko vertikalne osi.

Ovo je bio simplificirani prikaz gibanja zvrka, koji je približno valjan ukoliko se početno ostvari velika kutna brzina rotacije zvrka oko vlastite osi tako da se precesija potom odvija malenom kutnom brzinom. Rigorozni pristup je znatno složeniji. Naime, čim utvrdimo da, pored ω_a oko glavne osi zvrka, postoji i ω_p oko neke druge osi, znači da ukupna trenutna kutna brzina rotacije krutog tijela odstupa od smjera glavne osi, pa se moramo upustiti u složenije razmatranje.

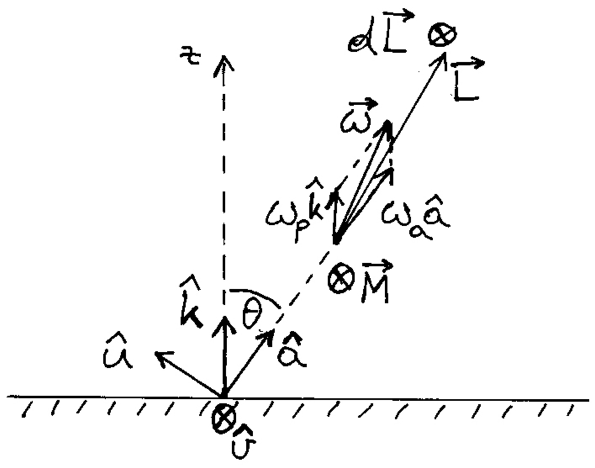
Obično se polazi od toga da je zadan moment sile $\vec{M}$ i neki početni uvjeti, pa se zatim proračunava vremensko ponašanje kinematičkih veličina. Taj je račun u ovome slučaju jako složen, pa načinimo sada obrnuti redoslijed pretpostavivši da se odvija jedno ustaljeno vremensko ponašanje kinematičkih veličina, te potražimo kakav uvjet mora zadovoljiti moment sile da bi se ostvarivala takva zadana kinematika.

U konkretnom slučaju, pretpostavimo da zvrk rotira kutnom brzinom ω_a oko svoje osi simetrije, koja je otklonjena od osi z za fiksan kut θ, te precesira stalnom kutnom brzinom ω_p oko nje. Vektor ukupne trenutne kutne brzine rotacije zvrka iznosi

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_a\,\hat{a} + \omega_p\,\hat{k} \\ &= (\omega_a + \omega_p\,\cos\theta)\,\hat{a} + \omega_p\,\sin\theta\,\hat{u}\end{aligned} \tag{7.114}$$

gdje je $\hat{a}$ jedinični vektor duž osi simetrije zvrka, $\hat{k}$ je jedinični vektor duž vertikalne laboratorijske osi z, a $\hat{u}$ je jedinični vektor okomit na $\hat{a}$ s time da uvijek leži u ravnini koju određuju vektori $\hat{a}$ i $\hat{k}$ (slika 7.32).

Jedinični vektor $\hat{u}$ očito nije fiksan u zvrku, ali je uvijek okomit na glavnu os a, pa je moment inercije zvrka duž smjera $\hat{u}$ uvijek jednak $I_u = I_b = I_c$, gdje



Slika 7.32: Vektor trenutne kutne brzine zvrka $\vec{\omega}$ ima komponentu duž glavne osi zvrka $\omega_a\,\hat{a}$ zbog vrtnje oko te osi i komponentu $\omega_p\,\hat{k}$ oko vertikalne osi zbog precesije zvrka oko te osi. Zbog nejednakih momenata inercije zvrka oko glavnih osi (pretpostavljeno je $I_a > I_b = I_c$) vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$ otklonjen je od $\vec{\omega}$. Jedinični vektor $\hat{u}$ je okomit na $\hat{a}$ i leži uvijek u ravnini koja je zadana vektorima $\hat{a}$ i $\hat{k}$. Jedinični vektor $\hat{v}$ je uvijek okomit na navedenu ravninu.

se indeksi b i c odnose na glavne osi zvrka koje su okomite na os a. Stoga možemo izraziti trenutnu kutnu količinu gibanja zvrka u obliku

$$\vec{L} = I_a\,(\omega_a + \omega_p\,\cos\theta)\,\hat{a} + I_u\,\omega_p\,\sin\theta\,\hat{u} \quad (7.115)$$

Vektor $\vec{L}$ je očito uvijek u ravnini koju čine vektori $\hat{a}$ i $\hat{u}$, pa time vektor $\vec{L}$ također precesira kutnom brzinom ω_p oko osi z. Vremensku promjenu vektora $\vec{L}$ možemo lako izračunati po općoj formuli za rotaciju vektora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega_p} \times \vec{L} \quad (7.116)$$

Uvažavajući rastavljanje vektora $\vec{\omega_p}$ na komponente duž vektora $\hat{a}$ i $\hat{u}$, te izraz za $\vec{L}$ iz jednadžbe (7.115), dobivamo nakon vektorskog množenja

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega_p\,\sin\theta\,\left[I_a\,(\omega_a + \omega_p\,\cos\theta) - I_u\,\omega_p\,\cos\theta\right]\,\hat{v} \quad (7.117)$$

gdje je uveden jedinični vektor $\hat{v} = \hat{u} \times \hat{a}$. Moment sile se može izraziti kao $\vec{M} = m\,g\,s\,\sin\theta\,\hat{v}$, pa izjednačavanjem s gornjim izrazom dobivamo traženi uvjet

$$\omega_p\,\left[I_a\,(\omega_a + \omega_p\,\cos\theta) - I_u\,\omega_p\,\cos\theta\right] = m\,g\,s \quad (7.118)$$

Dakle, rotacija zvrka oko vlastite osi uz precesiju oko osi z pod konstantnim kutom nagiba može se trajno održavati (zanemarujući trenje) samim gravitacijskim djelovanjem na zvrk, ukoliko parametri zadovoljavaju jednadžbu (7.118). Ako npr. postavimo određeni kut nagiba θ i zavrtimo zvrk oko njegove osi nekom kutnom brzinom ω_a, morala bi kutna brzina precesije iznositi (rješenje kvadratne jednadžbe (7.118))

$$\omega_p = \frac{-I_a\,\omega_a + \sqrt{I_a^2\omega_a^2 + 4(I_a - I_u)mgs\cos\theta}}{2(I_a - I_u)\cos\theta} \quad (7.119)$$

Međutim, stvaranje uvjeta za takvo trajno gibanje nije jednostavno jer bi odmah u početnom trenutku valjalo dati zvrku izračunatu kutnu brzinu precesije. Obično pustimo zvrk iz položaja mirovanja njegove osi, tj. tako da je u početnom trenutku $\omega_p = 0$. Razumije se, uvjet iz jednadžbe (7.118) nije tada zadovoljen. Zbog djelovanja momenta sile, zvrk krene u precesiju lagano povećavajući ω_p, no zbog trenutnog nezadovoljavanja uvjeta (7.118) mijenja se i parametar θ tako da se povećava. To ujedno znači da se pojavljuje i trenutna kutna brzina ω_v oko smjera vektora $\hat{v}$

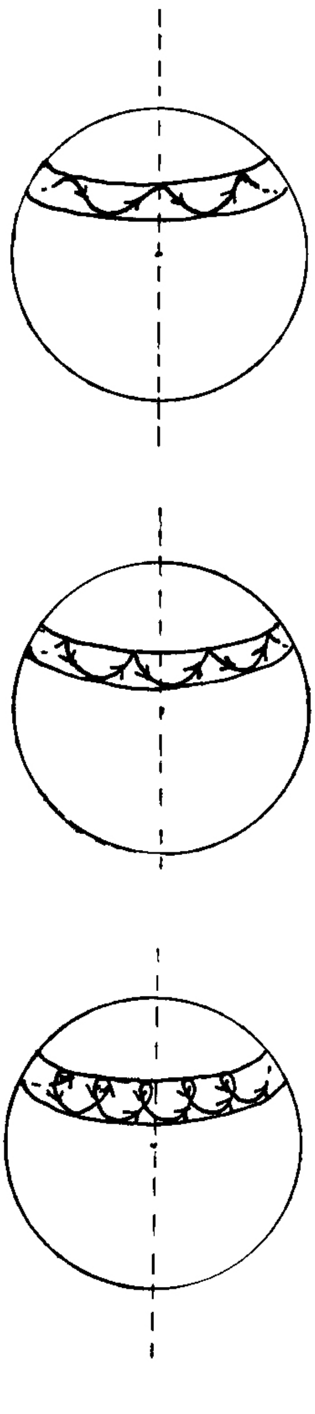
$$\omega_v = \frac{d\theta}{dt} \quad (7.120)$$

Ove su promjene ograničene zakonom očuvanja energije. Naime, kinetička energija zvrka raste uslijed dodatne rotacije, ali se potencijalna energija smanjuje jer se težište zvrka spušta uslijed povećanja kuta θ. U svakome trenutku mora biti zadovoljen uvjet

$$\frac{1}{2}\,I_a\,(\omega_a + \omega_p\,\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\,I_u(\omega_p^2\,\sin\theta^2 + \omega_v^2) + m\,g\,s\,\cos\theta = E = konst. \quad (7.121)$$

U tim uvjetima nastaje periodička izmjena potencijalne i kinetičke energije tako što nagibni kut θ varira tijekom vremena između dviju vrijednosti θ_1

i θ_2, koje ovise o početnim uvjetima. Također se i kutna brzina precesije ω_p periodički mijenja. Os simetrije zvrka opisuje neku krivulju nalik na jednu od onih koje su kao primjeri prikazane na slici 7.33. Točan oblik krivulje ovisi o početnim uvjetima. Pojava u kojoj tijekom precesije zvrka oko vertikalne osi dolazi do periodičke promjene nagiba osi zvrka naziva se *nutacija* (lat. *nutare - naginjati se, zibati se*).



Slika 7.33: Razni primjeri krivulja koje na zamišljenoj sfernoj plohi oko uporišne točke zvrka ispisuje njegova os simetrije tijekom precesije i nutacije. Točan oblik krivulje ovisi o početnim uvjetima. Sam zvrk nije prikazan na ovim slikama.

Gornji prikaz nutacije utemeljen je na okvirnim jednadžbama i fizikalnom rasuđivanju. Točan proračun gibanja zvrka nakon njegova otpuštanja zahtijeva postavljanje potpunog skupa jednadžbi i vodi na složen postupak rješavanja u koji ne ćemo ulaziti u ovoj knjizi.

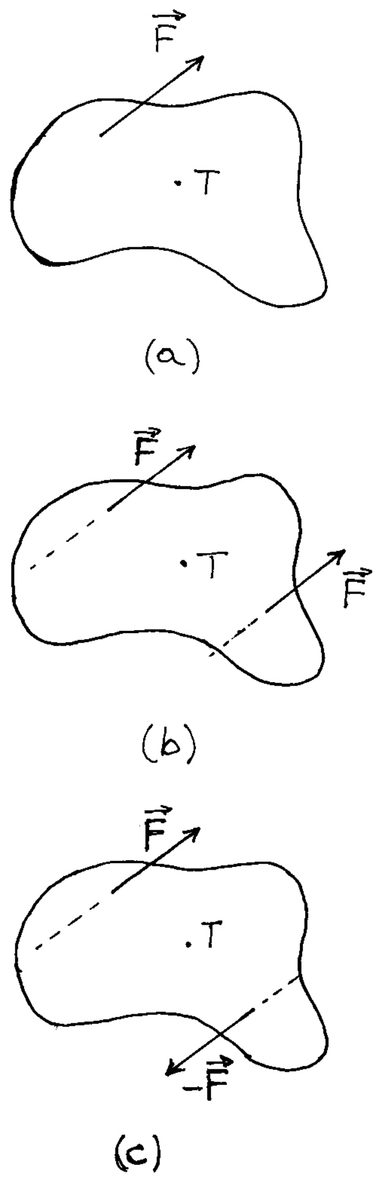
7.5 Općenito gibanje krutog tijela

U proučavanju rotacije krutog tijela oko težišta uzimali smo u obzir samo djelovanje momenta sile koji dolazi od nekog para sila. Postavlja se pitanje što se događa ako na inače slobodno (neučvršćeno) tijelo počne djelovati jedna sila (ili više sila koje daju jednu rezultantu). U slučaju kada pravac nositelj sile prolazi kroz težište, odgovor je lako dati. Sila naprosto daje akceleraciju tijelu u translatornom gibanju. Ako pak pravac nositelj sile ne prolazi kroz težište, kao što prikazuje slika 7.34a, odgovor moramo potražiti kroz dodatnu analizu.

Zamislimo da, pored zadane sile, postavimo još jednu isto toliku silu na paralelan pravac nositelj tako da težište bude po sredini između dva pravca (slika 7.34b). Tada je jasno da bi zajednički učinak dviju sila bio isti kao da na težište tijela djeluje dvostruka sila. Možemo stoga zaključiti da na translatorno gibanje tijela djeluje zadana sila kao da joj pravac nositelj prolazi kroz težište.

Postavimo li drugu silu tako da bude antiparalelna sa zadanom (slika 7.34c), dobili smo par sila kojemu je moment jednak produktu iznosa jedne sile i udaljenosti pravaca nositelja. Alternativno možemo reći da svaka sila stvara moment sile oko osi kroz težište, a zbroj tih momenata sila jednak je upravo momentu para sila.

Dakle, djelovanje jedne sile u proizvoljnom hvatištu krutog tijela ima učinak kao da joj je hvatište u težištu i povrh toga da na tijelo djeluje moment sile oko osi kroz težište.



Slika 7.34: (a) Na slobodno (neučvršćeno) tijelo djeluje sila kojoj pravac nositelj ne prolazi kroz težište tijela. (b) Djelovanje dviju jednakih sila na paralelnim pravcima nositeljima simetrično udaljenim od težišta jednako je djelovanju dvostruke sile u težištu. Stoga jedna sila ima učinak na translacijsko gibanje tijela kao da sama djeluje u težištu. (c) Par sila koje leže na paralelnim pravcima nositeljima simetrično udaljenim od težišta stvara dvostruko veći moment sile od onoga koji nastaje djelovanjem jedne sile oko težišta tijela. Stoga je za rotacijski učinak jedne sile mjerodavan moment te sile s obzirom na težište tijela.

7.6 Zakon očuvanja kutne količine gibanja

U izoliranom sustavu krutih tijela vrijede zakoni očuvanja energije i količine gibanja koje smo općenito uveli u prethodnom poglavlju. Sada možemo razmotriti kutne količine gibanja krutih tijela.

Slika 7.35a prikazuje dva kruta tijela A i B koja mogu rotirati oko neke odabrane točke O. Ako tijela djeluju uzajamno silama $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ sukladno trećemu Newtonovu zakonu, možemo utvrditi da tijela djeluju uzajamno momentima sila $\vec{M}_{AB}$ i $\vec{M}_{BA}$ za koje vrijedi

$$\vec{M}_{AB} = -\vec{M}_{BA} \tag{7.122}$$

Naime, sile $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ djeluju na istome pravcu nositelju, pa imaju jednak krak prema prema odabranoj točki O, a zbog suprotnih smjerova sila njihovi momenti su također suprotni. Možemo reći da je moment reakcije jednak po iznosu i suprotnog smjera od momenta akcije.

Uzajamno djelovanje dvaju tijela može se ostvariti i putem torzije spojne šipke kako prikazuje slika 7.35b. Momenti sile na krajevima šipke rezultat su unutarnjih sila koje nastaju u torziji, te za njih također vrijedi odnos kao u jednadžbi (7.122).

Ako se uzajamno djelovanje krutih tijela odvija u intervalu vremena dt, promjene kutnih količina gibanja pojedinih krutih tijela iznose

$$d\vec{L}_A = \vec{M}_{BA}\, dt \tag{7.123}$$

$$d\vec{L}_A = \vec{M}_{BA}\, dt \tag{7.124}$$

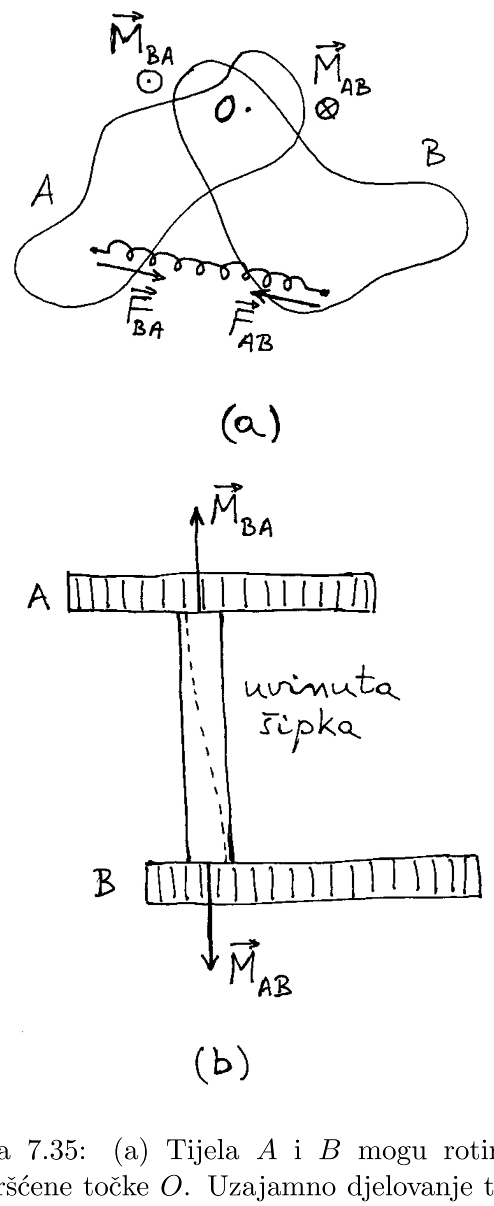
Zbog odnosa u jednadžbi (7.122) nalazimo da vrijedi

$$d\vec{L}_A = -d\vec{L}_B \tag{7.125}$$

Promjena kutne količine gibanja jednog krutog tijela jednaka je po iznosu i suprotnog je smjera od promjene kutne količine drugog tijela. Međudjelovanje dvaju tijela ima učinak kao da je jedno tijelo predalo dio kutne količine gibanja drugome tijelu. Time ukupna kutna količina gibanja dvaju tijela ostaje neizmijenjena. Do takva zaključka možemo doći i formalnim matematičkim postupkom iz jednadžbe (7.125)

$$d(\vec{L}_A + \vec{L}_B) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L}_A + \vec{L}_B = konst. \tag{7.126}$$

Ako su tijela u početnom trenutku t_1 imala kutne količine gibanja $\vec{L}_{A1}$ i $\vec{L}_{B1}$, onda će u kasnijem trenutku t_2 biti



Slika 7.35: (a) Tijela A i B mogu rotirati oko učvršćene točke O. Uzajamno djelovanje tijela ostvaruje se preko razapete opruge. Momenti sila $\vec{M}_{AB}$ i $\vec{M}_{BA}$ su jednaki po iznosu i suprotnih smjerova, pa isto vrijedi i za promjene kutnih količina gibanja dvaju tijela. (b) Dva tijela mogu djelovati jedno na drugo posredno preko uvijene šipke (crtkana bi linija bila ravna kod neuvijene šipke). Momenti sila koji djeluju na pojedina tijela jednaki su po iznosu i suprotnih smjerova.

$$\vec{L}_{A2} + \vec{L}_{B2} = \vec{L}_{A1} + \vec{L}_{B1} \tag{7.127}$$

Napomena: Sve kutne količine gibanja, kao i momente sila, valja računati s obzirom na jednu te istu točku. Ta točka može biti proizvoljno odabrana, no povoljnije je odabrati onu koja predstavlja neki centar simetrije tako da račun bude jednostavniji.

7.7 Rotacija tijela koje mijenja svoj oblik

Ponekad smo u prilici promatrati rotaciju nekog tijela koje može mijenjati svoj oblik tako da mu se mijenja moment inercije oko osi rotacije. Ako promjenu oblika tijela izvode unutarnje sile koje djeluju između pojedinih dijelova tijela, možemo računati kao da se radi o nekom sustavu više tijela, te svesti problem na poznate nam zakonitosti u izoliranom sustavu tijela.

Slika 7.36a prikazuje jednostavan sustav dviju kugli mase m koje su položene u horizontalan žlijeb i spojene rastegnutom oprugom duljine $2r_1$. Neka je sustav pokrenut u rotaciju oko središta opruge kutnom brzinom ω_1. U tom je trenutku njegova ukupna kutna količina gibanja $L_1 = I_1\,\omega_1$, gdje je moment inercije $I_1 = 2mr_1^2$ (zanemarujemo udio žlijeba). Ako je elastična sila opruge veća od centripetalne sile potrebne za postavljeno kružno gibanje, kugle će se tijekom rotacije približavati jedna drugoj. Pretpostavimo još da postoje graničnici koji zaustavljaju kugle na razmaku $2r_2$, kako prikazuje slika 7.36b. Postavlja se pitanje kolikom će se kutnom brzinom ω_2 odvijati rotacija sustava u novoj konfiguraciji. Budući da se radi o izoliranom sustavu, njegova se ukupna količina gibanja nije promijenila

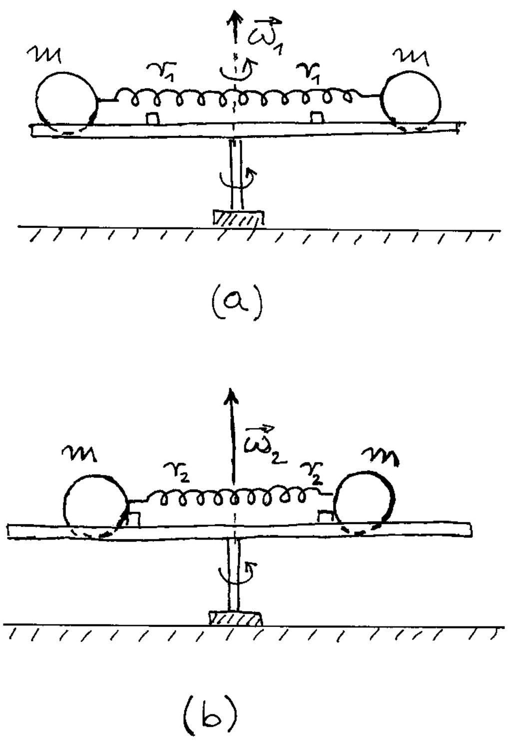
$$I_2\,\omega_2 = I_1\,\omega_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,\omega_1 \tag{7.128}$$

Približavanjem kugli došlo je do povećanja kutne brzine rotacije.

Napomena: U ovome se slučaju ne događa da jedna kugla preda drugoj dio kutne količine gibanja kako bi ukupna kutna količina gibanja sustava ostala neizmijenjena. Proces se odvija

tako da svaka kugla za sebe zadrži svoju kutnu količinu gibanja neizmijenjenom, pa je neizmijenjena i ukupna kutna količina gibanja sustava. Naime, na kuglu djeluje centripetalna sila čiji moment oko središta rotacije iščezava, pa nema ni promjene kutne količine gibanja kugle.

Može se još postaviti pitanje je li došlo do promjene kinetičke energije sustava nakon približavanja kugli. Primjenjujući rezultat iz jednadžbe (7.128), lako je izračunati omjer kinetičkih



Slika 7.36: (a) Rotirajuće tijelo sastoji se od dviju kugli postavljenih u žlijeb koji se može horizontalno okretati na svome postolju. Udaljenost svake kugle od osi rotacije je u početnom trenutku r_1, a kutna brzina rotacije je ω_1. Opruge su povezane rastegnutom oprugom tako da elastična sila nadmašuje potrebnu centripetalnu silu za tu rotaciju. (b) Sveukupno tijelo mijenja svoj oblik (dimenziju) kako se kugle približavaju osi rotacije. Na smanjenoj udaljenosti r_2 pojedine kugle od središta rotacije, cijelo tijelo ima manji moment inercije oko osi rotacije, a poveća mu se kutna brzina rotacije na iznos ω_2. Kutna količina gibanja tijela ostane pritom neizmijenjena.

energija

$$\frac{E_{K2}}{E_{K1}} = \frac{\frac{1}{2}\, I_2\, \omega_2^2}{\frac{1}{2}\, I_1\, \omega_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{7.129}$$

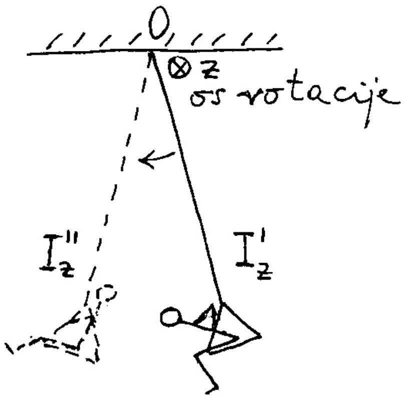
Kinetička se energija očito povećala. Zanimljivo je analizirati kako je došlo do te promjene. Dok se kugla giba po kružnici konstantnog radijusa, centripetalna sila ne obavlja rad jer je $\vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$. Međutim, kada se kugla približava središtu rotacije, rad centripetalne sile je pozitivan zbog pomaka tijela u smjeru sile, pa kinetička energija raste.

Može se postaviti i pitanje kako je opisani proces usklađen sa zakonom o očuvanju energije u izoliranom sustavu. Kinetička energija kugli se povećala, no sustav ne čine samo kugle, nego i opruga. Potencijalna elastična energija rastegnute opruge predstavlja unutarnju energiju sustava, koja se jednim dijelom pretvori u kinetičku energiju kugli.

Nakon razumijevanja procesa u gornjem modelnom tijelu koje tijekom rotacije mijenja svoj oblik, možemo opisati i neke situacije koje se susreću u životu. Poznate su piruete koje se izvode u umjetničkom klizanju na ledu. Prije odskoka, plesačica postigne neku rotaciju raširenih ruku, a nakon odskoka skupi ruke kako bi ubrzala svoju rotaciju, odnosno postigla veći broj okretaja prije nego što se spusti ponovo na led. Razumije se, prije samog dodira s ledom, plesačica umjesno raširi ruke kako bi trenutno usporila svoju rotaciju i izbjegla eventualnu nestabilnost u nastavku plesa.

Zgodan primjer nalazimo i kod samostalnog njihanja djeteta na ljuljački. Potreban je neki početni njihaj, a zatim prolazeći kroz položaj minimuma, dijete podiže težište ispravljanjem gornjeg dijela tijela i pružanjem dotad skvrčenih nogu (slika 7.37). Time se smanji moment inercije tijela kod rotacije oko objesišta ljuljačke, pa se poveća kutna brzina rotacije. Također se poveća i kinetička energija djeteta. U položaju krajnjeg otklona ljuljačke, dijete može ponovo skvrčiti noge i pognuti tijelo bez promjene kutne brzine rotacije, budući da ona u tome položaju ionako iščezava.

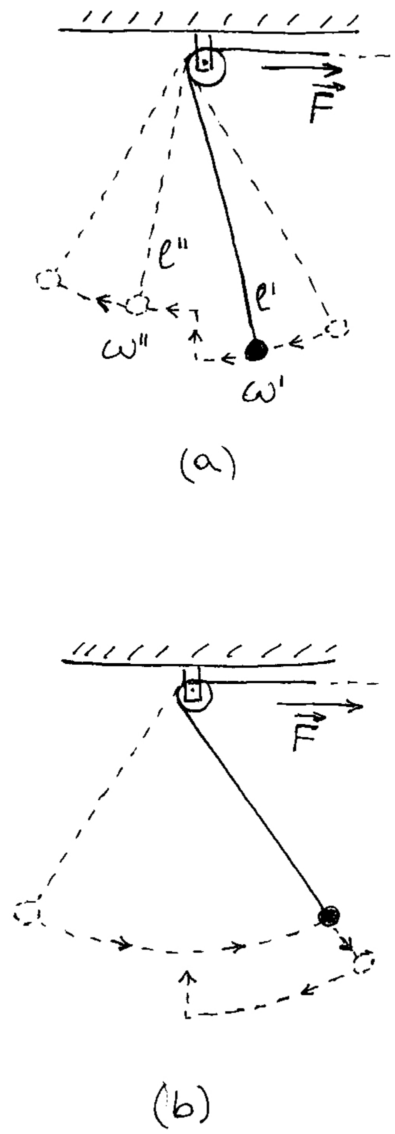
Ponavljajući opisane pokrete dijete može povećavati otklon ljuljačke i dalje održavati njihanje unatoč gubicima energije uslijed neizbježnog trenja u ležajima i otpora zraka. Nadoknada energije dolazi od rada mišića u promjenama oblika djetetova tijela, a u konačnici od energije dobivene iz tjelesnog metabolizma.



Slika 7.37: Prolazeći kroz najniži položaj ljuljačke, dijete uspravlja tijelo i podiže noge tako da malo približi svoje težište osi rotacije oko objesišta ljuljačke. Time se poveća kutna brzina rotacije, a poveća se i kinetička energija djeteta na ljuljački.

Parametrijsko njihalo. Obično njihalo ima konstantnu duljinu niti. Za povećanje amplitude njihanja potrebno je djelovanje sile koja ima moment oko objesišta tako da se poveća trenutna kutna količina gibanja, a ujedno i kinetička energija njihala. Takav se učinak može postići i djelovanjem sile koja nema momenta oko objesišta njihala, ali može mijenjati duljinu niti (parametar) njihala. Slika 7.38a prikazuje skraćivanje duljine niti od $l^{'}$ na $l^{''}$, pri čemu se smanji moment inercije za rotaciju oko objesišta, pa se poveća kutna brzina od $\omega^{'}$ na $\omega^{''}$ tako da kutna količina gibanja ostane neizmijenjena $I^{'}\omega^{'} = I^{''}\omega^{''}$. Također možemo uočiti da vanjska sila pritom izvrši pozitivan rad djelujući na putu $\Delta l = l^{'} - l^{''}$, pa se poveća kinetička energija njihala.

U krajnjem položaju njihala (7.38b) kutna brzina iščezava, pa je moguće produljiti nit njihala bez učinka na kutnu količinu gibanja koja tada također iščezava. Periodičkim mijenjanjem duljine niti osvarujemo parametrijsko njihalo kojemu se djelovanjem vanjske sile unosi energija.



Slika 7.38: (a) Povlačenjem niti može se skratiti duljina njihala u trenutku kada kuglica prolazi kroz najnižu točku. Pritom se kutna brzina rotacije oko točke na koloturi poveća, a poveća se i kinetička energija kuglice. (b) U krajnjem položaju njihala kutna brzina iščezava, pa se otpuštanjem niti samo vraća prvobitna duljina njihala, bez promjene (iščezavajuće) kutne brzine i kinetičke energije kuglice.

Poglavlje 8

HARMONIJSKI OSCILATOR

U svakodnevnom životu opažamo razna *titranja*, tj. gibanja u kojima neko tijelo periodički ponavlja istu putanju "naprijed-natrag". Takvo gibanje nastaje ako tijelo ima neki položaj ravnoteže uvjetovan vanjskim silama, ali ga nekim udarcem (ili potiskivanjem) odmaknemo iz tog položaja i zatim pustimo. Titranje obično traje neko vrijeme s time da se amplituda titranja smanjuje, što možemo shvatiti kao gubitak energije. U nekim pak primjerima imamo stalan vanjski poticaj titranja, koji dolazi npr. od rada nekog stroja, pa nastaje stacionarno titranje. U tim slučajevima možemo upoznati važan fenomen rezonancije.

Za teorijsku obradu titranja pogodno je uzeti *harmonijski oscilator* u kojemu povratna sila prema položaju ravnoteže ovisi linearno o trenutnom otklonu tijela od samog položaja ravnoteže. U ovome ćemo se poglavlju ograničiti na takav slučaj i upoznati mnoge važne osobine harmonijskog titranja, načina njegova gušenja, kao i prisilnog održavanja titranja. Rezultati analize imaju veliku praktičnu važnost jer se gotovo sva realna titranja svode na harmonijska ukoliko im je amplituda dovoljno malena. Tek za veće amplitude potrebno je razmatrati anharmonijsko titranje, koje je teorijski znatno složenije.

8.1 Slobodno titranje

Da bi se moglo ostvariti slobodno titranje nekog tijela neophodno je postojanje neke sile koja ga uvijek nastoji vratiti u položaj ravnoteže. Uz to je potrebna i inercija tijela tako da se ono nastavi gibati u istom smjeru i nakon prolaska kroz položaj ravnoteže, sve dok ga povratna sila ne zaustavi i počne opet vraćati prema položaju ravnoteže. Svojstvo inercije posjeduje svako tijelo, tako da je taj uvjet uvijek zadovoljen, a povratnu silu treba osigurati okolina.

U ovome ćemo odjeljku opisati neke jednostavne sustave u kojima može doći do titranja, te postaviti jednadžbe gibanja i naći rješenja.

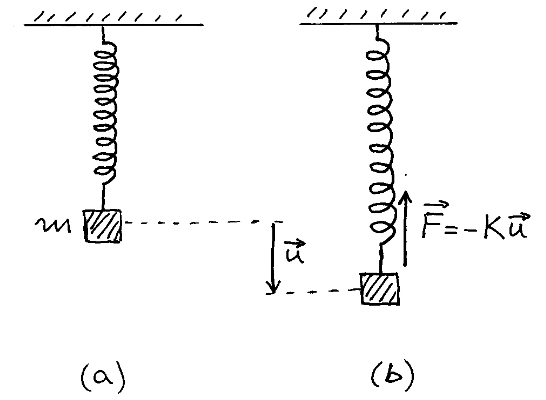
8.1.1 Opruga i masa kao harmonijski oscilator

Za uvodno razmatranje o titranju zgodno je poslužiti se jednostavnim sustavom koji se sastoji od jedne opruge i nekog tijela. Oprugu učvrstimo jednim krajem o nepomični ovjes, a na drugi kraj opruge objesimo dano tijelo, kao što prikazuje slika 8.1a. Prisjetimo se da smo o ravnotežnom stanju takva sustava već raspravljali u odjeljku 3.3, gdje je sve bilo prikazano na slici 3.16d. Ovdje želimo raspravljati samo o tome što se događa ako je tijelo pomaknuto iz položaja ravnoteže, kao što prikazuje slika 8.1b. Kod danog pomaka $\vec{u}$ javlja se povratna sila $\vec{F} = -K\,\vec{u}$. Ako je tijelo prepušteno gibanju pod utjecajem te sile, možemo napisati jednadžbu gibanja u obliku drugoga Newtonova zakona $\vec{a} = \vec{F}/m$, odnosno

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{K}{m}\,u \qquad (8.1)$$

gdje su vektorske veličine zamijenjene algebarskima tako što je os u postavljena vertikalno, a za ishodište je odabrana točka u kojoj se nalazi položaj ravnoteže obješenog tijela.

Napomena: Oblik jednadžbe gibanja (8.1) ne ovisi o izboru pozitivnog smjera osi u (prema gore, ili prema dolje). Isto vrijedi i za oblik rješenja jednadžbe gibanja. Jedino moramo pripaziti da jednom odabrani pozitivan smjer ne mijenjamo do kraja računanja, a ni kasnije u interpretaciji rezultata.



Slika 8.1: (a) Ravnotežno stanje tijela obješenog na oprugu. (b) Tijelo je otklonjeno iz položaja ravnoteže, te na njega djeluje povratna sila opruge.

Rješenje diferencijalne jednadžbe (8.1) mora biti takva funkcija $u(t)$ kojoj je druga derivacija proporcionalna samoj funkciji. To svojstvo ima sinusna funkcija, pa postavimo rješenje u općem obliku

$$u(t) = A\,\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{8.2}$$

gdje su A, ω_0 i φ tri konstante koje treba odrediti. Provjera rješenja obavlja se uvrštavanjem u samu diferencijalnu jednadžbu. U tu svrhu derivirajmo funkciju $u(t)$ dva puta uzastopce i uvrstimo rezultat u lijevu stranu jednadžbe (8.1), dok na desnoj strani uvrstimo samu funkciju $u(t)$

$$-\omega_0^2 A\,\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{K}{m}\,A\,\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{8.3}$$

Ova je jednadžba zadovoljena ukoliko je ispunjen uvjet

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{8.4}$$

Važno je uočiti da je, uz ispunjen uvjet (8.4), jednadžba (8.3) zadovoljena za svaku vrijednost varijable t, tj. u svakome trenutku. Time smo se uvjerili da pretpostavljena funkcija $u(t)$ uistinu predstavlja rješenje diferencijalne jednadžbe (8.1).

Nalaženjem uvjeta (8.4) odredili smo jednu od triju konstanti u rješenju (8.2). Konstanta ω_0 ovisi isključivo o građi sustava, tj. o konstanti opruge K i masi tijela m. Ona se naziva *kutna*, ili *kružna frekvencija*, iako se tijelo u ovome slučaju ne giba kružno, nego isključivo duž vertikalnog pravca u. Naime, sinusnu funkciju možemo matematički smatrati projekcijom rotirajućeg jediničnog vektora na neku os. Ako jedinični vektor rotira kutnom brzinom ω_0, onda njegova projekcija oscilira kružnom frekvencijom ω_0. O prikazu titranja metodom rotirajućih vektora bit će više riječi na kraju ovoga poglavlja.

Značenje konstante A u jednadžbi (8.2) možemo lako utvrditi uočavajući da vrijednost sinusne funkcije oscilira uvijek između -1 i 1. Zbog toga se trenutni otklon tijela iz položaja ravnoteže, često nazivan *elongacija* (lat. *elongatio - produljenje*), mijenja u rasponu od $-A$ do A. Konstantu A nazivamo *amplitudom* (lat. *amplitudo - veličina, velebnost*) jer ona predstavlja maksimalnu elongaciju titranja.

Preostalo nam je još objasniti značenje konstante φ u rješenju (8.2). Cjelokupni argument sinusne funkcije često se naziva vremenski ovisnom fazom

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi \tag{8.5}$$

Očito je za $t = 0$ faza sinusne funkcije

$$\Phi(0) = \varphi \tag{8.6}$$

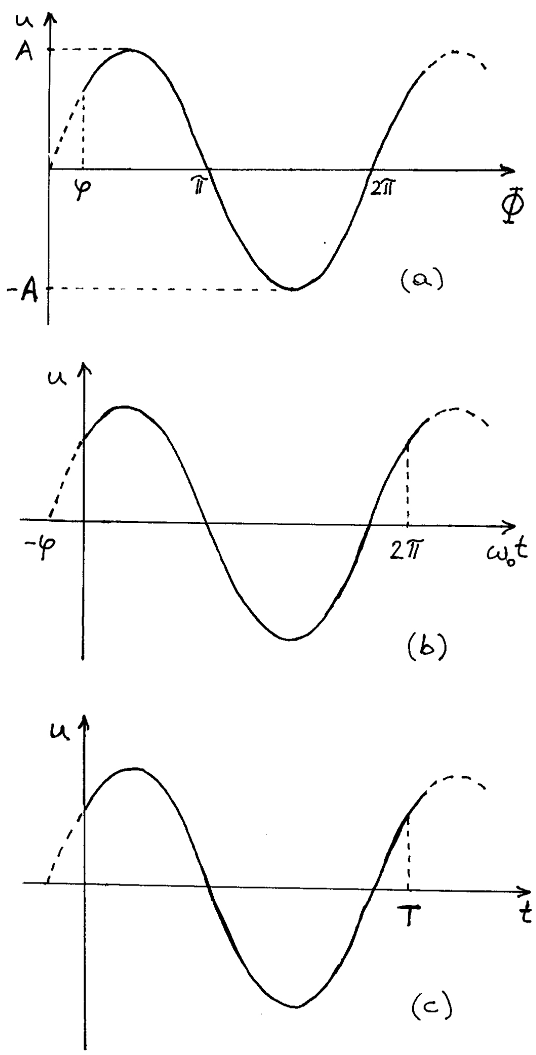
Stoga konstantu φ nazivamo *fazom u početnom trenutku*, ili pak skraćeno *početnom fazom.* U tom trenutku, otklon tijela iz položaja ravnoteže iznosi

$$u(0) = A\,\sin\varphi \tag{8.7}$$

U ovisnosti o početnoj fazi, tijelo ima neki otklon koji se razlikuje od amplitude A. Možemo reći i obrnuto, da se iz početnog otklona tijela može odrediti početna faza titranja. O tome će još biti riječi malo kasnije.

Funkciju $u(t)$ možemo grafički prikazati na različite načine u ovisnosti o odabiru neovisne varijable. Tako je na slici 8.2a odabrana ovisnost o ukupnoj fazi Φ. Ako uzmemo da je titranje počelo u $t = 0$, onda funkciju $u(\Phi)$ prikazujemo punom linijom tek od $\Phi = \varphi$, a prije toga stavljamo crtkanu liniju koja naznačuje samo matematički oblik funkcije. Varijabla Φ se izražava u radijanima, pa period funkcije $u(\Phi)$ iznosi 2π, što je jasno vidljivo na slici 8.2a.

Češće se kao neovisna varijabla uzima samo veličina $\omega_0 t$ tako da dobivamo prikaz titranja kao



Slika 8.2: (a) Ovisnost pomaka tijela o ukupnoj fazi Φ. (b) Pomak tijela u ovisnosti o $\omega_0 t$. (c) Vremenska ovisnost otklona tijela iz položaja ravnoteže.

na slici 8.2b. Funkcija $u(\omega_0 t)$ počinje punom linijom od $\omega_0 t = 0$, a prije toga je naznačena crtkanom linijom. Tu je i naznaka za očitavanje iznosa početne faze φ. Varijabla $\omega_0 t$ izražava se također u radijanima, tako da je period funkcije 2π. Moramo uočiti da kod vrijednosti varijable $\omega_0 t = 2\pi$ otklon iz položaja ravnoteže ima istu vrijednost kao i u početnome trenutku.

Ako želimo kao neovisnu varijablu uzeti vrijeme t, moramo utvrditi vremenski interval T koji odgovara periodičnosti funkcije $u(t)$. Očito mora biti

$$\omega_0 T = 2\pi \tag{8.8}$$

Vremenski interval T naziva se *period* titranja. Za vrijeme jednog perioda harmonijski oscilator obavi jedan puni titraj. To je vidljivo iz prikaza funkcije $u(t)$ na slici 8.2c.

Osim perioda titranja, koji se iskazuje u sekundama, korisno je uvesti *frekvenciju* titranja

$$\nu_0 = \frac{1}{T} \tag{8.9}$$

koja predstavlja broj titraja oscilatora u jedinici vremena. Npr. ako jedan titraj traje $T = 0,2$ s, onda se u jednoj sekundi obavi 5 titraja, pa je $\nu_0 = 5$ Hz. Jedinica za mjerenje frekvencije je 1 s^{-1}, no dan joj je poseban naziv *herc* (1 Hz) u čast njemačkog fizičara H. Hertza (19.st). Usporedbom jednadžbi (8.8) i (8.9) nalazimo odnos

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 \tag{8.10}$$

Napomena: Indeks $_0$ kod ω_0 i ν_0 nema nikakve veze s početnim trenutkom $t = 0$. Radi se naprosto o uobičajenom označavanju određene frekvencije, koja ovisi o građi samog oscilatora sukladno jednadžbi (8.4). Kasnije ćemo u ovome poglavlju upotrebljavati i oznake ω, odnosno ν kao promjenljive varijable, pa će razlog za indeksiranje ω_0 i ν_0 kao određenih veličina postati očit.

Početni uvjeti

Opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe sadrži tzv. konstante integracije, koje se mogu odrediti iz početnih uvjeta (ako se radi o vremenskoj ovisnosti), ili rubnih uvjeta (ako se radi o prostornoj ovisnosti). U slučaju diferencijalne jednadžbe (8.1) dvije konstante integracije su A i φ, dok je ω_0 određena uvjetom (8.4). Pokažimo kako su konstante A i φ povezane s početnim uvjetima. Uzmimo da nam je u $t = 0$ poznat otklon tijela od ravnotežnog položaja $u(0)$ i brzina tijela $v(0)$. Iz općeg rješenja (8.2) možemo dobiti

$$u(0) = A\sin\varphi \tag{8.11}$$

Deriviramo li opće rješenje, dobivamo izraz za brzinu, koji u $t = 0$ daje

$$v(0) = \omega_0 A\cos\varphi \tag{8.12}$$

Iz ovih dviju jednadžbi lako je dobiti rješenje za amplitudu i početnu fazu

$$A = \sqrt{u^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}} \tag{8.13}$$

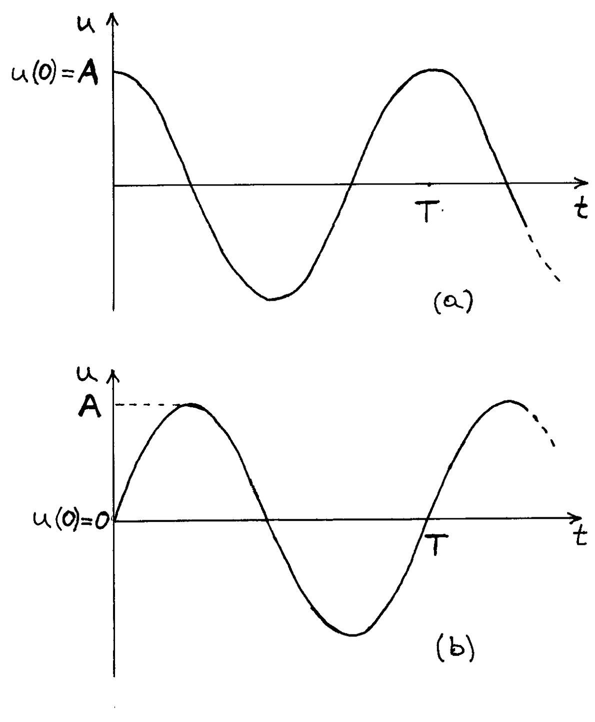
$$tg\,\varphi = \frac{u(0)\,\omega_0}{v(0)} \tag{8.14}$$

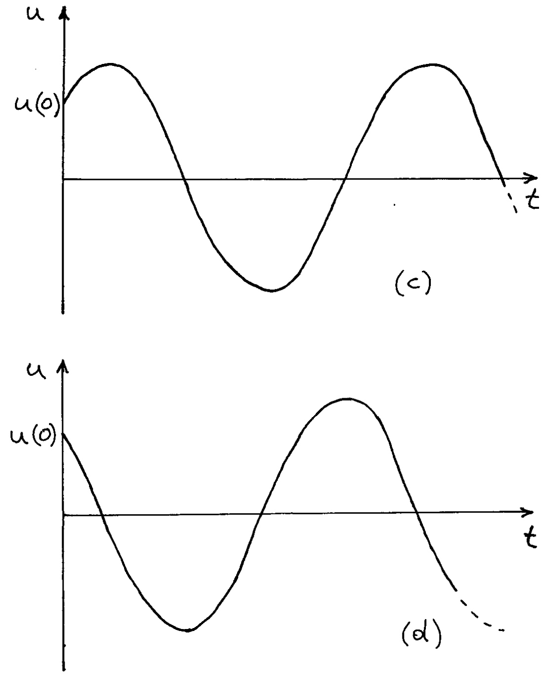
Uistinu, ako su nam poznati početni uvjeti, možemo jednoznačno odrediti konstante A i φ u općem rješenju diferencijalne jednadžbe za harmonijski oscilator.

Eksperimentalno postavljanje početnih uvjeta

Do sada smo zamišljali da su početni uvjeti $u(0)$ i $v(0)$ nekako zadani, te smo analizirali titranje koje zatim nastaje. Zapitajmo se sada što bismo morali u realnosti učiniti na nekom harmonijskom oscilatoru da bi se ostvarili neki željeni početni uvjeti.

Povucimo tijelo tako da ga otklonimo iz položaja ravnoteže i zadržimo ga na tome mjestu, a zatim ga u nekom trenutku jednostavno pustimo. Proglasimo taj trenutak početnim ($t = 0$), te pratimo nastalo titranje. U početnom smo trenutku imali otklon $u(0)$ zadan rukom (smatrajmo da je taj smjer pozitivan, tj. $u(0) > 0$), a početna brzina je iščezavala $v(0) = 0$ jer smo tijelo samo otpustili,





Slika 8.3: (a) Titranje nakon otpuštanja tijela iz zadanog otklona. (b) Tijelo dobiva početnu brzinu dok je u položaju ravnoteže i zatim nastavlja titrati. (c) U početnom otklonu tijelo dobiva brzinu uslijed koje se pokrene dalje od položaja ravnoteže. (d) Tijelo dobije početnu brzinu u smjeru prema položaju ravnoteže.

a nismo ga gurnuli u neku stranu. Iz jednadžbe (8.13) dobivamo $A = u(0)$, tj. početni otklon iz položaja ravnoteže ujedno predstavlja i maksimalan otklon, tj. amplitudu titranja. Početna faza prema jednadžbi (8.14) iznosi $\varphi = \pi/2$, pa se titranje odvija prema funkciji

$$u(t) = A\,\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = A\,\cos\omega_0 t \tag{8.15}$$

Ova funkcija titranja prikazana je na slici 8.3a.

Razmotrimo sada slučaj u kojemu tijelo miruje u položaju ravnoteže, a u trenutku $t = 0$ jednim udarcem damo tijelu početnu brzinu $v(0)$ u smjeru pozitivne osi ($v(0) > 0$). Iz jednadžbe (8.14) dobivamo početnu fazu $\varphi = 0$, pa je titranje dano funkcijom

$$u(t) = A\,\sin\omega_0 t \tag{8.16}$$

gdje je $A = v(0)/\omega_0$ sukladno jednadžbi (8.13). Amplituda titranja ovisi o početnoj brzini koju smo

dali tijelu. Titranje koje nastaje od ovih početnih uvjeta prikazano je na slici 8.3b.

Možemo još razmotriti slučajeve u kojima otklonimo tijelo iz položaja ravnoteže, te ih u trenutku $t = 0$ još gurnemo bilo u smjeru prema položaju ravnoteže, ili dalje od njega. Rezultirajuće titranje je prikazano na slikama 8.3c i d. Amplituda je u svakom slučaju veća od početnog otklona $u(0)$, te ovisi o početnoj brzini $v(0)$ koju smo dali tijelu.

Sloboda izbora početnog trenutka

Uvidom u razne slučajeve na slikama 8.3a-d, možemo uočiti da odabirom različitih početnih uvjeta dobivamo različite početne faze. No, isto tako možemo uočiti da se različite početne faze mogu ostvariti promjenom trenutka za koji smatramo da predstavlja $t = 0$ u titranju, koje je počelo nekad ranije s uvjetima koji nam više nisu ni važni.

Matematički možemo napisati

$$u(t) = A \sin \omega_0 (t + t_0) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.17)$$

gdje smo zapravo počeli računati vrijeme od t_0 na dalje. U tom slučaju početna faza postaje

$$\varphi = \omega_0 t_0 \quad (8.18)$$

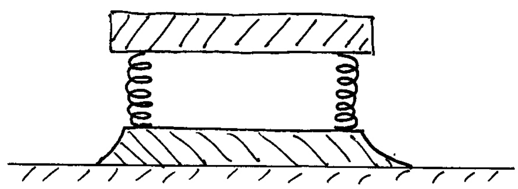
Vremenski pomak i početna faza su uzajamno vezani. Odabir druge početne faze ekvivalentan je odabiru drugog trenutka od kojega se počinje računati vrijeme.

Tijelo na elastičnoj podlozi

U praksi često susrećemo situacije u kojima je neko tijelo položeno na elastičnu podlogu tako da može doći do harmonijskog titranja. Slika 8.4 prikazuje jednostavno postolje s oprugama na krajevima i tijelom položenim na opruge. U ovakvom slučaju moramo upotrijebiti tlačne opruge koje su u procesu kaljenja uobličene tako da im se susjedni navoji ne dodiruju. Postavljanjem tijela na postolje, opruge se malo stisnu, ali ne toliko da bi se susjedni navoji dodirivali. Time je uspostavljeno novo stanje ravnoteže. Kod otklona iz takvog položaja ravnoteže, javlja se povratna sila koja može biti harmonična (linearna s otklonom), tako da nastane titranje koje možemo opisati potpuno istim jednadžbama kao što su one koje smo izveli za tijelo obješeno na oprugu.

U ovu kategoriju slučajeva spadaju mnogi radni strojevi koji se postavljaju na elastična postolja da bi se izbjeglo prenošenje većih vibracija na okolinu. Tu se primjenjuju još i mehanizmi za gušenje vibracija o kojima ćemo govoriti nešto kasnije.

Karoserija svakog automobila položena je na četiri debele opruge, a one su pak donjim krajem uprte u zglobove koji drže kotače automobila. Na taj se način prelazak kotača preko nekog udubljenja (ili izbočine) na cesti prenosi tek u manjoj mjeri na putnike u automobilu.



Slika 8.4: Tijelo položeno na opruge koje su donjim krajevima uprte o postolje.

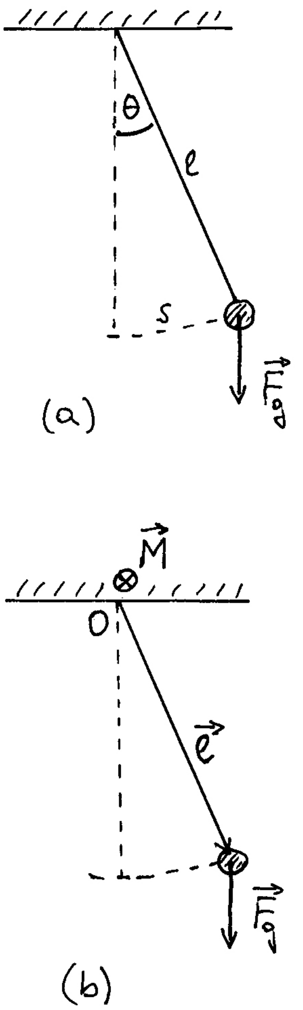
U građevinskim konstrukcijama, te u raznim drugim tehničkim konstrukcijama, važno je poznavati ponašanje koje nastaje kod opterećenja nosivih greda, ili nekih ploča. Ako se na nju naglo postavi neki veći teret, nastat će vibracije baš kao i kod harmonijskog oscilatora s oprugom.

8.1.2 Njihalo kao harmonijski oscilator

Jednadžbu gibanja za njihalo možemo izvesti na nekoliko načina. Na slici 8.5a prikazano je tijelo mase m obješeno o nit duljine l, koja je u nekom trenutku otklonjena za kut θ od vertikale. Na gibanje tijela utječe tangencijalna komponenta gravitacijske sile prema drugome Newtonovu zakonu

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -F_g \sin\theta \quad (8.19)$$

gdje je s put po kojemu se giba tijelo, dakle luk kružnice prikazan na slici 8.5a. Jednadžba (8.19) sadrži dvije varijable s i θ, pa u takvoj formi ne možemo naći rješenje. Međutim, između luka kružnice i vršnog kuta postoji geometrijska ovis-



Slika 8.5: (a) Kuglica mase m obješena o nit duljine l služi kao njihalo. Povratnu silu čini komponenta gravitacijske sile $\vec{F}_g$ u smjeru tangente na putanju kuglice. (b) Gibanje kuglice se može interpretirati kao trenutna rotacija oko objesišta O uz moment sile $\vec{M}$.

nost $s = l\,\theta$, tako da dobivamo jednadžbu gibanja izraženu putem samo jedne varijable

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{8.20}$$

gdje smo ujedno uvažili odnos $F_g = m\,g$. Ova diferencijalna jednadžba je nelinearna jer se u drugome članu ne nalazi naprosto varijabla θ, nego sinusna funkcija te varijable. Stoga se ne radi o jednadžbi kakvu smo imali za harmonijski oscilator i ne vrijede odgovarajuća rješenja. To nije iznenađujuće jer povratna sila u jednadžbi (8.19) ne ovisi linearno o otklonu iz položaja ravnoteže, pa njihalo ne zadovoljava uvjet koji mora imati harmonijski oscilator.

Ipak, ako njihalo postiže samo malene otklone iz položaja ravnoteže, može se primijeniti aproksimacija $\sin\theta \approx \theta$ za malene kutove, te dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \tag{8.21}$$

Njena je forma identična onoj koju smo imali kod titranja tijela obješenog na oprugu, pa rješenje možemo odmah napisati u obliku

$$\theta(t) = \Theta\,\sin(\omega_0 t + \theta_0) \tag{8.22}$$

gdje je Θ maksimalni kut otklona (amplituda), a kružna frekvencija je dana izrazom

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{8.23}$$

Konstanta θ_0 predstavlja početnu fazu njihanja, koja ovisi o početnim uvjetima na isti način kao što smo to vidjeli kod titranja tijela obješenog na oprugu.

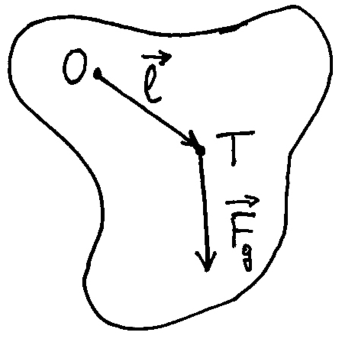
Jednakovrijedan izvod jednadžbe gibanja njihala možemo načiniti ako krenemo od kutnih kinematičkih i dinamičkih veličina. Slika 8.5b prikazuje njihalo koje izvodi periodičko kružno gibanje. Za ishodište O odabiremo objesište niti, te pišemo jednadžbu gibanja

$$I\,\vec{\alpha} = \vec{M} \tag{8.24}$$

gdje je $I = m\,l^2$ moment inercije tijela oko osi kroz ishodište. Moment sile je $\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}_g$, a budući da je kut između vektora $\vec{l}$ i $\vec{F}_g$ jednak θ, jednadžba (8.24) se može svesti na oblik identičan onome iz (8.20).

Njihanje prostranog tijela

Kada je u pitanju prostrano tijelo koje je obješeno kao npr. na slici 8.6, nije moguće primijeniti razmatranje kao u jednadžbi (8.19) jer se njihanje tijela ne može svesti samo na kružno gibanje njegova težišta. Primjerena je jednadžba (8.24) u kojoj moment inercije I valja uzeti oko osi kroz objesište tijela. Ako s $\vec{l}$ označimo vektor koji ide od objesišta do težišta tijela, možemo lako izvesti jednadžbu



Slika 8.6: Njihanje prostranog tijela kao trenutna rotacija oko objesišta O. Gravitacijska sila ima hvatište u težištu T.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m\,g\,l}{I_T + m\,l^2}\,\theta = 0 \tag{8.25}$$

gdje je primijenjen Steinerov poučak (odjeljak 7.2). I_T je moment inercije oko osi kroz težište. Također je upotrijebljena aproksimacija malog kuta otklona. Njihanje tijela se tada svodi na titranje s kutnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{m\,g\,l}{I_T + m\,l^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,l}{I_T + m\,l^2}} \tag{8.26}$$

U slučaju tijela kojemu su dimenzije mnogo manje nego što je udaljenost od objesišta do težišta, možemo zanemariti I_T prema $m\,l^2$, pa se izraz (8.26) svodi jednostavno na (8.23). Nasuprot tome, kada je objesište blizu težišta, zanemarimo $m\,l^2$ prema I_T u gornjem izrazu. Tada uočavamo da se tijelo njiše to sporije (manja kutna frekvencija) što je objesište postavljeno bliže težištu (manji l). To je ponašanje potpuno suprotno od jednostavnog njihala u kojemu jednadžba (8.23) predviđa brže njihanje kada je duljina l kraća.

8.1.3 Energija u titranju

Titranje harmonijskog oscijatora je zgodan primjer za očuvanje mehaničke energije u zatvorenom sustavu. Ako razmatramo titranje koje izvodi tijelo obješeno na oprugu (slika 8.1), možemo reći da je ukupna energija u sustavu oscilatora

$$E = \frac{1}{2}\,K\,A^2 \tag{8.27}$$

Naime, kada tijelo dosegne maksimalan otklon A od položaja ravnoteže, njegova trenutna brzina iščezava, pa iščezava i trenutna kinetička energija tijela. Jedina energija u sustavu je potencijalna elastična energija opruge, koja je dana izrazom u jednadžbi (8.27).

Kada tijelo krene prema položaju ravnoteže, ono stekne neku trenutnu brzinu v, a deformacija opruge se smanji. U proizvoljnom trenutku mora biti

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,K\,u^2 = \frac{1}{2}\,K\,A^2 = konst. \tag{8.28}$$

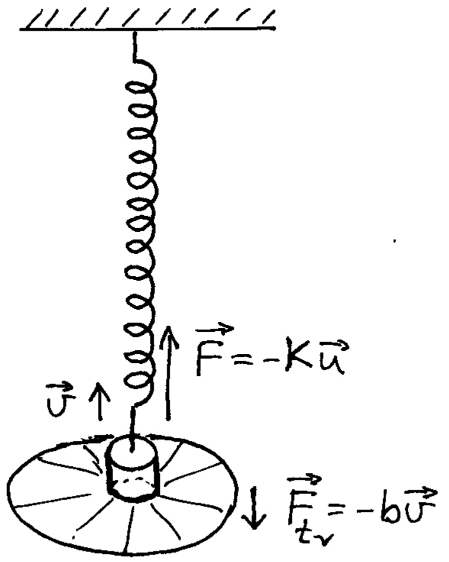
U trenutku prolaza kroz položaj ravnoteže ($u = 0$), brzina tijela je maksimalna v_{max}. Potencijalna elastična energija opruge tada iščezava, pa je kinetička energija tijela jedina energija u sustavu oscilatora

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{max}^2 = \frac{1}{2}\,K\,A^2 \tag{8.29}$$

Tijelo se nastavi gibati i udaljavajući se od položaja ravnoteže gubi svoju kinetičku energiju, ali se opruga deformira i stječe potencijalnu energiju prema jednadžbi (8.29). Kada tijelo dosegne maksimalan otklon, odnosno opruga maksimalnu deformaciju, imamo stanje dano jednadžom (8.27), a zatim se sve ponavlja. Stoga na titranje harmonijskog oscilatora možemo gledati kao na proces izmjene kinetičke energije tijela i potencijalne energije opruge s time da ukupna energija ostaje konstantna.

8.2 Titranje s gušenjem

U prethodnom smo odjeljku razmatrali titranje harmonijskog oscilatora koje nastaje nakon neke početne pobude, tj. unošenja energije u sustav oscilatora, te zatim prepuštanje oscilatora samome sebi. Oscilator se tada ponaša kao izoliran sustav u kojemu energija biva očuvana. Stoga njegovo titranje traje u nedogled. O tome svjedoči i matematičko rješenje diferencijalne jednadžbe predstavljeno sinusnom funkcijom koja nikada ne trne.



Slika 8.7: Kartonski štit pričvršćen uz tijelo na opruzi uzrokuje otpor kod gibanja u zraku. Sila trenja $\vec{F}_{tr}$ ima uvijek smjer suprotan trenutnoj brzini tijela.

U realnosti nema potpuno izoliranog sustava. Kod gibanja tijela u oscilatoru javlja se uvijek neko trenje prema okolini tako da oscilator gubi energiju i amplituda titranja se s vremenom smanjuje, te se u konačnosti titranje zaustavi. Sasvim maleno, ali ipak primjetno, gušenje titranja ostvaruje se već gibanjem tijela u zraku. Pojačano gušenje može se ostvariti pričvršćivanjem laganog okruglog štita na tijelo, kao što prikazuje slika 8.7. Odabirom štitova različitih radijusa mogu se ostvariti jača ili slabija gušenja te tako proučavati fenomen.

Kod manjih brzina u gibanju tijela kroz zrak, sila trenja je proporcionalna brzini. Neka simbol b predstavlja faktor proporcionalnosti, pa jednadžbu gibanja možemo pisati u obliku koji dopunjuje jednadžbu (8.1)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{K}{m}\,u - \frac{b}{m}\,v \qquad (8.30)$$

S lijeve strane ove jednadžbe nalazimo akceleraciju koja se mjeri u ms^{-2}, pa je očito da se veličina b/m s desne strane jednadžbe mjeri u s^{-1}, tj. ima dimenziju inverznog vremena. Stoga jednadžbu gibanja gušenog harmonijskog oscilatora možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\,\frac{du}{dt} + \omega_0^2\,u = 0 \qquad (8.31)$$

gdje je τ tzv. *relaksacijsko vrijeme.* Njegovo ćemo fizikalno značenje upoznati kasnije, a za sada možemo samo istaknuti da je τ duže što je gušenje slabije, a skraćuje se kod jačeg gušenja ($\tau = m/b$). Konstanta ω_0 ima isto značenje kao i kod slobodnog titranja (jednadžba (8.4)).

Gornja diferencijalna jednadžba sadrži u pojedinim svojim članovima funkciju $u(t)$, te njenu prvu i drugu derivaciju. Prema tome, rješenje ove diferencijalne jednadžbe mora biti takva funkcija koja uzastopnim derivacijama reproducira samu sebe, množena nekom konstantom. Poznato nam je da jedino eksponencijalna funkcija zadovoljava ovakav uvjet, pa postavimo rješenje u obliku

$$u(t) = C\,e^{wt} \qquad (8.32)$$

gdje su C i w konstante koje tek valja odrediti. Uvrstimo li pretpostavljeno rješenje u diferencijalnu jednadžbu, dobivamo

$$w^2\,C\,e^{wt} + \frac{w}{\tau}\,C\,e^{wt} + \omega_0^2\,C\,e^{wt} = 0 \qquad (8.33)$$

Ova je jednadžba zadovoljena u svakom trenutku t ako vrijedi uvjet

$$w^2 + \frac{w}{\tau} + \omega_0^2 = 0 \qquad (8.34)$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe glasi

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \qquad (8.35)$$

Dobili smo dva rješenja za w, pa moramo općenito predvidjeti i dvije različite konstante za C. Stoga napišimo općenito rješenje u obliku

$$u(t) = C_1\,e^{w_1 t} + C_2\,e^{w_2 t} \qquad (8.36)$$

Sada je potrebno razmotriti redom slučajeve od veoma slabog do izrazito jakog gušenja.

8.2.1 Slabo gušenje

Što je gušenje slabije, to je relaksacijsko vrijeme duže. Kao kriterij za slabo gušenje uzimamo ispunjenost uvjeta

$$\frac{1}{2\tau} < \omega_0 \tag{8.37}$$

Tada možemo pisati

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\,\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} = i\,\omega_g \tag{8.38}$$

gdje je simbolom ω_g označena kutna frekvencija gušenog titranja. Očito je ona uvijek manja od kutne frekvencije slobodnog titranja ($\omega_g < \omega_0$). Opće rješenje za slabo gušeni harmonijski oscilator postaje

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1\,e^{-t/2\tau + i\,\omega_g\,t} + C_2\,e^{-t/2\tau - i\,\omega_g\,t} \\ &= (C_1 + C_2)\,e^{-t/2\tau}\,\cos\omega_g\,t \\ &\quad + i\,(C_1 - C_2)\,e^{-t/2\tau}\,\sin\omega_g\,t \end{aligned} \tag{8.39}$$

Uvažimo sada fizikalni zahtjev da $u(t)$ mora biti realna veličina (otklon iz položaja ravnoteže). Dakle, imaginarni dio u izrazu (8.39) mora iščezavati, što znači da mora biti $C_1 = C_2$. Dobili smo rješenje za slabo gušeno titranje

$$u(t) = A\,e^{-t/2\tau}\,\cos\omega_g\,t \tag{8.40}$$

Konstanta A predstavlja početni otklon iz položaja ravnoteže jer za $t = 0$ nalazimo $u(0) = A$. Na prvi pogled, rekli bismo da titranje dano izrazom (8.40) nastaje jednostavnim otpuštanjem tijela iz početnog otklona. No, provjerimo ovu pretpostavku tako da deriviranjem nađemo izraz za brzinu tijela i zatim uvrstimo $t = 0$. Dobivamo da početna brzina u ovom slučaju ne iščezava ($v(0) = -A/(2\tau)$). To znači da titranje prema izrazu (8.40) podrazumijeva kako je tijelo lagano gurnuto prema položaju ravnoteže.

Općenitije rješenje za prigušeno titranje možemo napisati tako da dodamo neku početnu fazu φ u argumentu funkcije kosinus u jednadžbi (8.40). Tada u rješenju imamo dvije konstante A i φ koje su potrebne da bi se mogla zadovoljiti dva početna uvjeta.

U slučaju veoma malenog gušenja (jako velik τ) može se reći da izraz (8.40) približno predstavlja titranje nastalo otpuštanjem tijela iz početnog otklona. Stoga ćemo taj izraz upotrebljavati u daljnjem računanju.

Gubitak energije. Zbog trenja tijekom titranja prenosi se energija oscilatora u okolinu. Zanimljivo je kvantitativno pratiti energiju oscilatora tijekom vremena. U tu svrhu odredimo kinetičku energiju u nekom vremenskom trenutku

$$E_K = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \tag{8.41}$$

gdje za trenutnu brzinu uvrstimo izraz

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{2\tau}\,A\,e^{-t/2\tau}\,\cos\omega_g t \\ &-\omega_g\,A\,e^{-t/2\tau}\,\sin\omega_g t \end{aligned} \tag{8.42}$$

Potražimo srednju vrijednost kinetičke energije u jednom periodu titranja od t do $t + T$

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_K(t')\,dt' \tag{8.43}$$

Naša je početna pretpostavka da je gušenje veoma maleno, tako da možemo smatrati da je $e^{-t/\tau}$ konstantno za vrijeme jednog titraja. Preostaje nam usrednjavati izraze

$$\left\langle \sin^2\omega_g t \right\rangle = \left\langle \cos^2\omega_g t \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{8.44}$$

$$\langle \sin\omega_g t\,\cos\omega_g t \rangle = 0 \tag{8.45}$$

Tako dobivamo rezultat

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{4}\,m\left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_g^2\right]A^2\,e^{-t/\tau} \tag{8.46}$$

Izraz u uglatim zagradama predstavlja ω_0^2 sukladno jednadžbi (8.38). Uvažimo li još činjenicu da se u titranju ravnopravno izmjenjuju potencijalna i kinetička energija, tako da su im srednje vrijednosti izjednačene, dobivamo za srednju vrijednost ukupne energije

$$\langle E \rangle = \langle E_P \rangle + \langle E_K \rangle = \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,A^2\,e^{-t/\tau} \tag{8.47}$$

Energija gušenog harmonijskog oscilatora gubi se po eksponencijalnom zakonu. U eksponentu nalazimo relaksacijsko vrijeme τ. Dulje relaksacijsko

vrijeme znači da se energija oscilatora sporije gubi. Ili obrnuto, brz gubitak energije znači da je relaksacijsko vrijeme kratko. Možemo također reći da je τ vrijeme u kojemu energija oscilatora padne na vrijednost $1/e$ od prvobitne.

Snagu oscilatora predstavlja rad koji oscilator izvrši prema okolini u jedinici vremena. No, rad oscilatora se obavlja na račun trošenja njegove energije, pa možemo izračunati trenutnu snagu

$$P = \frac{d}{dt}\,\langle E\rangle = -\frac{1}{\tau}\,\left(\frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,A^2\,e^{-t/\tau}\right) = -\frac{\langle E\rangle}{\tau} \tag{8.48}$$

Predznak minus znači da je trenutna snaga negativna veličina, što pak znači da se energija oscilatora gubi. U svakom trenutku, apsolutna vrijednost snage jednaka je omjeru trenutne srednje energije $\langle E\rangle$ i relaksacijskog vremena τ. Kako se tijekom vremena srednja energija smanjuje, tako se smanjuje i apsolutna vrijednost snage.

Faktor dobrote oscilatora. Uobičajeno je definirati *faktor dobrote* Q gušenog oscilatora

$$Q = 2\,\pi\,\frac{\text{trenutno pohranjena energija}}{\text{gubitak energije u jednom periodu}} \tag{8.49}$$

Gubitak energije u jednom periodu T iznosi $|P|\;T$, pa faktor dobrote možemo izraziti

$$Q = 2\,\pi\,\frac{\langle E\rangle}{|P|\;T} = \omega_g\,\tau \tag{8.50}$$

gdje smo primijenili rezultat (8.48) i odnos $\omega_g = 2\,\pi/T$. Q-faktor je očito konstanta koja ovisi o građi oscilatora i gušenju, te se ne mijenja tijekom gubljenja energije. Ovaj nas rezultat ne iznenađuje jer slijedi iz činjenice da je trenutna snaga uvijek proporcionalna trenutnoj energiji, kako to pokazuje jednadžba (8.48). Obje se veličine tijekom vremena smanjuju, ali njihov omjer ostaje konstantan.

Za veoma slabo gušenje ($\tau \gg T$) vrijedi aproksimacija $\omega_g \approx \omega_0$ pa pišemo

$$Q \approx \omega_0\,\tau = \frac{2\,\pi}{T}\,\tau \gg 1 \tag{8.51}$$

Slabo gušen oscilator ima velik faktor dobrote Q. U tom slučaju oscilator izvrši mnogo titraja unutar relaksacijskog vremena τ.

Nasuprot tome, kod oscilatora sa značajnim gušenjem imamo $\omega_g \ll \omega_0$ i k tome je relaksacijsko vrijeme τ kratko, pa je faktor dobrote malen. Kod izrazito jako gušenog oscilatora imamo $Q \to 1$.

8.2.2 Kritično gušenje

Kada se gušenje povećava (smanjuje se τ) toliko da težimo prema uvjetu

$$\frac{1}{2\tau} \to \omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_g \to 0 \tag{8.52}$$

period oscilacija postaje beskonačan, tj. oscilacije iščezavaju. To je uvjet za tzv. *kritično gušenje*. Da bismo našli općenito rješenje za ovaj slučaj, potrebno je uključiti neki fazni pomak u jednadžbi (8.40), ili napisati ekvivalentno

$$u(t) = e^{-t/2\tau}\,(A_1\cos\omega_g\,t + A_2\sin\omega_g\,t) \tag{8.53}$$

Dvije konstante A_1 i A_2 potrebne su radi utvrđivanja početnih uvjeta. Lako nalazimo

$$A_1 = u(0) \tag{8.54}$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega_g}\left[v(0) + \frac{1}{2\tau}u(0)\right] \tag{8.55}$$

Sada možemo razmotriti što se događa u graničnom slučaju kada $\omega_g \to 0$. Tada $\cos\omega_g\,t$ u prvome članu postaje jednak jedinici za sva vremena, a u drugome članu nalazimo

$$\lim_{\omega_g\to 0}\frac{\sin\omega_g\,t}{\omega_g} = t \tag{8.56}$$

Rješenje poprima oblik

$$u(t) = (A_1 + D\,t)\;e^{-t/2\tau} \tag{8.57}$$

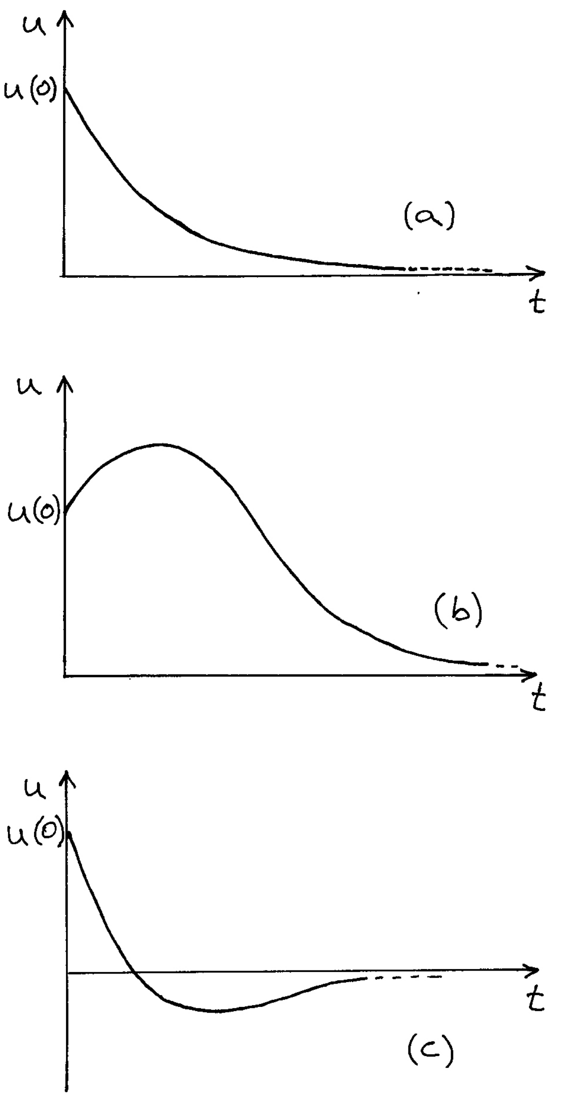
gdje je upisana konstanta

$$D = v(0) + \frac{1}{2\tau}\,u(0) \tag{8.58}$$

Zgodno je razmotriti neke posebne slučajeve. Kao prvi slučaj uzmimo da je tijelo u početku otklonjeno iz položaja ravnoteže za $u(0)$, te je zatim jednostavno pušteno, tj. imamo uvjet $v(0) = 0$. Gibanje tijela je u tom slučaju dano izrazom

$$u(t) = u(0)\;(1 + \frac{t}{2\tau})\;e^{-t/2\tau} \tag{8.59}$$

Grafički prikaz ovog gibanja dan je na slici 8.8a. Tijelo se približava prema položaju ravnoteže, ali nikada ne prelazi na drugu stranu, tj. $u(t)$ nikada ne mijenja predznak.



Slika 8.8: (a) Tijelo je ispušteno iz početnog otklona. Uslijed kritičnog gušenja, tijelo nikada ne prelazi na drugu stranu od položaja ravnoteže. (b) Tijelo je iz početnog otklona gurnuto dalje od položaja ravnoteže. Nakon postizanja maksimalnog otklona, tijelo se u krutičnom gušenju približava ravnotežnom položaju. (c) Tijelo je iz početnog otklona gurnuto prema položaju ravnoteže. Nakon prelaska na suprotnu stranu i dosezanja nekog manjeg otklona, tijelo se približava ravnotežnom položaju.

Kao drugi slučaj uzmimo da je tijelo početno otklonjeno za $u(0) > 0$, te mu je također dana početna brzina $v(0) > 0$, tj. gurnuto je dalje od položaja ravnoteže. Prema jednadžbi (8.58) je tada $D > 0$, pa je i $(A_1 + D\,t) > 0$ za svaki t. Dakle, ni u tom slučaju $u(t)$ nikada ne mijenja predznak. Grafički prikaz je dan na slici 8.8b.

Kao treći slučaj, uzmimo da je tijelo iz početnog otklona $u(0)$ gurnuto prema položaju ravnoteže ($v(0) < 0$) dovoljno snažno da je ispunjen uvjet

$$v(0) < -\frac{1}{2\tau}\,u(0) \qquad \Longrightarrow \qquad D < 0 \tag{8.60}$$

To znači da će za $t > A_1/|D|$ izraz u zagradi $(A_1 + D\,t)$ postati negativan, pa $u(t)$ mijenja predznak. Nakon što tijelo postigne neki otklon na suprotnu stranu od početnog, vraća se prema položaju ravnoteže, ali više ga ne prelazi, tj. nema oscilacija. To je bitno obilježje kritičnog gušenja. Graf je prikazan na slici 8.8c.

8.2.3 Nadkritično gušenje

Ako se gušenje poveća iznad kritičnog, tako da bude

$$\frac{1}{2\tau} > \omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\,\omega_0\,\tau < 1 \tag{8.61}$$

dobivamo iz jednadžbe (8.35) dva realna rješenja za eksponente

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2\tau}\left[1 \mp \sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}\right] \tag{8.62}$$

Rješenje za gibanje tijela zapisujemo u obliku jednadžbe (8.36)

$$u(t) = G_1\,e^{w_1 t} + G_2\,e^{w_2 t} \tag{8.63}$$

Ako su nam zadani početnu uvjeti $u(0)$ i $v(0)$, možemo iz gornjeg rješenja izračunati

$$u(0) = G_1 + G_2 \tag{8.64}$$

$$v(0) = \left[\frac{du}{dt}\right]_{t=0} = w_1\,G_1 + w_2\,G_2 \tag{8.65}$$

Konstante G_1 i G_2 su time određene

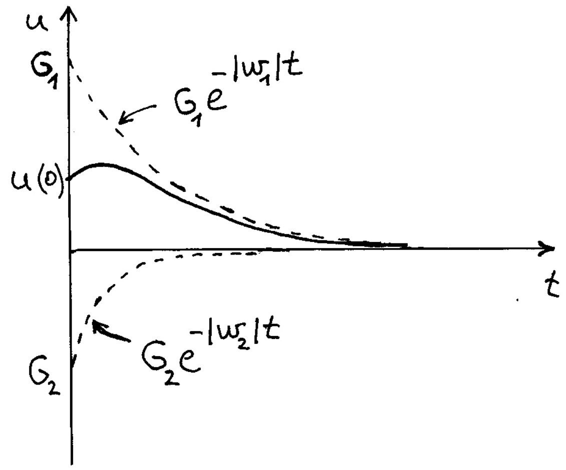
$$G_1 = \frac{v(0) + \frac{1}{2\tau}\left[1 + \sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}\right]u(0)}{\frac{1}{\tau}\sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}} \tag{8.66}$$

$$G_2 = -\frac{v(0) + \frac{1}{2\tau}\left[1 + \sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}\right]u(0)}{\frac{1}{\tau}\sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}} \tag{8.67}$$

Iz jednadžbe (8.62) nalazimo da su oba eksponenta negativne veličine, tako da je za analizu gibanja tijela zgodnije napisati rješenje u obliku

$$u(t) = G_1\, e^{-|w_1|t} + G_2\, e^{-|w_2|t} \tag{8.68}$$

Također iz jednadžbe (8.62) nalazimo da je $|w_1| < |w_2|$, što znači da prvi član u gornjem izrazu (8.68) trne sporije, a drugi brže. Ponašanje pojedinih članova i njihova zbroja prikazano je na slici 8.9 za slučaj kada postavimo neki početni otklon $u(0) > 0$ i gurnemo tijelo dalje od položaja ravnoteže brzinom $v(0) > 0$.



Slika 8.9: Primjer doprinosa pojedinih članova iz jednadžbe (8.68) u slučaju kada iz početnog otklona tijelo biva gurnuto dalje od položaja ravnoteže.

U slučaju kada tijelo naprosto otpustimo ($v(0) = 0$) iz početnog otklona, gibanje tijela je slično onome kod kritičnog gušenja, ali sa sporijim približavanjem ravnotežnom stanju. Ako pak tijelo gurnemo prema položaju ravnoteže ($v(0) < 0$) dovoljno snažno tako da se ispuni uvjet

$$|v(0)| > \frac{1}{2\tau}\left[1 + \sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}\right]u(0) \tag{8.69}$$

dobivamo iz jednadžbe (8.66) da je $G_1 < 0$, dok je $G_2 > 0$ prema jednadžbi (8.67). Budući da član s G_2 trne brže, prevlada nakon nekog vremena negativan član s G_1, tj. tijelo prijeđe na drugu stranu položaja ravnoteže ($u(t)$ promijeni predznak). Nakon dosezanja nekog maksimalnog otklona, tijelo se vraća prema položaju ravnoteže, ali više nikada ne prelazi na drugu stranu. Ovo je ponašanje slično onome koje smo upoznali kod kritičnog gušenja.

8.2.4 Postizanje energijskog minimuma

Osvrnimo se na gušeni harmonijski oscilator postavljajući iznova pitanje energije.

Vidjeli smo da početni uvjeti sadržavaju bilo $u(0) \neq 0$, ili $v(0) \neq 0$, ili oboje. To znači da u početnom trenutku postoji bilo potencijalna energija opruge, ili kinetička energija tijela, ili oboje. U prigušenom titranju izmjenjuju se potencijalna i kinetička energija s time da se ukupna energija oscilatora smanjuje jer se prenosi u okolinu.

Ako se usredotočimo na konačno stanje, možemo reći da se radi o mirovanju u stanju u kojem je potencijalna energija minimalna. To je opće pravilo. Ako sustav može izmjenjivati energiju s okolinom, on će spontano težiti u stanje minimuma energije.

8.3 Prisilno titranje

Razmotrimo sada slučaj u kojem na tijelo u harmonijskom oscilatoru s gušenjem djeluje vanjska periodička sila $F(t) = F_0 \cos\omega t$, kako prikazuje slika 8.10. Važno je naglasiti da iznos ove sile ne ovisi o trenutnom otklonu tijela $u(t)$ iz položaja ravnoteže. Također, frekvencija ω nije određena građom oscilatora, nego pogonskim strojem koji tjera oscilator na titranje. Jednadžba gibanja tijela glasi

$$m\,\frac{d^2u}{dt^2} = -K\,u - b\,v + F_0\,\cos\omega t \tag{8.70}$$

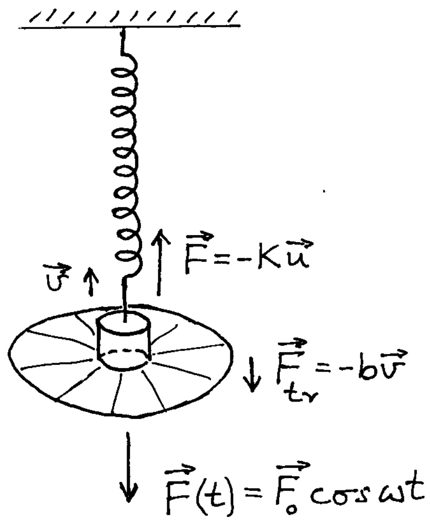
S desne strane znaka jednakosti imamo ukupnu silu koja djeluje na tijelo u harmonijskom oscilatoru. Ovu jednadžbu možemo preinačiti u oblik usporediv s jednadžbom (8.31)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du}{dt} + \omega_0^2\, u = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.71}$$

Član u kojem nema varijable u stavljen je na desnu stranu jednadžbe. U matematičkoj terminologiji, ovakva diferencijalna jednadžba naziva se *nehomogenom*, dok se jednadžba (8.31) s nulom na desnoj strani znaka jednakosti naziva *homogenom*. Iz matematičke je teorije znano da je opće rješenje nehomogene jednadžbe jednako zbroju općeg rješenja homogene jednadžbe i jednog partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe. U ovome bismo slučaju mogli napisati

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t) \tag{8.72}$$

Opće rješenje homogene jednadžbe $u_H(t)$ poznato nam je iz prethodnog odjeljka. Ono ovisi o nekim početnim uvjetima, te uvijek trne u vremenu. Naime, energija koja je početno bila pohranjena u oscilatoru, eksponencijalno se smanjuje uslijed gubitaka trenjem. S druge strane, pogonski stroj stalno pobuđuje titranje oscilatora, i to svojom frekvencijom ω, pa možemo očekivati uspostavu *stacionarnog titranja* u kojemu se trenjem gubi upravo onoliko snage koliko stroj prenosi oscilatoru.



Slika 8.10: Harmonijski oscilator s gušenjem na koji djeluje vanjska periodička sila. Slika prikazuje samo jedan trenutak u titranju.

8.3.1 Rješenje za stacionarno titranje

Osvrtom na jednadžbu (8.72) lako je ustanoviti da nakon isteka dovoljno dugog intervala vremena, tj. kada utrne homogeno rješenje $u_H(t)$, mora rješenje jednadžbe $u(t)$ odgovarati upravo partikularnome rješenju $u_P(t)$. Takvo bi titranje trebalo trajati u nedogled, pa napišimo

$$u_P(t) = A\cos(\omega t - \varphi) \tag{8.73}$$

gdje je A pretpostavljena amplituda stacionarnog titranja, dok konstanta φ ukazuje da titranje oscilatora može imati neki fazni pomak u odnosu na pogonsku silu $F(t)$.

Napomena: Za razliku od slobodnog titranja izraženog jednadžbom (8.2), ovdje konstanta φ nema nikakve veze s početnim uvjetima. Naime, svaka informacija o početnim uvjetima se izgubi kako utrne homogeno rješenje $u_H(t)$, pa preostaje jedino relativan odnos faze titranja oscilatora prema pogonskoj sili.

Možemo provjeriti da izraz (8.73) uistinu predstavlja jedno rješenje diferencijalne jednadžbe (8.71) tako da ga uvrstimo u samu diferencijalnu jednadžbu

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi) - \frac{\omega}{\tau}A\sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.74}$$

Upotrebom poznatih trigonometrijskih relacija za sinus i kosinus razlike kutova $(\omega t - \varphi)$, te sređivanjem dobivene jednadžbe, dobivamo

$$\left[-\omega^2\cos\varphi + \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right]A\cos\omega t + \left[-\omega^2\sin\varphi - \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2\sin\varphi\right]A\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.75}$$

Ova jednadžba može biti zadovoljena u svakome trenutku t samo ukoliko su izjednačeni koeficijenti uz $\cos\omega t$ na obje strane jednadžbe, te ukoliko iščezava koeficijent uz $\sin\omega t$ na lijevoj strani jednadžbe, budući da takvoga člana niti nema na desnoj strani. To su uvjeti

$$\left[-\omega^2 \cos\varphi + \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi + \omega_0^2\cos\varphi\right] A = \frac{F_0}{m} \quad (8.76)$$

$$-\omega^2 \sin\varphi - \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi + \omega_0^2 \sin\varphi = 0 \quad (8.77)$$

Iz ove dvije jednadžbe možemo jednoznačno odrediti dvije nepoznate konstante A i φ.

Počnimo od jednadžbe (8.77) iz koje neposredno slijedi rezultat

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (8.78)$$

Odmah uočavamo da fazni pomak φ stacionarnog titranja $u_P(t)$ u odnosu prema pogonskoj sili $F(t)$ ovisi o tome koju frekvenciju ω ima ta sila u odnosu prema vlastitoj frekvenciji oscilatora ω_0, koja je pak zadana građom oscilatora. Detaljnije ćemo o tome raspravljati nešto kasnije.

Izračunajmo sada amplitudu A stacionarnog titranja iz jednadžbe (8.77). Poslužimo se poznatim trigonometrijskim relacijama kojima se $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ mogu izraziti putem $tg\,\varphi$, koji je pak dan jednadžbom (8.78). Nakon sređivanja dobivenog izraza, dobivamo rezultat

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad (8.79)$$

Možemo zaključiti da je funkcija $u_P(t)$, pretpostavljena u jednadžbi (8.73), uistinu rješenje diferencijalne jednadžbe (8.71) ukoliko konstante φ i A odgovaraju izrazima u jednadžbama (8.78) i (8.79).

Amplitudu A i fazni pomak φ možemo smatrati funkcijama varijable ω te ih prikazati na slikama 8.11a i b. Smisao ovih krivulja je u tome da možemo izravno očitati kojom će amplitudom, te uz koji fazni pomak, titrati dani oscilator ako odaberemo neku određenu pogonsku frekvenciju, npr. ω' na slici 8.11.

Napomena: Podrazumijeva se da amplitudu vanjske sile F_0 držimo konstantnom. Drugim riječima, do promjene amplitude titranja oscilatora ne dolazi zbog promjene amplitude vanjske sile, nego samo zbog odabira druge pogonske frekvencije.

Maksimalnu amplitudu možemo točno odrediti kao ekstrem funkcije $A(\omega)$. U tu je svrhu dovoljno utvrditi minimum nazivnika u (8.79), odnosno minimum izraza pod korijenom. Izjednačavajući njegovu prvu derivaciju s nulom, lako dobivamo rješenje za *rezonantnu frekvenciju*

$$\omega_{rez} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}} \quad (8.80)$$

Tada kažemo da je pogonska sila u rezonanciji s harmonijskim oscilatorom. Rezonantna frekvencija je nešto niža od vlastite frekvencije oscilatora, no za oscilator s malenim gušenjem ta je razlika zanemariva, tj. $\omega_{rez} \approx \omega_0$. To je najčešći slučaj u praksi, te ćemo se u daljnjoj obradi zadržati na ovoj aproksimaciji.

U promatranju faznog pomaka, jednadžba (8.78) upućuje da se $\varphi = \pi/2$ postiže na frekvenciji $\omega = \omega_0$, neovisno o iznosu gušenja. Tako je i naznačeno na slici 8.11b.

Širina rezonancije. Korisno je razmotriti kriterije za širinu krivulje rezonancije na slici 8.11a. Izraz pod korijenom u jednadžbi (8.79) udvostruči se u odnosu na svoju minimalnu vrijednost kada pogonska frekvencija ω odstupa od rezonantne frekvencije ω_0 toliko da se ispuni uvjet

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 = 2\left(\frac{\omega_0}{\tau}\right)^2 \quad (8.81)$$

Tada se amplituda smanji na $1/\sqrt{2}$ od svoje maksimalne vrijednosti, a energija oscilatora padne na polovicu svoje maksimalne vrijednosti. Taj se kriterij uzima za utvrđivanje širine rezonancije. Razliku kvadrata iz jednadžbe (8.81) možemo napisati u obliku

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\,\omega_0\,\frac{\Delta\omega}{2} \quad (8.82)$$

gdje smo kod zbroja uzeli u obzir da se ω ne razlikuje mnogo od ω_0, a ukupnu širinu rezonancije označili smo s $\Delta\omega$. Uvjet iz jednadžbe (8.81) svodi se na jednostavan rezultat

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau} \quad (8.83)$$

Kada je relaksacijsko vrijeme dugačko, tj. kada se energija oscilatora sporo predaje okolini, oscilator ima usku krivulju rezonancije. Što se energija

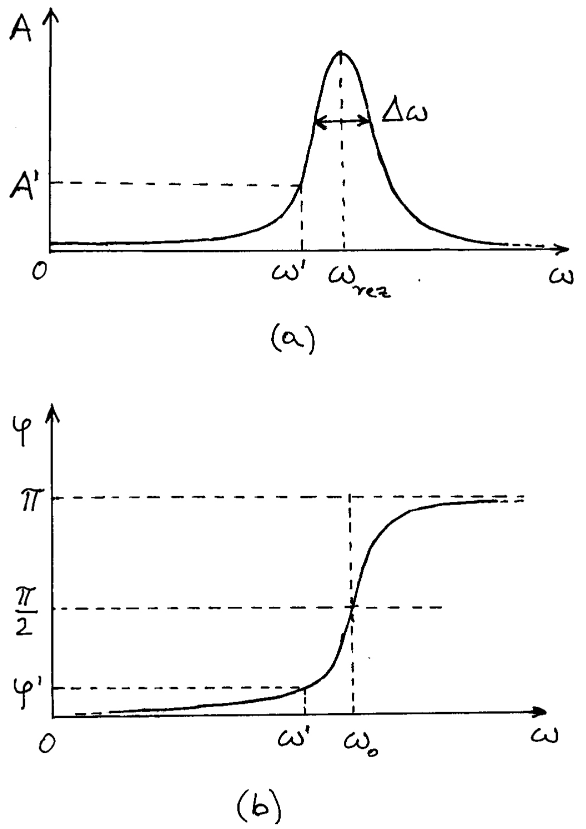
oscilatora brže gubi, rezonantna krivulja postaje šira. Kod jako široke rezonantne krivulje aproksimacija uz koju je izvedena jednadžba (8.83) nije više održiva, te izraz za širinu rezonancije postaje složeniji.

Analiza posebnih slučajeva titranja slabo gušenog oscilatora

Razmotrimo titranje koje nastaje kada se pogonska frekvencija ω nalazi znatno izvan širine rezonancije i to prema niskim frekvencijama, tj.

$$\omega \ll \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \qquad (8.84)$$

U tom slučaju, jednadžba (8.79) daje



Slika 8.11: (a) Ovisnost amplitude titranja o frekvenciji pobude, a uz stalnu amplitudu vanjske sile. Primjerice, za odabranu frekvenciju pobude ω' ostvaruje se titranje amplitudom A'. Naznačena je širina rezonancije $\Delta\omega$. (b) Fazno kašnjenje titranja harmonijskog oscilatora u odnosu na vanjsku harmonijsku silu.

$$A \approx \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \longrightarrow \frac{F_0}{m\,\omega_0^2} \qquad (8.85)$$

Amplituda je manja od one u rezonanciji, ali ne iščezava niti kod najnižih frekvencija, nego poprima neku minimalnu vrijednost u ovisnosti o amplitudi pogonske sile. Za fazni pomak dobivamo iz jednadžbe (8.78)

$$tg\,\varphi \approx \frac{\omega}{\tau\,\omega_0^2} \ll \frac{1}{\omega_0\,\tau} \ll 1 \qquad (8.86)$$

gdje smo uvažili da je $\omega \ll \omega_0$ sukladno jednadžbi (8.85), te $\omega_0\,\tau \gg 1$ zbog malenog gušenja ($\omega_0 \gg \Delta\omega$), uz ranije dobiveni odnos $\Delta\omega \approx 1/\tau$. Dobiveni rezultat znači da je fazno kašnjenje φ zanemarivo maleno. To se lako može vidjeti i na grafu prikazanom u slici 8.11b. Kao važan zaključak, možemo upamtiti da se na frekvencijama koje su znatno ispod rezonantne titranje odvija praktički u fazi s pogonskom silom

$$u(t) \approx \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\,\cos\omega t \qquad (8.87)$$

Razmotrimo sada odnose koji nastaju kada pogonska sila ima istu frekvenciju kao što je vlastita frekvencija oscilatora

$$\omega = \omega_0 \qquad (8.88)$$

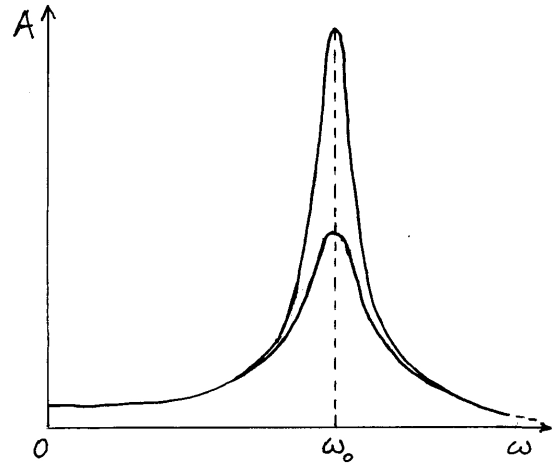
Radi se o (približnom) uvjetu rezonancije za slabo gušeni oscilator. Titranje se tada odvija amplitudom

$$A = \frac{F_0\,\tau}{m\,\omega_0} \qquad (8.89)$$

Možemo uočiti da je uz istu amplitudu pogonske sile F_0, ostvarena amplituda titranja manja kada je relaksacijsko vrijeme τ kraće, tj. kada se energija brže gubi trenjem. To je sasvim razumljiv i očekivan rezultat. Na slici 8.12 prikazani su primjeri rezonantnih krivulja za različita gušenja oscilatora, a uz istu amplitudu pogonske sile. Za dvostruko dulje relaksacijsko vrijeme, rezonantna amplituda postaje dvostruko veća, a širina rezonancije upola manja.

Fazu titranja u rezonanciji možemo lako odrediti iz jednadžbe (8.78)

$$tg\,\varphi = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (8.90)$$



Slika 8.12: Primjeri rezonantnih krivulja amplitude harmonijskog oscilatora za dva različita iznosa gušenja. Širina rezonancije za svaku krivulju određuje se na visini koja čini $1/\sqrt{2}$ od maksimalne amplitude u toj krivulji. Kod većeg gušenja, maksimalna amplituda se smanjuje, a raste širina rezonancije.

U rezonanciji titranje oscilatora zaostaje u fazi za $\pi/2$ za pogonskom silom. Ovaj rezultat nije intuitivno očekivan, dapače je pomalo iznenađujući, pa ga vrijedi detaljnije analizirati. U tu svrhu razmotrimo trenutnu brzinu tijela u rezonantnom titranju

$$v(t) = \frac{du}{dt} = \frac{F_0\,\tau}{m}\cos\omega t \tag{8.91}$$

Vidimo da se brzina tijela mijenja točno u fazi s pogonskom silom. Sada možemo shvatiti zašto je amplituda titranja najveća upravo u rezonanciji. Tada, naime, sila djeluje tako da uvijek gura tijelo u smjeru trenutne brzine i nastoji povećati iznos brzine. Time vanjska sila obavlja maksimalan rad, te unosi maksimalnu energiju u oscilator. Možemo izračunati prosječnu snagu koju u rezonanciji prenosi vanjska sila

$$\begin{aligned}\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)v(t)dt &= \frac{F_0^2\,\tau}{m}\,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t \\ &= \frac{F_0^2\,\tau}{2\,m}\end{aligned} \tag{8.92}$$

U stacionarnom se stanju ova snaga troši putem trenja tako da amplituda titranja ostaje stalna.

Razmotrimo konačno i slučaj kada je frekvencija pogonske sile znatno iznad rezonantne

$$\omega \gg \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \tag{8.93}$$

Za amplitudu nalazimo

$$A \approx \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \longrightarrow \frac{F_0}{m\,\omega^2} \longrightarrow 0 \tag{8.94}$$

Povećavanjem pogonske frekvencije daleko iznad rezonantne, amplituda titranja postaje sve manja, te u konačnici teži nuli. Drugim riječima, pogonski stroj ne uspijeva značajnije zatitrati oscilator na jako visokim frekvencijama, unatoč tome što amplituda pogonske sile F_0 nije izmijenjena. Razlog tomu leži u inerciji kojom se tijelo opire velikoj akceleraciji na visokim frekvencijama, pa se stoga amplituda titranja smanji.

Za fazno kašnjenje u titranju znatno iznad rezonancije dobivamo

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{-\omega^2} = -\frac{1}{\omega\,\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \approx \pi \tag{8.95}$$

Fazno kašnjenje za iznos π može se također vidjeti u grafu na slici 8.11b. Matematički možemo pisati

$$\begin{aligned}u(t) &\approx \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\cos(\omega t - \pi) \\ &= -\frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\cos\omega t\end{aligned} \tag{8.96}$$

Znatno iznad rezonantne frekvencije, titranje kasni u fazi za vanjskom silom gotovo za pola perioda, što znači da se odvija praktički u protufazi s vanjskom silom

Apsorpcijska i disperzijska amplituda

Vidjeli smo da je stacionarno titranje oscilatora potpuno određeno dvjema konstantama A i φ. Amplitudu izravno uočavamo dok gledamo harmonijski oscilator u titranju. Ako još možemo usporedno pratiti titranje oscilatora i gibanje pokretačke ručice pogonskog stroja, lako je utvrditi relativan fazni pomak.

Međutim, ponekad je prikladnije analizirati titranje oscilatora putem drugih dviju konstanti na

sljedeći način. Rastavimo titranje koristeći se trigonometrijskim izrazom za kosinus razlike kutova

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A\,\cos(\omega t-\varphi)\\
&= A\,\cos\varphi\,\cos\omega t + A\,\sin\varphi\,\sin\omega t\\
&= A_d\,\cos\omega t + A_a\,\sin\omega t \qquad (8.97)
\end{aligned}
$$

Titranje je ovdje prikazano kao superpozicija jednog titranja u fazi s pogonskom silom i drugog titranja koje kasni za pogonskom silom za fazu $\pi/2$. Za potonje titranje se obično kaže da je *izvan faze.* Amplitude ti titranja su

$$A_d = A\,\cos\varphi \qquad (8.98)$$

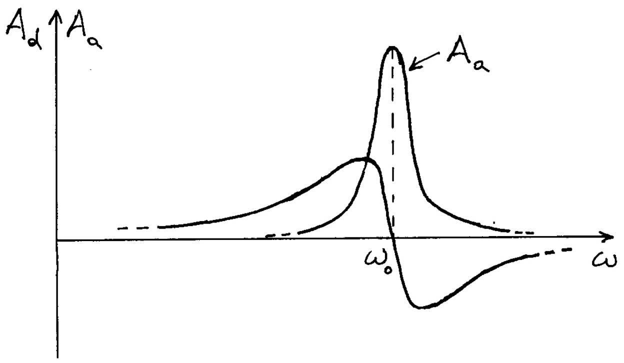
koja se naziva *disperzijska amplituda*, te

$$A_a = A\,\sin\varphi \qquad (8.99)$$

koja predstavlja *apsorpcijsku amplitudu.* Poslužimo li se poznatim trigonometrijskim relacijama koje povezuju sinus i kosinus nekog kuta s njegovim tangensom, dobivamo nakon sređivanja konačne izraze

$$A_d = \frac{F_0}{m}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \qquad (8.100)$$

$$A_a = \frac{F_0}{m}\,\frac{\dfrac{\omega}{\tau}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \qquad (8.101)$$



Slika 8.13: Ovisnost apsorpcijske i disperzijske amplitude o frekvenciji pogonske sile.

Kao što smo ranije razmatrali amplitudu A i fazu φ kao funkcije pogonske frekvencije ω (slika 8.11), možemo sada prikazati na slici 8.13 frekventnu ovisnost A_d i A_a. Apsorpcijska amplituda je maksimalna kada pogonska frekvencija (približno) odgovara vlastitoj frekvencji oscilatora ω_0, tj. u rezonanciji. Na višim i nižim frekvencijama, ona je znatno manja i teži u nulu.

Napomena: Valja uočiti razliku između apsorpcijske amplitude A_a na slici 8.13 i amplitude A na slici 8.11. Apsorpcijska amplituda iščezava za $\omega \to 0$, što je lako utvrditi iz jednadžbe (8.101) u kojoj se pogonska frekvencija ω pojavljuje u brojniku razlomka. Nasuprot tome, ukupna amplituda A u tim uvjetima teži konačnoj vrijednosti prema jednadžbi (8.85). Također, na frekvencijama iznad rezonantne, apsorpcijska amplituda iščezava znatno prije od ukupne amplitude.

Disperzijska amplituda ima posebno zanimljivu frekventnu ovisnost. U rezonanciji ona mijenja predznak od pozitivnih vrijednosti, koje ima na nižim frekvencijama, na negativne vrijednosti za više frekvencije. Također možemo primijetiti da je apsolutna vrijednost $|A_d|$ veća od A_a na svim pogonskim frekvencijama znatno udaljenim od rezonantne. Ova zapažanja možemo interpretirati na sljedeći način. Na niskim frekvencijama, gdje je $A_d \gg A_a$, titranje je dominantno određeno disperzijskom amplitudom, a to znači da se ono odvija u fazi s pogonskom silom na oscilator. U rezonanciji pak disperzijska amplituda iščezava, pa imamo samo apsorpcijsku amplitudu koja je prema jednadžbi (8.97) vezana uz titranje izvan faze. Konačno, na frekvencijama znatno iznad rezonantne, disperzijska amplituda ponovo dominira, ali je negativna, što znači da se titranje odvija u protufazi s pogonskom silom.

Napomena: Možemo također primijetiti da se disperzijska amplituda u granici $\omega \to 0$ podudara s ukupnom amplitudom prema jednadžbi (8.85). Za visoke pak frekvencije, izraz (8.100) se svodi na (8.94).

Apsorbirana snaga. Naziv "apsorpcijska" amplituda dolazi od toga što ona određuje srednju snagu koju harmonijski oscilator prima od pogonske sile. Možemo to pokazati računanjem

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\, v(t)\, dt \tag{8.102}$$

Za brzinu tijela u svakom trenutku imamo

$$v(t) = \frac{du}{dt} = -\omega A_d \sin\omega t + \omega A_a \cos\omega t \tag{8.103}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (8.102) dobivamo integrale poznatih vrijednosti

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos\omega t\ \sin\omega t\, dt = 0 \tag{8.104}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{1}{2} \tag{8.105}$$

Budući da samo drugi integral ima neiščezavajuću vrijednost, nalazimo da je prosječna snaga koju harmonijski oscilator dobiva od pogonske sile

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\, \omega F_0 A_a \tag{8.106}$$

Ovaj izraz vrijedi za sve pogonske frekvencije. Vidimo da je samo apsorpcijska amplituda vezana uz apsorbiranu snagu, pa otud i njen naziv.

Uvrštavajući za A_a izraz iz jednadžbe (8.101) možemo srednju snagu pisati u obliku

$$\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^2\, \tau}{2\, m} \, \frac{\left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \tag{8.107}$$

Lako je uočiti da se za $\omega = \omega_0$ drugi razlomak svodi na jedinicu, a prvi se razlomak podudara s ranije dobivenim izrazom (8.92). I u detaljnijem razmatranju, izjednačujući prvu derivaciju funkcije $\overline{P}(\omega)$ s nulom, dobivamo da se maksimum apsorbirane snage ostvaruje točno na $\omega = \omega_0$, bez obzira na iznos gušenja.

Napomena: Za funkciju $A_a(\omega)$ iz jednadžbe (8.101) može se pak pokazati da joj se maksimum nalazi na malo nižoj frekvenciji od ω_0, ovisno o iznosu gušenja. Učinak množenja s varijablom ω u jednadbi (8.106) pomiče maksimum na malo višu frekvenciju, upravo na ω_0.

Možemo sada detaljnije razmotriti i pitanje širine rezonancije. Ako se postavi uvjet da apsorbirana snaga padne na polovicu svoje maksimalne vrijednosti, mora drugi razlomak u jednadžbi (8.106) biti izjednačen s $1/2$, što vodi na dvije moguće kvadratne jednadžbe

$$\omega^2 \pm \frac{\omega}{\tau} + \omega_0^2 = 0 \tag{8.108}$$

Od formalnih četiriju matematičkih rješenja ovih jednadžbi, uzimamo samo dva pozitivna, budući da negativna frekvencija ne bi imala fizikalnog smisla

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{2\tau}\right)} \pm \frac{1}{2\tau} \tag{8.109}$$

Dakle, puna širina rezonantne krivulje na polovici maksimalne apsorbirane snage iznosi točno $1/\tau$, kao što smo već približnom analizom dobili u jednadžbi (8.83). Štoviše, taj je rezultat valjan za bilo koje gušenje harmonijskog oscilatora, osim za ekstreman slučaj tako velikog gušenja ($\omega_0\tau < 1/\sqrt{2}$) pri kojemu krivulja (8.106) više ne pokazuje maksimum. Što se tiče pozicije frekventnog pojasa $1/\tau$, jednadžba (8.109) pokazuje da se njegova sredina nalazi na nešto višoj frekvenciji od ω_0, ovisno o gušenju. Razlog leži u asimetričnosti funkcije $\overline{P}(\omega)$ koja na frekvencijama višim od ω_0 opada sporije zbog rastućeg brojnika u kojemu se nalazi ω^2.

Lorentzova rezonantna krivulja. Kod slabo gušenog harmonijskog oscilatora, što je čest slučaj u praksi, krivulja apsorbirane snage postaje približno simetrična oko frekvencije ω_0. Tada je zgodno primijeniti aproksimaciju za nazivnik

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 &= (\omega_0 - \omega)^2\, (\omega_0 + \omega)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \\ &\approx 4\,\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{8.110}$$

Uz istu aproksimaciju u brojniku jednadžbe (8.106), dobivamo funkciju

$$R(\omega) = \frac{\left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2} \tag{8.111}$$

Njena je vrijednost jednaka jedinici za $\omega = \omega_0$, a širina na pola visine iznosi $1/\tau$. Krivulja koja predstavlja ovu funkciju potpuno je simetrična oko ω_0. Ona dobro predstavlja krivulju apsorbirane snage u

slučajevima slabo gušenih harmonijskih oscilatora, te se uobičajeno naziva *Lorentzova rezonantna krivulja.*

8.3.2 Prijelazne pojave

Korisno je na kraju razmatranja o prisilnome titranju harmonijskog oscilatora ponoviti uvodne napomene o općem rješenju nehomogene diferencijalne jednadžbe koje je okvirno zapisano u jednadžbi (8.72). Možemo sada utvrditi potpuni izraz

$$\begin{aligned} u(t) = \; & e^{-t/2\tau}\left(A_1 \cos\omega_g\, t + A_2 \sin\omega_g\, t\right) \\ & + A_d\, \cos\omega t + A_a\, \sin\omega t \end{aligned} \qquad (8.112)$$

gdje prvi dio predstavlja opće rješenje homogene diferencijalne rješenje, a drugi dio je partikularno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe. Moramo razmotriti način primjene ovog matematičkog rješenja u konkretnom fizikalnom problemu.

Ponajprije moramo uočiti da je matematički gledano funkcija $u(t)$ zadana za sve vrijednosti varijable $-\infty < t < +\infty$. Međutim, u fizikalnom se problemu podrazumijeva primjena te funkcije samo za $t \geq 0$. Naime, za $t < 0$ eksponencijalna bi funkcija rasla u nedogled, što bi značilo da je u prethodnim vremenima oscilator imao veću energiju. U realnosti uvijek postoji neki trenutak u kojemu je oscilator mogao dobiti neku početnu energiju, pa onda taj trenutak odabiremo kao onaj od kojega počinjemo računati vrijeme, tj. kao trenutak u kojemu je $t = 0$.

Nadalje, pretpostavlja se da su u trenutku $t = 0$ poznati početni uvjeti, tj. $u(0)$ i $v(0)$. Iz tih je uvjeta moguće odrediti vrijednosti dviju konstanti A_1 i A_2, ali postupak nije tako jednostavan kao u odjeljku 8.2 gdje smo imali samo gušeno titranje. Naime, sada u jednadžbi (8.112) imamo i konstante A_d i A_a, koje nisu određene početnim uvjetima, nego iznosom pogonske sile, gušenjem i relativnim odnosom pogonske frekvencije ω prema vlastitoj frekvenciji oscilatora ω_0. Drugim riječima, ti članovi postoje u rješenju (8.112) već od početnog trenutka $t = 0$ i to u punome iznosu. Oni su posljedica matematičkog rješenja nehomogene diferencijalne jednadžbe koja sadrži vanjsku silu u svakome trenutku, te se ne može pomišljati na to da prisilno titranje "naraste" od trenutka uključivanja vanjske sile u $t = 0$. Prema tome, početne uvjete moramo zadovoljiti tako se konstante A_1 i A_2 prilagode postojanju konstanti A_d i A_a u rješenju (8.112).

Kao jednostavan primjer uzmimo da je oscilator mirovao u položaju ravnoteže u $t = 0$. Iz jednadžbe (8.112) slijedi za položaj ravnoteže

$$\begin{aligned} u(0) &= A_1 + A_d = 0 \\ &\Longrightarrow A_1 = -A_d \end{aligned} \qquad (8.113)$$

dok za početno mirovanje imamo

$$\begin{aligned} v(0) &= -\frac{1}{2\tau}\, A_1 + \omega_g A_2 + \omega A_a = 0 \\ &\Longrightarrow A_2 = -\frac{1}{2\omega_g \tau}\, A_d - \frac{\omega}{\omega_g}\, A_a \end{aligned} \qquad (8.114)$$

Ukoliko je gušenje oscilatora maleno ($\omega_g \tau \gg 1$), te ukoliko je pogonska frekvencija ω tek malo različita od ω_g, može se zanemariti prvi član, dok drugi član daje približno $A_2 \approx -A_a$. Rješenje za titranje oscilatora poprima jednostavan oblik

$$\begin{aligned} u(t) = A_d\, & \left[\cos\omega t - e^{-t/2\tau} \cos\omega_g\, t\right] \\ + \; A_a & \left[\sin\omega t - e^{-t/2\tau} \sin\omega_g\, t\right] \end{aligned} \qquad (8.115)$$

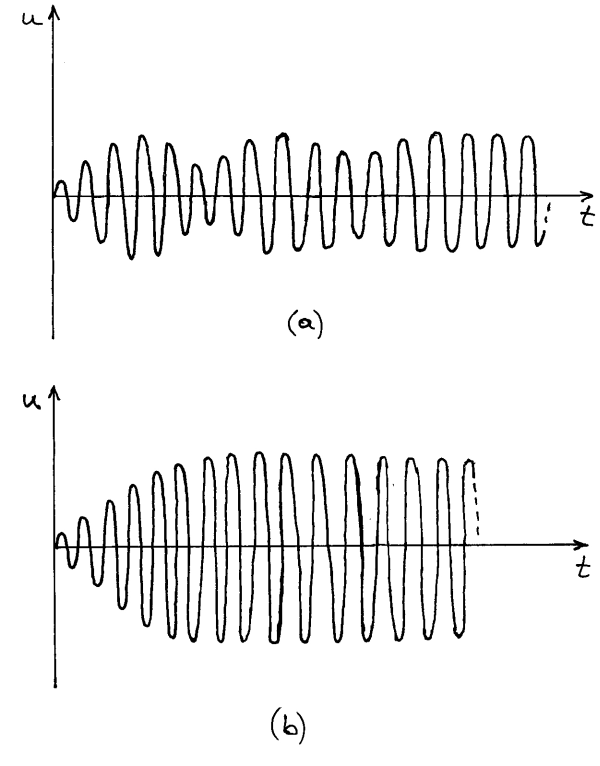
Ovo rješenje predstavlja titranje harmonijskog oscilatora koji je mirovao u položaju ravnoteže, a u trenutku $t = 0$ je uključen pogonski stroj na frekvenciji ω nešto različitoj od ω_g. U samome početku, izrazi u zagradama u jednadžbi (8.115) se uzajamno gotovo poništavaju, pa je $u(t)$ jako maleno. No, zbog ipak postojeće razlike u frekvencijama ω i ω_g, dva se titranje polako razilaze u fazi. Kada dođu u protufazu, pojavi se u jednadžbi (8.115) efektivno njihov zbroj, tako da $u(t)$ poprima izrazito velike vrijednosti. U daljnjem razvoju, titranja se opet približavaju u fazi tako da se $u(t)$ opet smanjuje. Zbog eksponencijalnog faktora, više ne dolazi do potpunog uzajamnog poništavanja dvaju članova, pa titranje samo ostvari neki minimum, a nakon toga opet raste, ali do manjeg maksimuma, itd. Titranje je slikovito prikazano na slici 8.14a. Istodobno titranje na dvjema frekvencijama očituje se u obliku udara. Ipak, protekom vremena umanjuje se eksponencijalni faktor u jednadžbi (8.115) tako da slabi titranje na frekvenciji ω_g. Na slici 8.14a vidi se da amplitude uzastopnih udara bivaju sve

manje tako da titranje poprima stacionarni oblik na frekvenciji ω koju uvjetuje pogonska sila.

Zanimljivo je analizirati i poseban slučaj kada pogonski stroj ima frekvenciju ω koja je upravo jednaka frekvenciji ω_g slabo gušenog oscilatora. Jednadžba (8.115) se svodi jednostavno na oblik

$$u(t) = \left[1 - e^{-t/2\tau}\right] (A_d \cos \omega t + A_a \sin \omega t) \tag{8.116}$$

Pogonski stroj predaje oscilatoru energiju tako da se njegova amplituda kontinuirano povećava kako prikazuje slika 8.14b. Zasićenje nastaje kada oscilator gubi onoliko snage koliko je dobiva od pogonskog stroja.

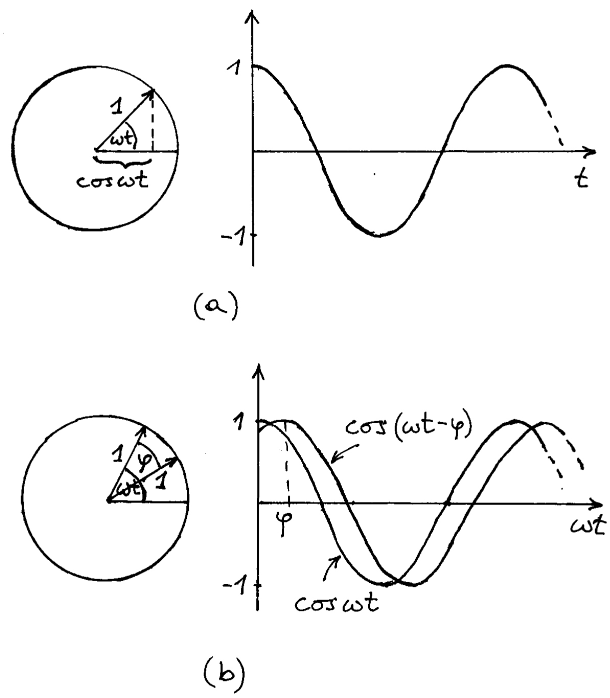


Slika 8.14: Vanjska periodička sila pokreće harmonijski oscilator iz početnog stanja mirovanja. (a) Frekvencija pogonske sile se razlikuje od vlastite frekvencije oscilatora, pa u početku titranja nastaju udari, no kasnije se udari ublažavaju i nastupa stacionarno titranje. (b) Kada frekvencija pogonske sile upravo odgovara vlastitoj frekvenciji oscilatora, amplituda titranja kontinuirano raste do zasićenja u stacionarnom titranju.

Za svako moguće ponašanje koje se javlja od početnog trenutka do uspostave stacionarnog titranja kaže se da predstavlja *prijelazne pojave* (engl. *transients*). Općenito, prijelazne pojave nastaju i kada naglo promijenimo frekvenciju pogonskog stroja. Ako je u tome trenutku oscilator zatečen s nekim otklonom iz položaja ravnoteže i nekom brzinom, možemo reći da su zadani početni uvjeti i postupiti primjenom opće jednadžbe (8.112). U prijelaznim pojavama se očituje superpozicija titranja na dvjema frekvencijama. Što je gušenje veće (kraći τ), brže se uspostavi novo stacionarno stanje.

8.3.3 Metoda rotirajućih vektora

Vremenski promjenljivu funkciju $\cos \omega t$ možemo dobiti promatrajući rotaciju jediničnog vektora kutnom brzinom ω (slika 8.15a). Ako pored funkcije $\cos \omega t$ želimo prikazati i funkciju $\cos(\omega t - \varphi)$,



Slika 8.15: (a) Jedinični vektor rotira kutnom brzinom ω. Njegovu projekciju na horizontalnu os može se povezati s funkcijom $\cos \omega t$. (b) Rotacija dvaju jediničnih vektora istom kutnom brzinom ω. Kut φ među vektorima je stalan. Projekcije dvaju vektora na horizontalnu os povezane su s funkcijom $\cos \omega t$ i fazno pomaknutom funkcijom $\cos(\omega t - \varphi)$.

crtamo dva rotirajuća vektora (slika 8.15b). Oba vektora rotiraju istom kutnom brzinom ω, tako da je kut φ među njima stalan.

Primijenimo sada ovu metodu na vremenski promjenljive veličine u harmonijskom oscilatoru. Pozovimo se na diferencijalnu jednadžbu (8.71)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du}{dt} + \omega_0^2\, u = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.117}$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe predstavlja titranje harmonijskog oscilatora u stacionarnom stanju

$$u(t) = A\,\cos(\omega t - \varphi) \tag{8.118}$$

Uvrštavanjem ovog rješenja u samu diferencijalnu jednadžbu dobivamo (ponavljamo (8.74) radi preglednosti)

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi) - \frac{\omega}{\tau}A\sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.119}$$

Sinusnu funkciju možemo izraziti putem kosinusa koristeći se poznatom trigonometrijskom formulom

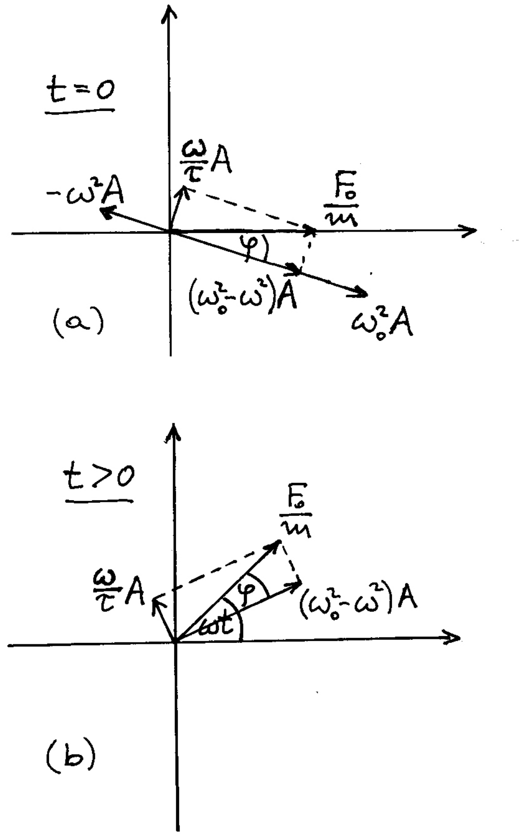
$$\sin\alpha = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \tag{8.120}$$

Tako dobivamo jednadžbu

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A\cos(\omega t - \varphi) + \frac{\omega}{\tau}A\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{8.121}$$

Ova tri člana možemo shvatiti kao projekcije triju rotirajućih vektora. Na slici 8.16a prikazani su vektori u trenutku $t = 0$. Oni rotiraju istom kutnom brzinom ω tako da zadržavaju relativan odnos faza. Prikaz vektora u nekom trenutku $t > 0$ dan je na slici 8.16b. U svakom trenutku zbroj triju vektora $-\omega^2 A$, $\omega_0^2 A$ i $(\omega/\tau)A$ daje rezultantni vektor F_0/m.

Napomena: Bilo bi pogrešno stavljati oznaku vektora npr. $\vec{A}$ na slici 8.16 jer se pojedini vektori pojavljuju kao uzajamno okomiti. Stoga su vektori obilježeni algebarskim amplitudama koje se pojavljuju u jednadžbi (8.121).



Slika 8.16: (a) Vektori $-\omega^2 A$, $\omega_0^2 A$ i $(\omega/\tau)A$, te njihov zbroj F_0/m u trenutku $t = 0$. (b) Prikaz rotirajućih vektora u nekom trenutku $t > 0$.

Kada vektori rotiraju, mijenjaju se u vremenu njihove projekcije na horizontalnu os. Međutim, zbroj projekcija pojedinih vektora uvijek je jednak projekciji rezultantnog vektora. Time je zadovoljena jednadžba (8.121).

Primjenom Pitagorina poučka na vektore u slici 8.16 dobivamo

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \tag{8.122}$$

Iz ove jednadžbe odmah dobivamo

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \tag{8.123}$$

Sasvim očekivano, dobili smo isti rezultat kao ranije u jednadžbi (8.79), ali na mnogo jednostavniji

način. Nadalje, iz trokuta na slici 8.16 možemo odmah odrediti

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (8.124)$$

I ovaj se rezultat podudara s onim koji smo imali u jednadžbi (8.78).

Odnosi sila u posebnim slučajevima

Korisno je razmotriti značenje pojedinih rotirajućih vektora. Osvrnemo li se na jednadžbu (8.117), odnosno na (8.119), vidimo da je vektor $-\omega^2 A$ povezan s akceleracijom tijela u titranju, $\omega_0^2 A$ dolazi od elastične povratne sile opruga, a $(\omega/\tau)A$ od gušenja. Možemo reći da su to sile po jedinici mase, kao i njihova rezultanta F_0/m. Zanimljivo je fizikalno interpretirati međuovisnost tih sila u posebnim slučajevima.

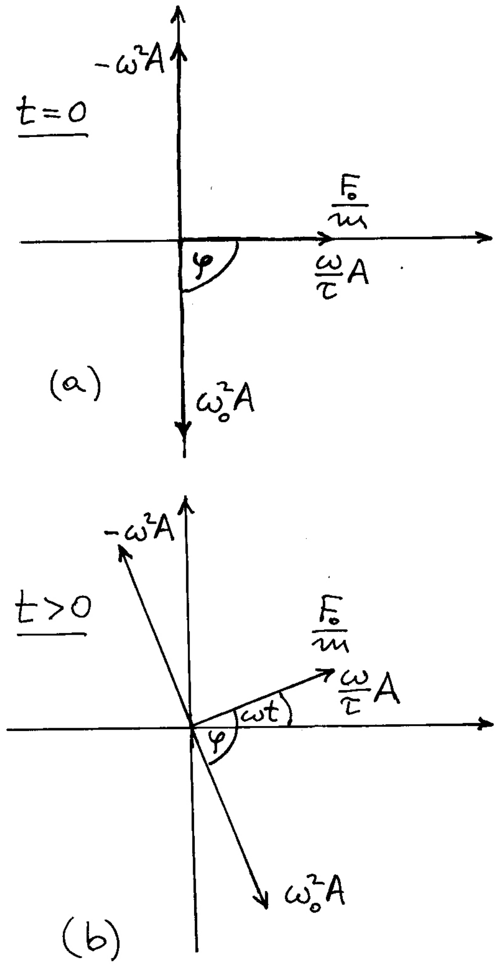
Slučaj $\omega < \omega_0$ je upravo bio odabran za prikaz na slici 8.16. Kod njega je povratna sila opruge veća od sile koja je potrebna za davanje akceleracije. Stoga možemo reći da se dio povratne sile opruge koristi za davanje akceleracije tijelu, dok vanjska sila svladava preostalu razliku $(\omega_0^2 - \omega^2)A$ i trenje $(\omega/\tau)A$.

Zanimljivo je nastaviti analizu prema graničnom slučaju jako niskih frekvencija ($\omega << \omega_0$). Zbog smanjenja amplitude, trenje $(\omega/\tau)A$ postaje maleno, a fazni kut φ postaje malen zbog niske frekvencije. Tada se vektori F_0/m i $\omega_0^2 A$ praktički preklope, tj. vanjska sila uglavnom služi za svladavanje elastične povratne sile opruge. Dakle, kada je frekvencija prisilnih oscilacija mnogo niža od rezonantne, odziv harmonijskog oscilatora je dominantno određen elastičnošću opruge.

Slučaj rezonancije je prikazan na slici 8.17. Zbog $\omega = \omega_0$, vektori $-\omega^2 A$ i $\omega_0^2 A$ se poništavaju. Možemo reći da je povratna sila opruge upravo onolika koliko je potrebno za davanje akceleracije tijelu, pa vanjska sila nije potrebna u tu svrhu. Vidimo da je fazno kašnjenje $\varphi = \pi/2$, te se vektori F_0/m i $(\omega/\tau)A$ podudaraju. Iz toga slijedi

$$A = \frac{F_0\,\tau}{m\,\omega_0} \qquad (8.125)$$

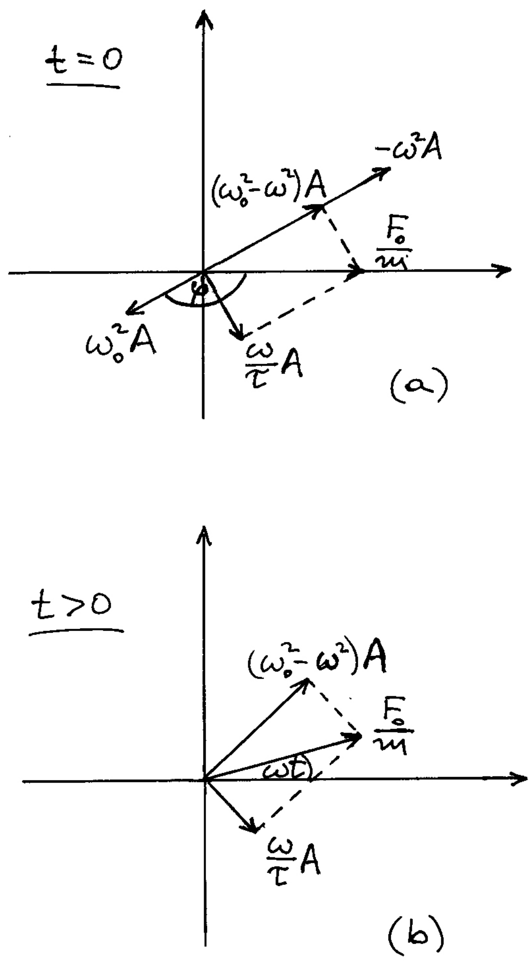
što je iznova rezultat koji smo imali ranije u jednadžbi (8.89). U rezonanciji se vanjska sila koristi u cijelosti za svladavanje trenja, pa možemo reći da se harmonijski oscilator u tome slučaju ponaša kao otporni sustav.



Slika 8.17: U rezonanciji se vektori $-\omega^2 A$ i $\omega_0^2 A$ poništavaju, a $(\omega/\tau)A$ je izjednačen s F_0/m. (a) Prikaz vektora u trenutku $t = 0$. (b) Rotirajući vektori u nekom trenutku $t > 0$.

Razmotrimo još i slučaj kada je pogonska frekvencija viša od rezonantne ($\omega > \omega_0$). Pripadajući rotirajući vektori prikazani su na slici 8.18. Pomak iz položaja ravnoteže $u(t)$ je u fazi s $\omega_0^2 A$ tako da je fazno kašnjenje za vanjskom silom $\varphi > \pi/2$.

U ovome slučaju, povratna elastična sila opruge nije dovoljna za davanje akceleracije tijelu. Naime, brzo titranje podrazumijeva i veliku akceleraciju, pa veći dio vanjske sile služi upravo u tu svrhu. U slučaju jako visokih frekvencija, možemo reći da u odzivu harmonijskog oscilatora dominira inercija tijela.



Slika 8.18: Za pogonske frekvencije koje su veće od rezonantne, vektor $-\omega^2 A$ po iznosu nadmašuje vektor $\omega_0^2 A$. Kut φ se računa od vektora F_0/m prema vektoru $\omega_0^2 A$. (a) Stanje u $t = 0$. (b) Rotirajući vektori u trenutku $t > 0$.

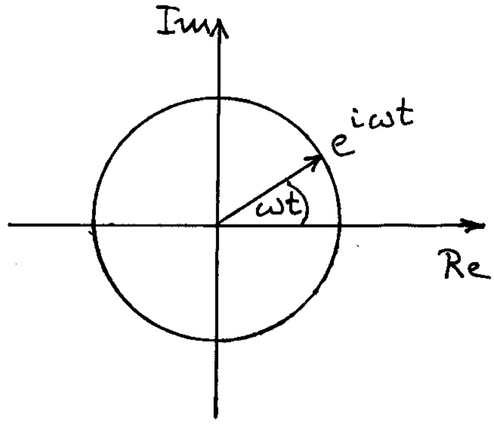
8.3.4 Metoda kompleksnih brojeva

Analogno metodi rotirajućih vektora, možemo se poslužiti metodom kompleksnih brojeva prikazanih u kompleksnoj ravnini. Razmotrimo kompleksan broj

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\sin\omega t \qquad (8.126)$$

U kompleksnoj ravnini (slika 8.19) taj je broj prikazan jediničnim vektorom koji rotira kutnom brzinom ω u kompleksnoj ravnini.

Napomena: Pogrešno bi bilo pridavati vektoru u kompleksnoj ravnini bilo kakav smjer u realnom prostoru. Radi se samo o spojnici ishodišta s točkom koja predstavlja neki kompleksan broj u kompleksnoj ravnini.



Slika 8.19: Osi kompleksne ravnine označavaju se oznakama *Re* i *Im*. Kompleksan broj $exp(i\omega t)$ je predstavljen rotirajućim jediničnim vektorom.

Izrazimo vanjsku silu kompleksnim brojem (oznaka ˜ iznad simbola veličine)

$$\tilde{F}(t) = F_0\, e^{i\omega t} \qquad (8.127)$$

gdje je F_0 realna veličina. Na isti način izrazimo pomak iz položaja ravnoteže

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A}\, e^{i\omega t} \qquad (8.128)$$

gdje je $\tilde{A}$ kompleksna amlituda tako da $\tilde{u}(t)$ kasni u fazi za $\tilde{F}(t)$, što ćemo pokazati niže.

Kada radimo s kompleksnim veličinama, podrazumijevamo da su stvarne fizikalne veličine naprosto realni dijelovi kompleksnih veličina, npr.

$$F(t) = Re\left[\tilde{F}(t)\right] = F_0\,\cos\omega t \qquad (8.129)$$

Računanje možemo provesti s kompleksnim veličinama, a tek kada dobijemo konačni rezultat potražimo realni dio koji predstavlja stvarnu fizikalnu veličinu.

Krenimo od diferencijalne jednadžbe za harmonijski oscilator

$$\frac{d^2\tilde{u}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\,\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \omega_0^2\,\tilde{u}(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{m} \qquad (8.130)$$

Uvrštavanjem kompleksnih veličina i deriviranjem dobivamo

$$-\omega^2\,\tilde{A}\,e^{i\omega t} + i\,\frac{\omega}{\tau}\,\tilde{A}\,e^{i\omega t} + \omega_0^2\,\tilde{A}\,e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}\,e^{i\omega t} \tag{8.131}$$

Ova je jednadžba zadovoljena u svakom trenutku t ukoliko vrijedi

$$-\omega^2\,\tilde{A} + i\,\frac{\omega}{\tau}\,\tilde{A} + \omega_0^2\,\tilde{A} = \frac{F_0}{m} \tag{8.132}$$

Iz ove jednadžbe neposredno dobivamo rješenje za kompleksnu amplitudu

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\,\dfrac{\omega}{\tau}} \tag{8.133}$$

Zgodno je rastaviti kompleksnu amplitudu na realni i imaginarni dio. Množenjem s kompleksno konjugiranim brojem u brojniku i nazivniku dobivamo

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{m}\,\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - i\,\dfrac{\omega}{\tau}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \tag{8.134}$$

Lako možemo prepoznati da kompleksna amplituda ima oblik

$$\tilde{A} = A_d - i\,A_a \tag{8.135}$$

gdje A_d i A_a odgovaraju izrazima za disperzijsku, odnosno apsorpcijsku amplitudu koje smo imali ranije u jednadžbama (8.100), odnosno (8.101). Stoga možemo prikazati na slici 8.20 kompleksnu amplitudu kao vektor s komponentama duž realne i imaginarne osi.

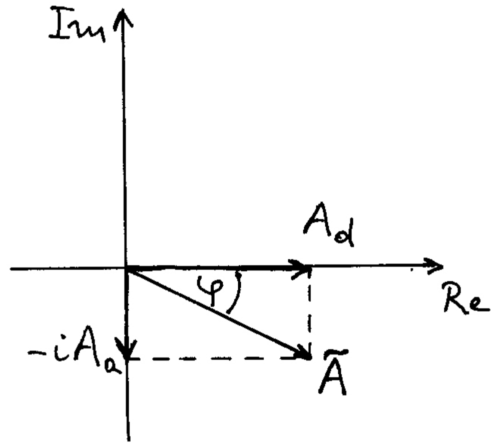
Možemo konačno zapisati kompleksnu amplitudu na način koji se često rabi kod kompleksnih brojeva, tj. putem modula i faze

$$\tilde{A} = |\tilde{A}|\,e^{-i\varphi} \tag{8.136}$$

Uvidom u sliku 8.20 i laganim računom nalazimo

$$\begin{aligned} |\tilde{A}|^2 &= A_d^2 + A_a^2 \\ &= \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \end{aligned} \tag{8.137}$$

Odatle slijedi modul kompleksne amplitude



Slika 8.20: Prikaz kompleksne amplitude $\tilde{A}$ u kompleksnoj ravnini. Realna i imaginarna komponenta predstavljaju apsorpcijsku i disperzijsku amplitudu. Fazni kut φ se računa od disperzijske komponente A_d, koja je u fazi s vanjskom silom F_0, pa prema samoj kompleksnoj amlitudi $\tilde{A}$.

$$|\tilde{A}| = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2}} \tag{8.138}$$

Dobili smo isti izraz koji smo imali za amplitudu najprije u jednadžbi (8.79), a potom i u jednadžbi (8.123).

Za fazu kompleksne amlitude imamo prema slici 8.20

$$tg\,\varphi = \frac{A_a}{A_d} = \frac{\dfrac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{8.139}$$

što se podudara s ranijim rezultatom u jednadžbi (8.78), te ponovljenim u jednadžbi (8.124).

Pomak tijela iz položaja ravnoteže možemo sada pisati u obliku

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A}\,e^{i\omega t} = |\tilde{A}|\,e^{-i\varphi}\,e^{i\omega t} = |\tilde{A}|\,e^{i(\omega t - \varphi)} \tag{8.140}$$

Fizikalno značenje ima realni dio

$$u(t) = Re\left[\tilde{u}(t)\right] = |\tilde{A}|\,\cos(\omega t - \varphi) \tag{8.141}$$

Vidimo da je u kompleksnom prikazu fazni pomak zapravo sadržan u kompleksnoj amplitudi $\tilde{A}$.

8.3.5 Impedancija harmonijskog oscilatora

Kada razmatramo djelovanje periodičke vanjske sile na neki sustav zgodno je uvesti pojam *impedancije* (lat. *impedimentum - zapreka*). Općenito govoreći, impedancija je veličina koja iskazuje koliko se sustav opire titranju pod utjecajem vanjske sile.

Kod harmonijskog oscilatora impedancija povezuje vanjsku silu i brzinu tijela

$$\tilde{F}(t) = \tilde{Z}\,\tilde{v}(t) \qquad (8.142)$$

Što je impedancija veća, to je brzina manja uz istu primijenjenu silu. Da bismo došli do izraza za kompleksnu impedanciju, krenimo najprije u izračun brzine tijela u kompleksnom zapisu

$$\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{A}\,e^{i\omega t}\right) = i\,\omega\,\tilde{A}\,e^{i\omega t} = \tilde{v_0}\,e^{i\omega t} \qquad (8.143)$$

Korisno je prikazati kompleksne vektore $\tilde{A}$ i $\tilde{v_0}$ u kompleksnoj ravnini na slici 8.21. Vrijedi pravilo da množenjem nekog kompleksnog vektora imaginarnom jedinicom i dobivamo novi kompleksni vektor koji je zakrenut u fazi za $\pi/2$. U to se lako uvjeriti ako izračunamo

$$e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2} = i \qquad (8.144)$$

Tako imamo

$$\tilde{v_0} = i\,\omega\,\tilde{A} = e^{i\pi/2}\omega\,|\tilde{A}|\,e^{-i\varphi} = |\tilde{v_0}|\,e^{i(\pi/2-\varphi)} = |\tilde{v_0}|\,e^{i\alpha} \qquad (8.145)$$

gdje je uveden kut α koji je označen na slici 8.21 kao komplementaran kutu φ.

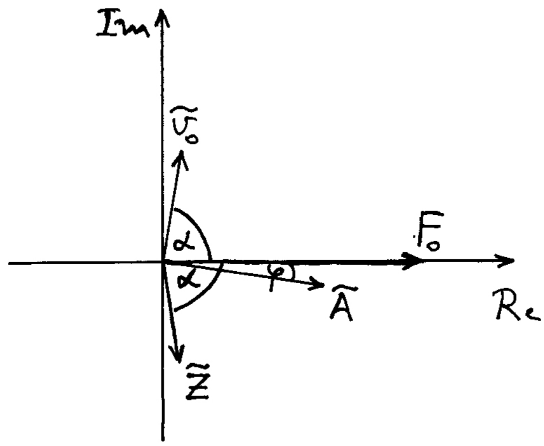
Možemo sada pristupiti određivanju kompleksne impedancije. Uvrštavanjem poznatih veličina u jednadžbu (8.142) nalazimo

$$F_0\,e^{i\omega t} = \tilde{Z}\,i\,\omega\,\tilde{A}\,e^{i\omega t} \qquad (8.146)$$

Vidimo da kompleksna impedancija ne ovisi o vremenu

$$\tilde{Z} = \frac{F_0}{i\,\omega\,\tilde{A}} \qquad (8.147)$$

Poslužimo li se izrazom za kompleksnu amplitudu iz jednadžbe (8.133), lako dobivamo



Slika 8.21: Vektor $\tilde{v_0}$ u kompleksnoj ravnini je okomit na kompleksnu amplitudu $\tilde{A}$. Impedancija $\tilde{Z}$ i brzina $\tilde{v_0}$ su simetrično položeni u odnosu na F_0.

$$\tilde{Z} = \frac{m}{\omega}\left[\frac{\omega}{\tau} - i\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right] = Z_a - i\,Z_d \qquad (8.148)$$

Kompleksna impedancija ima *apsorpcijsku* i *disperzijsku* komponentu.

Kompleksnu impedanciju možemo zapisati i u obliku

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}|\,e^{-i\alpha} \qquad (8.149)$$

Fazni kut je lako izračunati iz omjera imaginarnog i realnog dijela

$$tg\,\alpha = \frac{Z_d}{Z_a} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\frac{\omega}{\tau}} \qquad (8.150)$$

Ovaj nam rezultat pokazuje da je $tg\,\alpha = 1/tg\,\varphi$ prema jednadžbi (8.139). Dakle, kutovi α i φ su komplementarni, odnosno vrijedi $\alpha = \pi/2 - \varphi$. Radi se o istome kutu α kao i kod kompleksne brzine u jednadžbi (8.145). Konzistentnost ovoga rezultata možemo uvidjeti ako iz jednadžbe (8.142) napišemo

$$F_0 = |\tilde{Z}|\,e^{-i\alpha}\,|\tilde{v_0}|\,e^{i\alpha} = |\tilde{Z}|\,|\tilde{v_0}| \qquad (8.151)$$

Budući da je vektor $\tilde{v_0}$ zakrenut od realne osi u pozitivnom smislu za kut α, potrebno je množenje s kompleksnim vektorom koji ima faktor $exp(-i\alpha)$

da bi se povratio zakret na realnu os gdje je rezultat F_0 (slika 8.21).

Modul kompleksne impedancije možemo izračunati iz jednadžbe (8.148)

$$\begin{aligned} |\tilde{Z}| &= \sqrt{Z_a^2 + Z_d^2} \\ &= \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \\ &= \frac{m}{\tau}\sqrt{1 + tg^2\alpha} \end{aligned} \tag{8.152}$$

U rezonanciji ($\omega = \omega_0$) je $tg\,\alpha = 0$ prema jednadžbi (8.150), pa oscilator ima minimalnu impedanciju

$$Z_{rez} = \frac{m}{\tau} \tag{8.153}$$

Vidimo da oscilator koji ima veću masu i veće gušenje (manji τ) predstavlja veću impedanciju za vanjsku silu koja ga tjera. U rezonanciji je impedancija realna veličina, što znači da je brzina tijela u fazi s vanjskom silom.

U svim slučajevima izvan rezonancije, impedancija je po iznosu veća, te pored realne ima i imaginarnu komponentu. To znači da je brzina po iznosu manja, te nije u fazi s vanjskom silom.

Možemo na kraju primijeniti metodu kompleksnih brojeva na izračunavanje snage koja se troši u harmonijskom oscilatoru. Pritom moramo biti oprezni jer za bilo koja dva kompleksna broja postoji razlika u vremenskom usrednjavanju

$$\left\langle Re[\tilde{C}\,e^{i\omega t}\tilde{D}\,e^{i\omega t}]\right\rangle \neq \left\langle Re[\tilde{C}\,e^{i\omega t}]\,Re[\tilde{D}\,e^{i\omega t}]\right\rangle \tag{8.154}$$

U to se možemo lako uvjeriti ako kompleksne amplitude izrazimo u obliku

$$\tilde{C} = |\tilde{C}|e^{i\gamma} \quad , \quad \tilde{D} = |\tilde{D}|e^{i\delta} \tag{8.155}$$

te izračunamo lijevu stranu u nejednadžbi (8.154)

$$\begin{aligned} \left\langle Re[\tilde{C}\,e^{i\omega t}\tilde{D}\,e^{i\omega t}]\right\rangle &= |\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\left\langle Re[e^{i(2\omega t+\gamma+\delta)}]\right\rangle \\ &= |\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,\langle\cos(2\omega t+\gamma+\delta)\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.156}$$

U ovome izračunu imamo veličinu koja titra frekvencijom 2ω, pa srednja vrijednost u periodu T iščezava.

Sasvim drugi rezultat se dobiva za desnu stranu nejednadžbe (8.154)

$$\begin{aligned} &\left\langle Re[\tilde{C}\,e^{i\omega t}]\,Re[\tilde{D}\,e^{i\omega t}]\right\rangle \\ &= \left\langle Re[|\tilde{C}|\,e^{i(\omega t+\gamma)}]\,Re[|\tilde{D}|\,e^{i(\omega t+\delta)}]\right\rangle \\ &= |\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,\langle\cos(\omega t+\gamma)\,\cos(\omega t+\delta)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,|\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,\langle\cos(2\omega t+\gamma+\delta)+\cos(\gamma-\delta)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,|\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,\cos(\gamma-\delta) \end{aligned} \tag{8.157}$$

Prvi član koji titra frekvencijom 2ω iščezava kod usrednjavanja, dok drugi član ne sadrži vrijeme, tj. predstavlja konstantu. Uočimo da je $(\gamma - \delta)$ fazna razlika između vektora $\tilde{C}$ i $\tilde{D}$. Možemo pokazati da se isti rezultat dobiva kod izračunavanja izraza

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Re[\tilde{C}\,\tilde{D}^*] &= \frac{1}{2}Re[|\tilde{C}|\,e^{i\gamma}e^{i\omega t}|\tilde{D}|\,e^{-i\delta}e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\,|\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,Re[e^{i(\gamma-\delta)}] \\ &= \frac{1}{2}\,|\tilde{C}|\,|\tilde{D}|\,\cos(\gamma-\delta) \end{aligned} \tag{8.158}$$

Važno je da jedan od dvaju brojeva u produktu uzmemo u kompleksno konjugiranom obliku (oznaka $*$). Primijenimo ovaj postupak na izračun usrednjene snage u harmonijskom oscilatoru

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\,Re[\tilde{F}\,\tilde{v}^*] \tag{8.159}$$

Uvrstimo izraz za silu iz jednadžbe (8.142), te impedanciju rastavimo na realni i imaginarni dio kao u jednadžbi (8.148)

$$\begin{aligned} \langle P\rangle &= \frac{1}{2}\,Re[(Z_a - i\,Z_d)\,\tilde{v}\,\tilde{v}^*] \\ &= \frac{1}{2}\,Re[(Z_a - i\,Z_d)\,|\tilde{v_0}|^2] \\ &= \frac{1}{2}\,|\tilde{v_0}|^2 Z_a \end{aligned} \tag{8.160}$$

Želimo li povezati usrednjenu snagu s amplitudom, možemo se poslužiti jednadžbom (8.145)

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\,\omega^2\,|\tilde{A}|^2 Z_a \tag{8.161}$$

Usrednjena snaga ovisi o apsorpcijskoj komponenti impedancije.

Poglavlje 9

MEHANIKA FLUIDA

9.1 Statika fluida

9.2 Dinamika fluida

9.3 Napetost površine

Poglavlje 10

MEHANIKA SUNČEVA SUSTAVA

10.1 Razvoj modela kozmologije

10.2 Kopernikov sustav i Keplerovi zakoni

10.3 Primjena Newtonove mehanike

Poglavlje 11

RELATIVISTIČKA MEHANIKA

U drugom smo poglavlju upoznali klasičnu mehaniku utemeljenu na Newtonovim zakonima, a u četvrtom smo poglavlju detaljnije upoznali relativnost gibanja iskazanu putem Galileijevih transformacija između dva inercijalna sustava. Sva opažanja koja su mogla biti provedena na tijelima u gibanju brzinama mnogo manjim od brzine svjetlosti pokazivala su izvrsno slaganje s računima klasične mehanike.

Međutim, krajem 19. stoljeća eksperimentalno je utvrđeno da brzina svjetlosti ne podliježe Galileijevim transformacijama, nego je naprotiv jednaka u svim inercijalnim sustavima. Valjalo je stoga načiniti značajnu reviziju klasične fizike kako bi se nova teorija uskladila sa svim eksperimentalnim opažanjima. Albert Einstein je početkom 20. stoljeća postavio uspješnu teoriju relativnosti koja obuhvaća i klasičnu fiziku kao dobru aproksimaciju kod brzina koje su mnogo manje od brzine svjetlosti.

U ovome ćemo poglavlju obraditi osnove relativističke mehanike i time zaključiti program cjelovitog prikaza mehanike kojoj je posvećena ova knjiga. Relativističke pojave u elektrodinamici bit će predmet druge knjige.

11.1 Brzina svjetlosti i Einsteinovi postulati

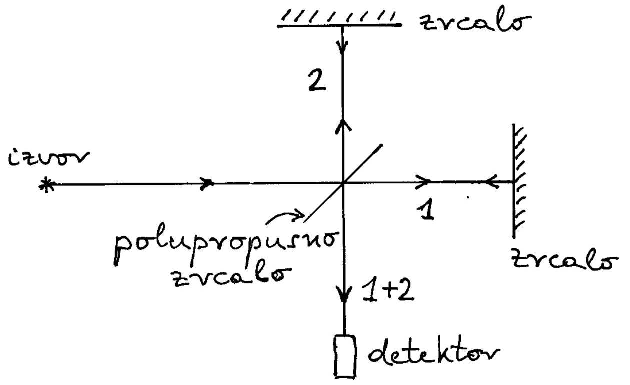
Od davnina se postavljalo pitanje o pojavi svjetlosti, te posebno o tome širi li se svjetlost od izvora do opažača trenutno, ili nekom brzinom, možda jako velikom, ali ipak konačnom.

Prvo mjerenje brzine svjetlosti obavio je Roemer u 17. stoljeću na temelju astronomskih opažanja. Njegov je rezultat iznosio $2,14\,10^8 \mathrm{ms}^{-1}$, čime je u ono doba ispravno utvrđen ne samo red veličine za brzinu svjetlosti, nego i vrijednost koja se od ispravne razlikuje za faktor manji od dva.

Prvo terestričko mjerenje brzine svjetlosti obavili su francuski fizičari Fizeau i Foucault sredinom 19. stoljeća. Iz udaljenosti među postavljenim zrcalima i vremena potrebnog da zraka svjetlosti prevali zadani put, izračunali su da brzina svjetlosti iznosi $2,98\,10^8 \mathrm{ms}^{-1}$, što je veoma blizu točnoj vrijednosti.

No, postavilo se pitanje koje značenje ima brzina svjetlosti ako promatranja možemo vršiti u raznim referentnim sustavima. U mehanici je odavna bio utvrđen princip relativnosti gibanja, kojim se podrazumijevalo da o brzini tijela nema smisla govoriti ukoliko se ne utvrdi referentni sustav u odnosu na koji se ta brzina određuje. Za svjetlost se mogla očekivati ista zakonitost, ali to nije bilo lako eksperimentalno utvrditi zbog velike brzine svjetlosti napram brzinama raspoloživih referentnih sustava.

Rješenje je došlo iz glasovitog eksperimenta koji su Michelson i Morley izveli 1887. godine. Oni su iskoristili činjenicu da, zbog rotacije Zemlje oko vlastite osi i njena gibanja oko Sunca, svaka točka na površini Zemlje ima neku trenutnu brzinu. Pomoću interferometra prikazanog na slici 11.1 osmislili su mogućnost usporedbe brzine svjetlosti duž smjera gibanja aparature (zraka 1) i okomito na taj smjer (zraka 2). Na detektor dolazi superpozicija dviju zraka koje stvaraju interferenciju. Kada se interferometar zakrene za 90^o, zamijene se uloge dviju zraka u odnosu na smjer gibanja aparature. Michelson i Morley su ustanovili da se zakretanjem interferometra nije promijenila interferencija na detektoru, što je značilo da brzina svjetlosti ima jednak iznos u referentnom sustavu koji se giba duž smjera zrake svjetlosti kao i u referentnom sustavu koji se giba okomito na smjer zrake svjetlosti. Bio je to iznenađujući rezultat koji je potpuno odudarao od poznatih Galileijevih tran-



Slika 11.1: Michelsonov i Morleyev interferometar. Na detektoru se opaža interferencija dviju zraka nakon njihovih refleksija na zrcalima. Pretpostavljeno gibanje interferometra (postavljenog na Zemlji) je u smjeru izvora svjetlosti. Interferometar se može zakrenuti za 90^o tako da svjetlost dolazi iz nekog drugog izvora okomito na smjer gibanja interferometra.

sformacija za brzine. Pokazalo se da je brzina svjetlosti jednaka u svim inercijalnim sustavima, tj. da predstavlja univerzalnu prirodnu konstantu.

Rezultat Michelsona i Morleya značio je ujedno da ne postoji neki "preferirani" ili "glavni" inercijalni sustav u Svemiru. Zaključilo se da su svi inercijalni sustavi jednakopravni, barem što se svjetlosti tiče.

Albert Einstein je 1905. godine generalizirao gornju tvrdnju kao valjanu za promatranje svih ostalih fizikalnih procesa, a ne samo svjetlosti. On je izgradio novu teoriju relativnosti koja počiva na dva postulata.

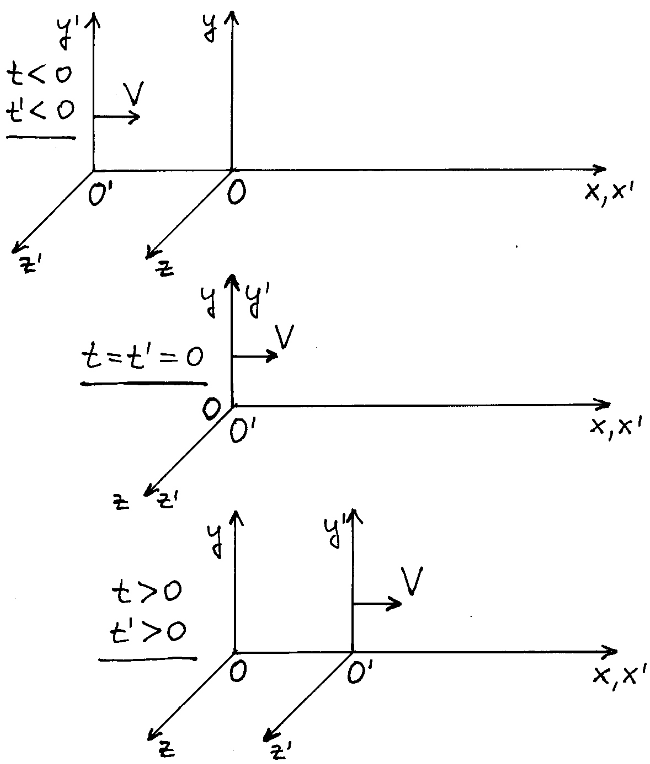
Prvi Einsteinov postulat: *Svi fizikalni zakoni vrijede jednako u svim inercijalnim sustavima.*

Drugi Einsteinov postulat: *Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijalnim sustavima.*

Ovi se postulati odnose na posebnu (specijalnu) teoriju relativnosti koja obrađuje pojave u inercijalnim sustavima. Za razmatranje pojava u neinercijalnim sustavima, Einstein je kasnije uveo opću teoriju relativnosti.

11.2 Lorentzove transformacije

Pokušajmo odrediti jednadžbe za transformaciju kinematičkih veličina iz jednog inercijalnog sustava u drugi s time da budu zadovoljeni Einsteinovi postulati. U tu je svrhu na slici 11.2 prikazan jednostavan slučaj dvaju sustava S i S' kojima se osi x i x' poklapaju, a osi y i y' su paralelne, te isto tako i osi z i z'. Sustav S' giba se relativnom brzinom V u smjeru osi x. Radi jednostavnosti, računajmo vrijeme u odnosu na trenutak kada se sustavi poklope, tj. taj trenutak proglasimo za $t = t' = 0$.



Slika 11.2: U odnosu na inercijalni referentni sustav S, postavljen je drugi inercijalni sustav S' koji se giba relativnom brzinom V duž osi x. Dva se sustava podudaraju u odabranom trenutku $t = t' = 0$.

Razmatrat ćemo najprije transformacije koordinata događaja, a potom trensformacije brzina i akceleracija iz jednog inercijalnog sustava u drugi.

11.2.1 Transformacije koordinata događaja

Koordinate nekog događaja su uvijek relativne, tj. moramo prvo odabrati neki događaj u odnosu na kojega ćemo potom utvrđivati koordinate drugih događaja. Zgodno je kao osnovni događaj odabrati poklapanje ishodišta O i O' u $t = t' = 0$. Uzmimo da se drugi događaj ostvario u točki A. Moramo sada vidjeti kako promatrači u dvama sustavima utvrđuju mjesto i vrijeme tog drugog događaja.

Za promatrača u sustavu S, događaj se zbio na udaljenosti x od ishodišta O u trenutku t, tj. za promatrača u sustavu S protekao je interval vremena t od trenutka preklopa dvaju sustava do događaja u točki A.

Za promatrača u sustavu S', *isti* se događaj zbio na udaljenosti x' od ishodišta O' u trenutku t', tj. za njega je od preklopa dvaju sustava pa do događaja u točki A protekao interval vremena t'.

Želimo naći jednadžbe transformacije koje povezuju veličine (x, t) s veličinama (x', t'). Ako ih nađemo, možemo ih iskoristiti tako da u slučaju kada su nam poznate veličine (x, t), koje označavaju mjesto i vrijeme nekog događaja kako ga vidi promatrač u sustavu S, možemo izračunati veličine (x', t') koje označavaju mjesto i vrijeme *istog* događaja kako ga vidi promatrač u sustavu S'.

Također želimo da tražene jednadžbe transformacije zadovoljavaju uvjet o jednakosti brzine svjetlosti u oba referentna sustava. U tu svrhu povežimo dva događaja svjetlosnim signalom. Neka je npr. u trenutku $t = t' = 0$ bljesnula iskra na mjestu gdje su se poklopila ishodišta O i O'. Neka drugi događaj bude dolazak svjetlosnog signala u točku A.

Isprobajmo najprije Galileijeve transformacije. Ako su nam poznate veličine (x, t), mogli bismo izračunati veličine (x', t') putem jednadžbi

$$x' = x - Vt \tag{11.1}$$

$$t' = t \tag{11.2}$$

Lako je provjeriti da Galileijeve transformacije ne udovoljavaju zahtjevu o jednakosti brzine svjetlosti u dvama referentnim sustavima. Naime, za promatrača u sustavu S svjetlosni signal je prevalio put x u vremenu t, pa je za njega brzina svjetlosti

$$\frac{x}{t} = c \tag{11.3}$$

Isti svjetlosni signal je za promatrača u sustavu S' prevalio put x' u vremenu t', pa je za njega taj signal putovao brzinom

$$\frac{x'}{t'} = c' \tag{11.4}$$

Ako se ove relacije uvrste u Galileijevu transformaciju (11.1), dobivamo

$$c' t' = c t - V t \tag{11.5}$$

Uvažavajući još i drugu Galileijevu transformaciju (11.2), po kojoj vrijeme teče jednako u oba inercijalna sustava, nalazimo rezultat

$$c' = c - V \tag{11.6}$$

Vidimo da Galileijeve transformacije nisu prihvatljive jer predviđaju da bi promatrači u dva inercijalna sustava opažali različite brzine istoga svjetlosnog signala.

Otvorimo mogućnost općenitih linearnih transformacija kojima iz poznatih veličina (x, t) nekog događaja u sustavu S izračunavamo veličine (x', t') istoga događaja viđenog u sustavu S'

$$x' = \gamma x + \delta t \tag{11.7}$$

$$t' = \epsilon x + \eta t \tag{11.8}$$

Ovdje su γ, δ, ϵ i η neke konstante koje tek trebamo odrediti uvažavajući postulate posebne teorije relativnosti.

Napomena: Očito je da bi se ove općenite linearne transformacije svele na Galileijeve kada bismo za konstante načinili izbor $\gamma = 1$, $\delta = -V$, $\epsilon = 0$ i $\eta = 1$. No to bi bio, kako smo vidjeli, pogrešan izbor.

Razlog za odabir linearnih transformacija, a ne kvadratičnih ili nekih drugih nelinearnih formi, lako je obrazložiti fizikalnim zahtjevima. Naime, postavimo li točku A na dvostruko veću udaljenost $2x$ u sustavu S, očekujemo da će svjetlosni signal stići u nju za dvostruko veće vrijeme $2t$. Isto tako očekujemo da ćemo i u sustavu S' imati udvostručenje na $2x'$ i $2t'$, a to nam osiguravaju linearne transformacije.

Prije nego li primijenimo Einsteinove postulate, možemo ustanoviti da sve četiri konstante γ, δ, ϵ i η ipak nisu međusobno neovisne.

Razmotrimo najprije jednadžbe gibanja ishodišta O' gledano iz dvaju sustava. U sustavu S, položaj ishodišta O' u proizvoljno odabranom trenutku t, dan je izrazom

$$x = V\,t \tag{11.9}$$

U sustavu S', ishodište O' trajno miruje

$$x' = 0 \tag{11.10}$$

Uvrstimo li ove koordinate u linearnu transformaciju (11.7), dobivamo

$$0 = \gamma\,V\,t + \delta\,t \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = -\gamma\,V \tag{11.11}$$

Dakle, razmatrajući jednadžbu gibanja za O' dobili smo da konstanta δ nije neovisna o γ, pa je možemo eliminirati iz linearne transformacije tako da pišemo

$$x' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.12}$$

Ova bi se relacija svela na Galileijevu kada bismo stavili $\gamma = 1$, no to bi bilo pogrešno. Možemo odmah zaključiti da konstanta γ ne smije biti jednaka jedinici, ali pravu vrijednost tek trebamo odrediti.

Razmotrimo sada i jednadžbe gibanja za ishodište O gledano u svakom od dvaju sustava. U sustavu S ishodište O trajno miruje

$$x = 0 \tag{11.13}$$

Za promatrača u sustavu S' cijeli sustav S se giba brzinom $-V$, pa je položaj ishodišta O u proizvoljnom trenutku t' dan izrazom

$$x' = -V\,t' \tag{11.14}$$

Napomena: Promatrač iz sustava S' uvijek mjeri vrijeme t' (a ne t).

Uvrstimo li gornje koordinate u linearne transformacije (11.12) i (11.8), dobivamo

$$-V\,t' = -\gamma\,V\,t \tag{11.15}$$

$$t' = \eta\,t \tag{11.16}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi jednakost

$$\eta = \gamma \tag{11.17}$$

Dakle, razmatrajući jednadžbe gibanja za O, utvrdili smo da ni konstanta η nije neovisna o γ. Preostale su nam dvije neovisne konstante tako da jednadžbe transformacije možemo pisati u obliku

$$x' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.18}$$

$$t' = \epsilon\,x + \gamma\,t \tag{11.19}$$

Moramo sada odrediti preostale dvije konstante ϵ i γ koristeći se dvama Einsteinovim postulatima za posebnu teoriju relativnosti. Krenimo od drugog postulata koji utvrđuje jednakost brzine svjetlosti u svim inercijalnim sustavima. Dakle, promatrač u sustavu S utvrđuje dolazak svjetlosnog signala u točku A, te izračunava brzinu svjetlosti c putem jednadžbe

$$\frac{x}{t} = c \qquad \Longrightarrow \qquad x = c\,t \tag{11.20}$$

No, i promatrač u sustavu S' opaža isti svjetlosni signal i njegov dolazak u točku A, ali izračun izvodi pomoću svojih mjerenja i dobiva opet brzinu c

$$\frac{x'}{t'} = c \qquad \Longrightarrow \qquad x' = c\,t' \tag{11.21}$$

Uvrštavanjem ovih rezultata u linearne transformacije (11.18) i (11.19) dobivamo

$$c\,t' = \gamma\,(c\,t - V\,t) \tag{11.22}$$

$$t' = \epsilon\,c\,t + \gamma\,t \tag{11.23}$$

Uvrštavanjem t' iz druge jednadžbe u prvu i sređivanjem nalazimo odnos

$$\epsilon = -\gamma\,\frac{V}{c^2} \tag{11.24}$$

Tako smo zahtjevom za jednakošću brzine svjetlosti u oba sustava eliminirali i konstantu ϵ kao neovisnu, te linearne transformacije pišemo sada u obliku

$$x' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.25}$$

$$t' = \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x) \tag{11.26}$$

Preostalu konstantu γ možemo odrediti iz prvoga Einsteinova postulata koji utvrđuje da su svi inercijalni sustavi ekvivalentni tako da svi fizikalni zakoni imaju isti oblik kada se iskazuju putem veličina koje odgovaraju tome sustavu. To se mora odnositi i na

jednadžbe transformacije koje smo gore dobili. One transformiraju veličine iz sustava S u sustav S', pa isti oblik moraju imati i jednadžbe transformacije iz sustava S' u S, ali uz zamjenu $V \to -V$ jer se S giba brzinom $-V$ prema S'. Pišemo, dakle

$$x = \gamma\,(x' + V\,t') \tag{11.27}$$

Uvrstimo li u ovu jednadžbu veličine x' i t' iz (11.25) i (11.26) dobivamo

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left[\gamma\,(x - V\,t) + V\,\gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x)\right] \\ &= \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\,x \end{aligned} \tag{11.28}$$

Da bi ovaj rezultat bio konzistentan, mora biti ispunjen uvjet

$$\gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{11.29}$$

Dobili smo konstantu γ koja igra veoma važnu ulogu u jednadžbama relativističke fizike, te ćemo je često upotrebljavati u ovome poglavlju. Ona ovisi samo o omjeru relativne brzine V dvaju inercijalnih sustava i brzine svjetlosti c. Moramo zapaziti da je uvijek $\gamma \geq 1$. U slučajevima kada je $V \ll c$, imamo $\gamma \cong 1$ (nerelativistička aproksimacija).

Do sada smo radi jednostavnosti razmatrali samo događaje na osi x (odnosno x'). U općenitom slučaju, mjesto i vrijeme događaja opisani su veličinama (x, y, z, t) za promatrača u sustavu S, te veličinama (x', y', z', t') za promatrača u sustavu S'. Međutim, relativno gibanje dvaju sustava duž osi x (odnosno x') nema utjecaja na položaj duž poprečnih osi, pa potpune *Lorentzove transformacije* glase

$$x' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.30}$$

$$y' = y \tag{11.31}$$

$$z' = z \tag{11.32}$$

$$t' = \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x) \tag{11.33}$$

Razumije se, relativistička konstanta γ dana je izrazom (11.29).

Opću usklađenost Lorentzovih transformacija s Einsteinovim postulatima možemo lako provjeriti tako što umjesto točke A na osi x (odnosno x'), odaberemo neku proizvoljnu točku P do koje dođe svjetlosni signal koji je krenuo od iskre iz ishodišta kada su ona bila poklopljena. U sustavu S svjetlosni signal prevali put r u vremenu t tako da je ispunjen uvjet $r = c\,t$, odnosno

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,t^2 \tag{11.34}$$

Za promatrača u sustavu S' isti svjetlosni signal, stigavši u istu odabranu točku, prevali put r' nakon vremena t' s time da je ispunjen uvjet $r' = c\,t'$, odnosno

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2\,t'^2 \tag{11.35}$$

Lako se možemo uvjeriti da uvrštavanjem Lorentzovih transformacija iz jednadžbi (11.30)-(11.33) u jednadžbu (11.35) dobivamo upravo odnos koji je zapisan u jednadžbi (11.34). To vrijedi za bilo koju vrijednost relativističke konstante γ, dakle za bilo koju vrijednost relativne brzine V jednog sustava prema drugome.

Gornje razmatranje zaslužuje još jedan komentar. Promatrač u sustavu S može reći da se svjetlost od upaljene iskre proširila do sfere radijusa r oko njegova ishodišta O nakon isteka vremenskog intervala t. Promatrač u sustavu S' opaža pak da se ista svjetlost proširila do sfere radijusa r' i to oko njegova ishodišta O', a nakon isteka vremenskog intervala t'.

Sve ovo zvuči kao paradoks, no moramo prihvatiti da eksperimentalno utvrđena jednakost brzine svjetlosti u raznim inercijalnim sustavima mijenja naše svakidašnje pojmove o prostoru i vremenu kao odvojenim veličinama, te ideje o apsolutnom prostoru i apsolutnom vremenu. Lorentzove transformacije izravno spajaju prostorne i vremenske koordinate tako da moramo razmišljati u okviru prostor-vrijeme i to za svaki inercijalni sustav zasebno. Događaj, koji se za promatrača u sustavu S dogodio na nekoj udaljenosti od njegova ishodišta O u nekome trenutku t, dogodio se za drugog promatrača u sustavu S' na nekoj drugoj udaljenosti od njegova ishodišta O', ali i u nekome drugom trenutku t'. To vrijedi za svaki dolazak svjetlosnog signala u neku od točaka na sferi oko O, kako to vidi promatrač u sustavu S. Svaki od tih događaja dogodio se za promatrača u sustavu S' na nekoj

novoj udaljenosti od njegova ishodišta O', te u nekome trenutku t' koji se razlikuje od t.

Sva dosadašnja razmatranja bazirali smo na događajima koji se sastoje od dolaska svjetlosnog signala iz ishodišta u neku točku nakon nekog vremenskog intervala. Međutim, veličine (x, t) mogu se odnositi na bilo koji događaj. Naprosto, promatrač u sustavu S opazi na udaljenosti x od svog ishodišta O da se u nekome trenutku t dogodio neki događaj. Sigurno i promatrač u sustavu S' može opaziti isti događaj, no pitanje je jesu li vrijednosti (x', t') koje taj promatrač izmjeri takve da ih se može povezati s veličinama (x, t) putem Lorentzovih transformacija (11.25) i (11.26).

Odgovor na postavljeno pitanje je potvrdan. U to se možemo jednostavno uvjeriti na sljedeći način. Odaberimo proizvoljno koordinatu x kao mjesto nekog događaja, te vrijeme t kada se događaj dogodio, a ono može biti npr. puno veće nego što je potrebno da svjetlosni signal dođe iz ishodišta O do položaja x. Možemo zamisliti da je kroz to vrijeme svjetlosni signal putovao od ishodišta O do nekog udaljenog položaja x_1 za vrijeme t_1, te se na tome mjestu reflektirao na zrcalu i zatim putovao natrag u trajanju t_2 do mjesta x. Tako se konačni događaj dogodio u trenutku $t = t_1 + t_2$. Sigurno mora biti $x_1 = c\,t_1$, te $x_1 - x = x_2 = c\,t_2$. Sada možemo primijeniti Lorentzove transformacije na zamišljene međukorake. Dolazak svjetlosti do zrcala ostvario se za promatrača u sustavu S' na položaju

$$x'_1 = \gamma\,(x_1 - V\,t_1) \tag{11.36}$$

u trenutku

$$t'_1 = \gamma\,(t_1 - \frac{V}{c^2}\,x_1) \tag{11.37}$$

Razmatrajući put svjetlosti nakon refleksije na zrcalu, uviđamo da se taj proces odvija analogno kretanju svjetlosnog signala iz ishodišta prema negativnom smjeru osi x dok ne stigne na položaj $-x_2$ nakon isteka vremenskog intervala t_2. Za promatrača u sustavu S', taj bi položaj bio

$$-x'_2 = \gamma\,(-x_2 - V\,t_2) \tag{11.38}$$

a trenutak bi bio

$$t'_2 = \gamma\left[t_2 - \frac{V}{c^2}\,(-x_2)\right] \tag{11.39}$$

Zbrajajući jednadžbe (11.36) i (11.38) dobivamo

$$x'_1 - x'_2 = \gamma\,[(x_1 - x_2) - V\,(t_1 + t_2)] \tag{11.40}$$

Napomena: Moramo uočiti da u jednadžbi (11.38) nije zamijenjeno $t_2 \to -t_2$, tj. vrijeme teče u pozitivnom smislu, samo je zamijenjeno $x_2 \to -x_2$ jer opisujemo proces širenja svjetlosti duž negativnog smjera osi x. Stoga se u jednadžbi (11.40) pojavljuje $(x_1 - x_2)$, ali $(t_1 + t_2)$.

Zbrojimo još jednadžbe (11.37) i (11.39) tako da pišemo

$$t'_1 + t'_2 = \gamma\,[(t_1 + t_2) - V\,(x_1 - x_2)] \tag{11.41}$$

Možemo sada identificirati u sustavu S veličine $x = x_1 - x_2$ i $t = t_1 + t_2$ kao položaj i vrijeme utvrđenog događaja, te analogno veličine $x' = x'_1 - x'_2$ i $t' = t'_1 + t'_2$ kao položaj i vrijeme istoga događaja u sustavu S'. Jednadžbe (11.40) i (11.41) svode se upravo na Lorentzove transformacije

$$x' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.42}$$

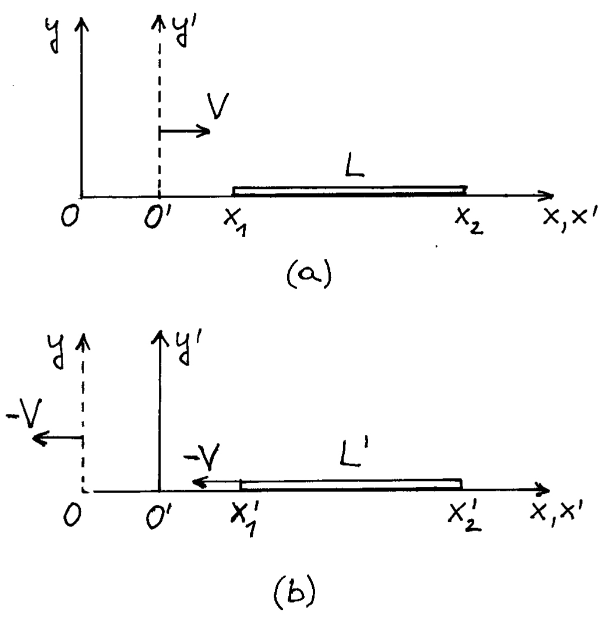
$$t' = \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x) \tag{11.43}$$

Pokazali smo, dakle, da Lorentzove transformacije vrijede univerzalno za bilo koji događaj. One povezuju koordinate istog događaja u dva inercijalna sustava.

Neke primjene Lorentzovih transformacija

Među najzanimljivijim primjenama Lorentzovih transformacija navest ćemo fenomen koji je dobio naziv *kontrakcija dužine* i fenomen *dilatacije vremena*. Pravilno tumačenje tih fenomena pomaže u razumijevanju naravi teorije relativnosti.

Kontrakcija dužine. Zamislimo štap koji miruje položen duž osi x sustava S. Promatrač u tome sustavu može utvrditi duljinu štapa tako da izmjeri položaje njegovih krajeva kao x_1 i x_2, pa je $L = x_2 - x_1$. To mjerenje moramo shvatiti kao dva događaja u sustavu S. Naime, promatrač u sustavu S utvrđuje da se jedan kraj štapa nalazio na položaju x_1 u trenutku t_1, što je događaj s koordinatama (x_1, t_1), a drugi je kraj štapa bio na



Slika 11.3: (a) U referentnom sustavu S, štap miruje i promatrač utvrđuje njegovu duljinu L. Mjerenja položaja njegovih krajeva ne moraju se izvesti istodobno. (b) U referentnom sustavu S' štap se giba brzinom $-V$. Promatrač u tome sustavu mora istodobno utvrditi položaje oba kraja štapa. Po njegovoj izmjeri, štap ima duljinu L'.

položaju x_2 u trenutku t_2, što je događaj s koordinatama (x_2, t_2). Pri tome, trenutak t_1 ne mora biti isti kao i t_2 jer štap ionako miruje u sustavu S, pa je jedan njegov kraj uvijek na položaju x_1, a drugi je uvijek na položaju x_2, tako da trenuci utvrđivanja tih položaja nisu bitni za ishod mjerenja. Prikaz štapa koji miruje u sustavu S dan je na slici 11.3a.

Postavlja se pitanje kako će promatrač u sustavu S' izmjeriti duljinu istoga štapa koji se za njega kreće brzinom $-V$. Prikaz se nalazi na slici 11.3b. Da bi mjerenje koje izvodi taj promatrač bilo ispravno, mora on položaje oba kraja štapa odrediti *istodobno*. Dakle, on će utvrditi dva događaja s koordinatama (x'_1, t') i (x'_2, t'), gdje je t' neki proizvoljno odabrani trenutak, zajednički za oba događaja. Za promatrača u sustavu S', štap će imati duljinu $L' = x'_2 - x'_1$.

Da bismo mogli usporediti rezultate mjerenja dvaju promatrača moramo zamisliti da se oba mjerenja zapravo zasnivaju na utvrđivanju jednog te istog para događaja na krajevima štapa s time da svaki promatrač utvrđuje koordinate tih događaja na svoj način. Za događaj na jednome kraju štapa vrijede Lorentzove transformacije

$$x_1 = \gamma\,(x'_1 + V\,t') \tag{11.44}$$

$$t_1 = \gamma\,(t' + \frac{V}{c^2}\,x'_1) \tag{11.45}$$

Ovdje smo primijenili transformacije iz sustava S' u sustav S, koji se u odnosu na S' giba brzinom $-V$. Stoga u zagradama stoji $+$, a ne $-$ kao u jednadžbama (11.42) i (11.43).

I za događaj na drugome kraju štapa možemo upotrijebiti Lorentzove transformacije

$$x_2 = \gamma\,(x'_2 + V\,t') \tag{11.46}$$

$$t_2 = \gamma\,(t' + \frac{V}{c^2}\,x'_2) \tag{11.47}$$

Primjenjujući Lorentzove transformacije, uvaženo je da događaji u sustavu S' moraju biti istodobni (jedan trenutak t'), dok se u sustavu S ti događaji mogu dogoditi u različitim trenucima budući da štap u tome sustavu miruje. Upravo jednadžbe (11.45) i (11.47) pokazuju da istome trenutku t' odgovaraju dva različita trenutka t_1 i t_2, koja ovise o dva različita položaja x'_1 i x'_2.

Sada možemo izračunati iz jednadžbi (11.44) i (11.46)

$$x_2 - x_1 = \gamma\,(x'_2 - x'_1) \tag{11.48}$$

Prema tome, ako promatrač u sustavu S izmjeri duljinu L štapa koji miruje, promatrač u sustavu S' izmjerit će duljinu istoga štapa

$$L' = \frac{L}{\gamma} \tag{11.49}$$

Najveću duljinu štapa mjeri promatrač u sustavu u kojemu taj štap miruje. Kažemo da je to *vlastita duljina* štapa. U svim sustavima u kojima se štap uzdužno giba, promatrač mjeri neku manju duljinu štapa, pa je taj fenomen nazvan kontrakcijom štapa u gibanju. Što se štap giba brže, to je njegova duljina za promatrača kraća.

Dilatacija vremena. Razmotrimo sada malo detaljnije kako se određuje vremenski interval između dva događaja. Neka su se u sustavu S

dva događaja dogodila na *istome* mjestu, ali u različitim vremenskim trenucima, tako da su koordinati tih događaja (x, t_1) i (x, t_2). Za promatrača u tome sustavu, između dva događaja protekao je interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$. Ako te iste događaje opaža promatrač u sustavu S', za njega se oni nisu dogodili na istome položaju u odnosu na njegovo ishodište, a i vremenski trenuci su drugačiji. Za prvi događaj vrijedi

$$x'_1 = \gamma\,(x - V\,t_1) \qquad (11.50)$$

$$t'_1 = \gamma\,(t_1 - \frac{V}{c^2}\,x) \qquad (11.51)$$

a za drugi događaj

$$x'_2 = \gamma\,(x - V\,t_2) \qquad (11.52)$$

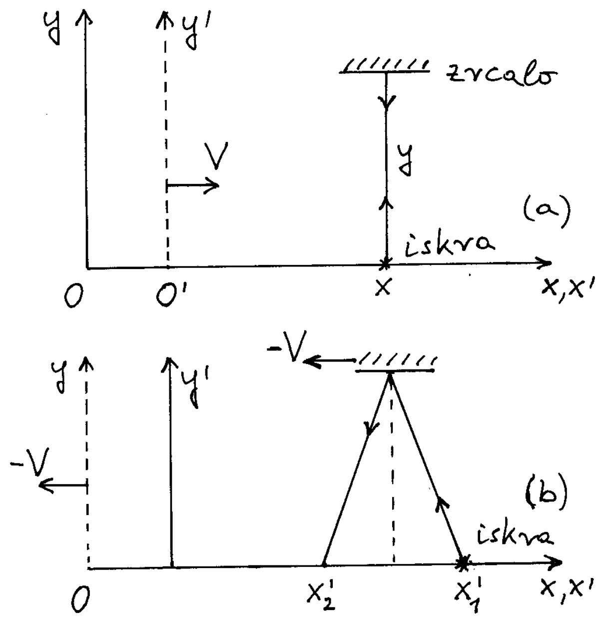
$$t'_2 = \gamma\,(t_2 - \frac{V}{c^2}\,x) \qquad (11.53)$$

Položaji događaja u sustavu S' ovise o vremenskim trenucima t_1 i t_2 kako ukazuju jednadžbe (11.50) i (11.52). Interval vremena između događaja lako izračunavamo iz jednadžbi (11.51) i (11.53)

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\,(t_2 - t_1) = \gamma\,\Delta t \qquad (11.54)$$

Dakle, najkraći interval vremena između dva događaja mjeri onaj promatrač za kojega su se ta dva događaja dogodila na istome mjestu. Taj se interval često naziva *vlastiti interval* dvaju događaja. Za promatrače u drugim inercijalnim sustavima u kojima su se ti događaji dogodili na različitim položajima, vremenski interval između tih događaja je dulji. Razumije se, što je razmak između položaja veći, to je zabilježeni interval vremena između događaja dulji. Taj je fenomen nazvan *dilatacijom* vremena.

Zgodno je fenomen dilatacije vremena ilustrirati jednim primjerom. Na slici 11.4a prikazan je nastanak iskre u trenutku t_1 na položaju x u sustavu S. Promatramo zraku svjetlosti koja se širi duž osi y i nailazi na postavljeno zrcalo, te se na njemu reflektira i vrati se u trenutku t_2 na isto mjesto gdje je bila bljesnula iskra. Polazak i povratak svjetlosnog signala u sustavu S predstavljaju dva događaja koja su se dogodila na istom položaju, a između njih je protekao vremenski interval



Slika 11.4: (a) U sustavu S svjetlosni signal se nakon vremenskog intervala Δt vrati na isto mjesto odakle je krenuo. (b) U sustavu S' isti se fizikalni proces vidi tako da je svjetlosni signal krenuo iz jednog mjesta x'_1, te je nakon vremenskog intervala $\Delta t'$ stigao na drugo mjesto x'_2.

$$\Delta t = \frac{2\,y}{c} \qquad (11.55)$$

Promatrač u sustavu S' opaža ista dva događaja na način prikazan na slici 11.4b. Zrcalo na visini y kreće se brzinom $-V$ tako da i svjetlosni signal putuje od mjesta x'_1 gdje je bljesnula iskra do mjesta gdje će se naći zrcalo nakon vremenskog intervala $\Delta t'/2$, a nakon refleksije putuje do mjesta x'_2, također za vremenski interval $\Delta t'/2$. U tome trenutku, nalazi se i zrcalo iznad položaja x'_2, pa možemo da je

$$x'_1 - x'_2 = V\,\Delta t' \qquad (11.56)$$

Iz geometrijskih odnosa na slici 11.4b, te činjenice da se i u sustavu S' svjetlost širi brzinom c, slijedi

$$\left(\frac{x'_1 - x'_2}{2}\right)^2 + y^2 = c^2\,\left(\frac{\Delta t'}{2}\right)^2 \qquad (11.57)$$

Uvrštavajući jednadžbe (11.55) i (11.56) u jednadžbu (11.57) dobivamo nakon sređivanja

$$\Delta t\,' = \gamma\, \Delta t \tag{11.58}$$

To je isti rezultat kao u jednadžbi (11.54).

11.2.2 Transformacije brzina

Nakon što smo upoznali Lorentzove transformacije koje se odnose na mjesto i vrijeme događaja, možemo se sada zapitati kako se u relativističkoj fizici opisuje gibanje tijela. Krenimo od razmatranja brzine kao osnovne kinematičke veličine. Pretpostavimo da promatrač u inercijalnom sustavu S utvrdi da se neka čestica giba duž osi x brzinom v_x, te se pitamo koliku će brzinu v_x izmjeriti promatrač u $S\,'$ gledajući to isto gibanje.

Problem možemo ispravno riješiti ako ga svedemo na utvrđivanje dva događaja. Neka je prvi događaj nalaženje čestice na nekome položaju x u trenutku t, a drugi događaj nalaženje te čestice na položaju $x+\Delta x$ u trenutku $t+\Delta t$. Brzinu u sustavu S utvrđujemo na poznati način

$$v_x = \frac{(x+\Delta x) - x}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \frac{d\,x}{d\,t} \tag{11.59}$$

Ako se sada stavimo u ulogu promatrača u sustavu $S\,'$, nalazimo da se prvi događaj dogodio na položaju $x\,'$ u trenutku $t\,'$, a te su koordinate povezane s onima iz sustava S putem Lorentzovih transformacija

$$x\,' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.60}$$

$$t\,' = \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x) \tag{11.61}$$

Drugi se događaj za promatrača u sustavu $S\,'$ dogodio na položaju $x\,' + \Delta x\,'$ u trenutku $t\,' + \Delta t\,'$. I ove koordinate možemo putem Lorentzovih transformacija povezati s onima iz sustava S

$$x\,' + \Delta x\,' = \gamma\,[(x+\Delta x) - V\,(t+\Delta t)] \tag{11.62}$$

$$t\,' + \Delta t\,' = \gamma\,[(t+\Delta t) - \frac{V}{c^2}\,(t+\Delta t)] \tag{11.63}$$

Prema tome, promatrač u sustavu $S\,'$ može izračunati brzinu čestice

$$v\,'_x = \frac{(x\,' + \Delta x\,') - x\,'}{(t\,' + \Delta t\,') - t\,'}$$

$$= \frac{\gamma\,[(x+\Delta x) - V\,(t+\Delta t)] - \gamma\,(x - V\,t)}{\gamma\,[(t+\Delta t) - \frac{V}{c^2}\,(t+\Delta t)] - \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x)}$$

$$= \frac{\Delta x - V\,\Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2}\,\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}} \tag{11.64}$$

Konačan rezultat za transformaciju brzine glasi

$$v\,'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\,v_x} \tag{11.65}$$

Ova relacija je egzaktna za sve brzine v_x koje neka čestica može imati, te za bilo koju relativnu brzinu V između dva inercijalna sustava.

Kod brzina koje su mnogo manje od brzine svjetlosti ($v_x \ll c, V \ll c$), vidimo da se relacija (11.65) svodi jednostavno na Galileijev izraz $v\,'_x \approx v_x - V$. Dakle, u svim nerelativističkim slučajevima na koje smo navikli u svakodnevnom životu, vrijedi u dobroj aproksimaciji Galileijeva transformacija za brzine.

Zanimljivo je razmotriti drugi ekstrem u primjeni relacije (11.65). Uzmimo foton (kvant svjetlosti) kao česticu koja se giba brzinom c u sustavu S. Za promatrača u sustavu $S\,'$, brzina fotona je

$$v\,'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2}\,c} = c \tag{11.66}$$

Vidimo da relativistički izraz za transformaciju brzina daje očekivani rezultat i u slučaju fotona. Bez obzira na iznos relativne brzine V između dva inercijalna sustava, foton ima uvijek istu brzinu c. To je najzgodnija potvrda konzistentnosti izraza (11.65) s drugim postulatom posebne teorije relativnosti.

Razmotrimo sada općenitiji slučaj u kojem se čestica giba istodobno duž osi x i duž osi y, tako da za promatrača u sustavu S ona ima komponente brzine v_x i v_y. Pitanje je kolike su komponente brzine te čestice za promatrača u sustavu $S\,'$. Problem moramo opet rješavati pozivanjem na dva događaja. Prvi događaj predstavlja nalaženje čestice u sustavu S na položaju (x, y) u trenutku t. Za promatrača u sustavu $S\,'$, isti se događaj dogodio na položaju $(x\,', y\,')$ u trenutku $t\,'$

$$x\,' = \gamma\,(x - V\,t) \tag{11.67}$$

$$y\,' = y \tag{11.68}$$

$$t\,' = \gamma\,(t - \frac{V}{c^2}\,x) \tag{11.69}$$

Drugi događaj predstavlja nalaženje čestice na položaju $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ u trenutku $t+\Delta t$. Za promatrača u sustavu S', isti se događaj dogodio na položaju $(x'+\Delta x', y'+\Delta y')$ u trenutku $t'+\Delta t'$. Lorentzove transformacije nam daju

$$x' + \Delta x' = \gamma\left[(x+\Delta x) - V(t+\Delta t)\right] \quad (11.70)$$
$$y' + \Delta y' = y + \Delta y \quad (11.71)$$
$$t' + \Delta t' = \gamma\left[(t+\Delta t) - \frac{V}{c^2}(x+\Delta x)\right] \quad (11.72)$$

Možemo izračunati komponentu brzine duž osi x'. Postupak je identičan onome iz jednadžbe (11.64), pa je i rezultat kao u jednadžbi (11.65). Razlog leži u činjenici što x' i t' ne ovise o y.

Izračunajmo sada komponentu brzine duž osi y'

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{(y'+\Delta y') - y'}{(t'+\Delta t') - t'} \\ &= \frac{(y+\Delta y) - y}{\gamma\left[(t+\Delta t) - \frac{V}{c^2}(t+\Delta t)\right] - \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)} \\ &= \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)} \end{aligned} \quad (11.73)$$

Konačni rezultat glasi

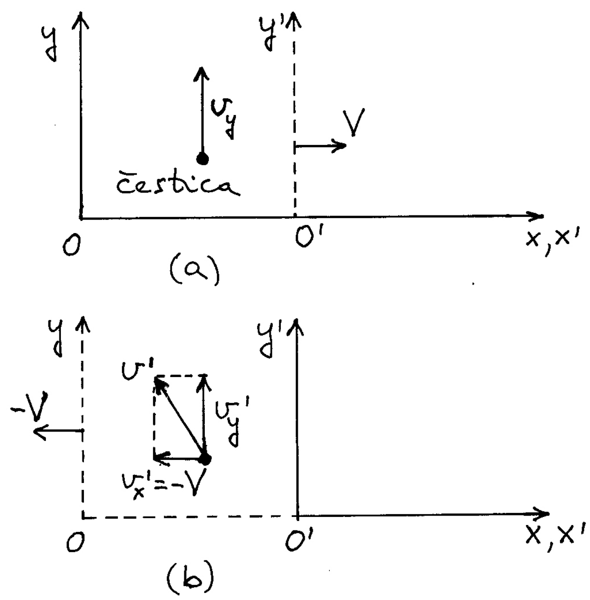
$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \quad (11.74)$$

Možemo uočiti da v'_y ovisi ne samo o v_y, nego i o v_x, a razlog leži u tome što t' ovisi o x. Da bismo kompletirali Lorentzove transformacije za brzine, navedimo još i slučaj kada postoji brzina čestice duž osi z. Iz simetrije problema uviđamo da se gibanje duž osi z ne razlikuje od onoga duž osi y jer su oba u ravnini okomitoj na os x duž koje postoji pretpostavljeno relativno gibanje dvaju inercijalnih sustava. Stoga vrijedi transformacija

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \quad (11.75)$$

Primjena na slučaj gibanja duž osi y

Neka se u sustavu S čestica giba samo duž osi y kako pokazuje slika 11.5a, tj. neka je $v_x = 0$, a $v_y \neq 0$. Budući da se sustav S giba brzinom $-V$



Slika 11.5: (a) U referentnom sustavu S čestica se giba duž osi y brzinom v_y. (b) Promatrač u sustavu S' opaža da ista čestica ima komponente brzine $v'_x = -V$ i v'_y, što daje ukupnu brzinu v'.

u odnosu na sustav S', onda i čestica mora imati brzinu $v'_x = -V$ za promatrača u sustavu S'. Uz to, čestica ima i neku brzinu v'_y kako prikazuje slika 11.5b.

Formalnom primjenom Lorentzovih transformacija za brzine, nalazimo

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} = -V \quad (11.76)$$
$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} = \frac{v_y}{\gamma} \quad (11.77)$$

Zbog $\gamma > 1$ dobivamo $v'_y < v_y$, tj. za promatrača u sustavu S' čestica ima manju komponentu brzine duž osi y'. Međutim, izračunavajući ukupnu brzinu čestice za promatrača u sustavu S'

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{V^2 + \frac{v_y^2}{\gamma^2}} \\ &= \sqrt{V^2 + v_y^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{v_y^2 + V^2\left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)} > v_y \tag{11.78}$$

nalazimo da promatrač u sustavu S' uvijek opaža veći iznos brzine čestice nego što to opaža promatrač u sustavu S.

Zanimljivo je na kraju provesti analizu za brzinu fotona u istim okolnostima. Ako se u sustavu S foton giba duž osi y, komponente negove brzine su $v_x = 0$ i $v_y = c$. Lorentzove transformacije za brzinu daju

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} = -V \tag{11.79}$$

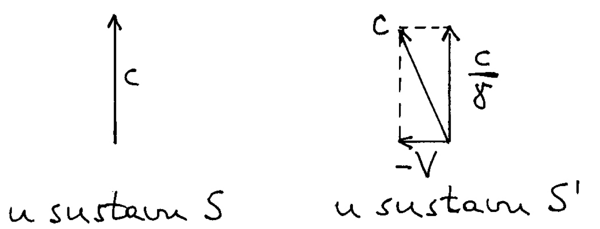
$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} = \frac{c}{\gamma} \tag{11.80}$$

Zbog $\gamma > 1$, komponenta brzine duž osi y' je umanjena ($v'_y < c$), ali je ukupni iznos brzine za promatrača u sustavu S'

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{V^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}}$$

$$= \sqrt{V^2 + c^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = c \tag{11.81}$$

Dobili smo opet očekivani rezultat u skladu s drugim postulatom posebne teorije relativnosti. Viđenje promatrača u dvama referentnim sustavima prikazano je na slici 11.6.



Slika 11.6: Brzine istog fotona viđene u dvama inercijalnim sustavima.

Izračunavanje transformacija brzine putem diferenciranja

Nakon što smo na elementaran način izveli izraze (11.65) i (11.74) za transformaciju brzina iz jednog inercijalnog sustava u drugi, te stekli pouzdanje kroz njihovu primjenu, možemo pokazati matematički elegantniji izvod putem diferenciranja.

Potražimo diferencijale u Lorentzovim transformacijama za položaj i vrijeme iz jednadžbi (11.30)-(11.33)

$$dx' = \gamma\,(dx - V\,dt) \tag{11.82}$$

$$dy' = dy \tag{11.83}$$

$$dz' = dz \tag{11.84}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}\,dx\right) \tag{11.85}$$

Uočimo da promjena dx' u jednadžbi (11.82) može nastati zbog promjene dx, ali i zbog promjene dt zbog toga što x' u jednadžbi (11.30) ovisi o dvije neovisne varijable x i t. Analogno zapažanje imamo i za dt'.

Brzine u sustavu S' je sada lako odrediti iz omjera diferencijala

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - \frac{V}{c^2}\,dx}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \tag{11.86}$$

Dobili smo isti rezultat kao u jednadžbi (11.65). Također lako nalazimo

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \tag{11.87}$$

što se podudara s rezultatom (11.74). Opet možemo primijetiti da ovisnost komponente v'_y o v_x dolazi od člana s dx u izrazu za dt'.

11.2.3 Transformacije akceleracija

U traženju izraza za transformacije akceleracija najlakše nam je primijeniti postupak diferenciranja. Tako iz izraza za v'_x dobivamo

$$dv'_x = \frac{dv_x \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right) - (v_x - V)\left(-\frac{V}{c^2}\, dv_x\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^2}\, dv_x \tag{11.88}$$

Diferencijal dt' iz jednadžbe (11.85) možemo napisati u obliku

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2}\, dx\right) = \gamma \left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) dt = \gamma \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right) dt \tag{11.89}$$

Iz omjera gornjih diferencijala dobivamo

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^3}\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^3}\, a_x \tag{11.90}$$

Pomalo neočekivano, akceleraciju a'_x u sustavu S' ne možemo dobiti poznavajući samo akceleraciju a_x u sustavu S, nego je potrebno poznavati i trenutnu brzinu v_x. O tome će još biti riječi kasnije kod razmatranja djelovanja sile.

Izračunajmo još diferencijal izraza za komponentu brzine v'_y

$$dv'_y = \frac{dv_y \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right) - v_y \left(-\frac{V}{c^2}\, dv_x\right)}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^2} \tag{11.91}$$

Uz to se koristimo izrazom za dt' iz jednadžbe (11.89), te dobivamo

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{\left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right) a_y + v_y \frac{V}{c^2}\, a_x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^3} \tag{11.92}$$

Komponentu akceleracije a'_y čestice u sustavu S' možemo dobiti ako poznajemo obje komponente akceleracije a_x i a_y u sustavu S, te obje komponente trenutne brzine v_x i v_y čestice u sustavu S.

U posebnom slučaju kada čestica u sustavu S kreće iz položaja mirovanja, tj. kada njena trenutna brzina iščezava ($v_x = 0\,,\ v_y = 0$), izrazi za transformacije akceleracija poprimaju jednostavnije oblike

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3} \tag{11.93}$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2} \tag{11.94}$$

Ovim ćemo se izrazima koristiti kasnije u razmatranju transformacija sile iz jednog inercijalnog sustava u drugi.

11.3 Relativistička dinamika

Nakon što smo utvrdili kakve posljedice stvara posebna teorija relativnosti na izraze za transformaciju kinematičkih veličina iz jednog inercijalnog sustava u drugi, možemo se zapitati kako se odvija dinamika u okvirima posebne teorije relativnosti. U traženju odgovora, moramo se čvrsto držati prvoga Einsteinova postulata prema kojemu svi prirodni zakoni moraju biti jednako valjani u svakome inercijalnom sustavu.

U klasičnoj (nerelativističkoj) mehanici imali smo drugi Newtonov zakon $d\vec{p} = \vec{F} dt$ kao temeljni zakon dinamike. Možemo se zapitati zadovoljava li taj zakon uvjet koji postavlja prvi Einsteinov postulat, tj. vidi li promatrač u sustavu S' isti fizikalni proces u obliku $d\vec{p}\,' = \vec{F}\,' dt'$. Da bismo to mogli provjeriti, morali bismo prethodno poznavati izraze za transformacije pojedinih veličina iz jednog sustava u drugi. No poznata nam je jedino transformacija za vrijeme, dok nam odgovarajuće transformacije za dinamičke veličine $\vec{p}$ i $\vec{F}$ nisu poznate.

Možemo pokušati i s obrnutim postupkom dokazivanja. Pretpostavimo da drugi Newtonov zakon uistinu vrijedi u svim inercijalnim sustavima, te se zapitajmo je li moguće iz tog uvjeta naći relativističke izraze za transformacije $\vec{p}$ i $\vec{F}$. Odgovor je niječan jer iz jedne jednadžbe koja predstavlja drugi Newtonov zakon nije moguće naći transformacije za dvije dinamičke veličine.

Potražimo neki drugi zakon mehanike iz kojega bismo mogli odrediti prvu dinamičku veličinu u re-

lativističkoj formi. U tu bi svrhu moglo biti pogodno razmatranje zakona o očuvanju količine gibanja u zatvorenom sustavu zato što taj zakon ne sadrži drugih dinamičkih veličina. Problem bi se tada sveo na utvrđivanje uvjeta koje mora zadovoljavati relativistička količina gibanja da bi zakon o očuvanju te veličine vrijedio u svim inercijalnim sustavima.

11.3.1 Relativistička količina gibanja

Da bismo došli do relativističkog izraza za količinu gibanja, razmotrimo sraz dviju jednakih kuglica viđen u dva inercijalna sustava. Neka u sustavu S sraz izgleda potpuno simetrično kako pokazuje slika 11.7a. Kuglice imaju jednake mase m, a brzine su im jednake po iznosu, ali suprotnih smjerova. Prije sraza, komponente brzine kuglice A označene su kao v_x i v_y, dok kuglica B ima komponente brzine $-v_x$ i $-v_y$. Parametri sraza na slici 11.7a postavljeni su tako da se dodir kugli ostvaruje kada su središta kugli na pravcu paralelnom s osi y, odnosno kada je tangencijalna ravnina paralelna s osi x. U tim uvjetima, kuglice zadržavaju svoje brzine duž osi x i nakon sraza, dok im komponente brzina duž osi y mijenjaju predznak.

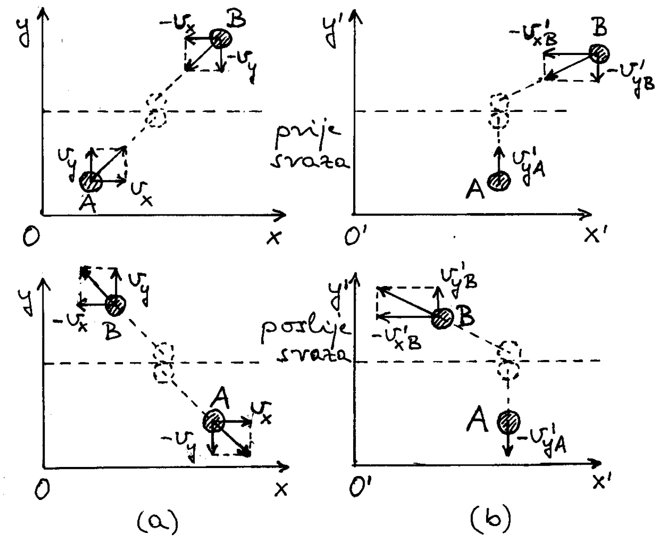
Ako preuzmemo definiciju količine gibanja iz Newtonove mehanike kao $\vec{p} = m\vec{v}$, možemo napisati zakon očuvanja za komponente količine gibanja duž osi y

$$\underbrace{m\,v_y + m\,(-v_y)}_{prije\ sraza} = \underbrace{m\,(-v_y) + m\,v_y}_{poslije\ sraza} \qquad (11.95)$$

Zbog simetrije problema, ovaj je zakon zadovoljen s Newtonovom definicijom količine gibanja.

Odaberimo sada sustav S' koji se u odnosu na sustav S giba brzinom V, koja je upravo jednaka komponenti v_x, tako da kuglica A ima samo komponentu brzine duž osi y'. Slika 11.7b prikazuje isti sraz viđen u sustavu S'. Primijenimo izraze za transformaciju brzine kuglice A prije sraza iz sustava S u sustav S' uz izbor $V = v_x$

$$v'_{xA} = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}\,v_x} = 0 \qquad (11.96)$$



Slika 11.7: (a) Elastičan sraz dviju jednakih kuglica viđen u sustavu S gdje su brzine kuglica postavljene simetrično. Gornja slika prikazuje stanje u nekom trenutku prije sraza, a donja slika se odnosi na neki trenutak nakon sraza. (b) Sustav S' je odabran tako da u njemu kuglica A ima gibanje isključivo duž osi y'. Zbog relativističkih transformacija, dvije kuglice nemaju jednake po iznosu brzine duž osi y'. Ipak, komponente količine gibanja duž osi y' moraju za obje kuglice biti jednake po iznosima da bi i u sustavu S' bio zadovoljen zakon očuvanja količine gibanja kao što je zadovoljen u sustavu S.

$$v'_{yA} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{V}{c^2}\,v_x\right)} = \frac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}}} \qquad (11.97)$$

Pritom smo i u relativističkom faktoru γ zamijenili V s v_x. Komponenta brzine v'_{xA} iščezava, dok je komponenta brzine v'_{yA} veća od v_y.

Izračunajmo sada i komponente brzine kuglice B prije sraza u sustavu S' uz izbor $V = v_x$

$$-v'_{xB} = \frac{-v_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}\,(-v_x)} = \frac{-2\,v_x}{1 + \dfrac{v_x^2}{c^2}} \qquad (11.98)$$

$$-v'_{yB} = \frac{-v_y}{\gamma\left[1 - \frac{V}{c^2}(-v_x)\right]} = \frac{-v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x^2}{c^2}} \tag{11.99}$$

Primjećujemo da je komponenta brzine v'_{yB} po iznosu manja od v_y.

Uspoređujući brzine kuglica u sustavu S' nalazimo

$$v'_{yA} > v'_{yB} \tag{11.100}$$

Kuglice nemaju jednake po iznosu brzine duž osi y', iako su bile jednake u sustavu S. To je važna posljedica relativističkih transformacija.

Nakon sraza, kuglica A mijenja brzinu $v_y \to -v_y$, pa bismo transformirajući novu brzinu u sustav S' dobili također $v'_{yA} \to -v'_{yA}$. Isto vrijedi i za kuglicu B, pa bismo nakon sraza dobili $v'_{yB} \to -v'_{yB}$. U pokušaju primjene zakona očuvanja količine gibanja u sustavu S', a uz Newtonovu definiciju količine gibanja, dobili bismo

$$\underbrace{m\,v'_{yA} + m\,(-v'_{yB})}_{prije\ sraza} \neq \underbrace{m\,(-v'_{yA}) + m\,v'_{yB}}_{poslije\ sraza} \tag{11.101}$$

gdje nejednakost nastupa uslijed uvjeta (11.100).

S ovim rezultatom stavljeni smo pred izbor između napuštanja zakona očuvanja količine gibanja kao neprihvatljivog u relativističkoj mehanici, ili pak napuštanja Newtonove definicije količine gibanja kao neodgovarajuće za potrebe relativističke mehanike. Kao oslonac u promišljanju, može nam poslužiti prethodno stečeno znanje o kinematičkim veličinama, pa i u razmatranju dinamičkih veličina postavimo zahtjev da kod malenih brzina relativističke veličine postaju približno jednake klasičnima. S tom idejom, odlučimo se zadržati zakon očuvanja količine gibanja i u relativističkoj mehanici, a definiciju relativističke količine gibanja postavimo u obliku

$$\vec{p} = \gamma_p(v)\,m\,\vec{v} \tag{11.102}$$

gdje je uveden neki faktor $\gamma_p(v)$, ovisan o brzini tijela, koji bi za malene brzine morao postati približno jednak jedinici, tj. $\gamma_p(v \ll c) \approx 1$. Razumije se, ovdje se radi o općoj definiciji količine gibanja smatrajući da tijelo promatramo u nekome referentnom sustavu u kojemu ono ima brzinu $\vec{v}$. Zbog izotropnosti prostora, nema razloga da bi faktor $\gamma_p(v)$ ovisio o smjeru brzine, nego samo samo o njenu iznosu $v = |\vec{v}|$.

Možemo sada zahtijevati da zakon očuvanja količine gibanja bude zadovoljen u slučaju sraza kuglica u sustavu S' na slici 11.7b, tj. da vrijedi

$$\begin{aligned}\gamma_p(v'_A)\,m\,v'_{yA} + \gamma_p(v'_B)\,m\,(-v'_{yB}) = \\ \gamma_p(v'_A)\,m\,(-v'_{yA}) + \gamma_p(v'_B)\,m\,v'_{yB}\end{aligned} \tag{11.103}$$

Nakon sređivanja dobivamo uvjet

$$\gamma_p(v'_A)\,m\,v'_{yA} = \gamma_p(v'_B)\,m\,v'_{yB} \tag{11.104}$$

Dakle, komponente količina gibanja duž osi y' za dvije kuglice moraju biti međusobno jednake. To je fizikalno jasan uvjet jer se jedino tada svaka kuglica odbije u srazu tako da komponenta količine gibanja duž osi y' zadrži isti iznos, ali promijeni predznak. Jednakost komponenti količine gibanja dviju kuglica može se postići jedino tako da faktor γ_p bude veći za onu kuglicu koja ima manju komponentu brzine duž osi y', te obrnuto za drugu kuglicu.

Možemo pokazati da zakon očuvanja količine gibanja vrijedi ukoliko se u općoj definiciji relativističke količine gibanja iz jednadžbe (11.102) postavi

$$\gamma_p(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.105}$$

Što je u nekom referentnom sustavu brzina tijela veća, to je i faktor $\gamma_p(v)$ veći.

Napomena: Faktor γ_p ima istu formu kao i relativistički faktor γ u Lorentzovim transformacijama. Ipak, među njima postoji bitna razlika. U faktoru γ nalazimo brzinu V kojom se jedan inercijalni sustav giba prema drugome, dok se u faktoru γ_p nalazi brzina tijela u nekom zadanom referentnom sustavu.

Usmjerimo se sada na dokaz uvjeta (11.104). Možemo ga napisati u obliku

$$\frac{v'_{yA}}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{yA}}{c^2}}} = \frac{v'_{yB}}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{xB}+v'^2_{yB}}{c^2}}} \tag{11.106}$$

Ovdje smo uvažili da se kuglica A giba samo duž osi y', dok kuglica B ima i komponentu brzine duž osi x', pa se u nazivniku uzima odgovarajući iznos ukupne brzine. U dokazu ćemo krenuti od izraza za kuglicu B, koji je složeniji, te pokazati da ga se nizom transformacija može svesti na izraz za kuglicu A koji je jednostavniji. Pritom se služimo ranije izvedenim transformacijskim izrazima (11.97)-(11.99)

$$\frac{v'_{yB}}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{xB}+v'^2_{yB}}{c^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{4v_x^2+v_y^2\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)^2}}}$$

$$= \frac{v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[4v_x^2+v_y^2\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)\right]}}$$

$$= \frac{v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1+2\,\frac{v_x^2}{c^2}+\frac{v_x^4}{c^4}-4\,\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_y^2}{c^2}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^2-\frac{v_y^2}{c^2}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_y^2}{c^2\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)}}}$$

$$= \frac{v'_{yA}}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{yA}}{c^2}}} \tag{11.107}$$

Dakle, dokazali smo jednakost (11.106), a time i ispravnost izraza za relativističku količinu gibanja (11.102) uz relativistički faktor γ_p u obliku (11.105).[1]

11.3.2 Drugi Newtonov zakon u relativističkoj mehanici

Nakon što smo utvrdili relativistički izraz za količinu gibanja, možemo se vratiti na pitanje o drugome Newtonovu zakonu. Nema više prepreke da bismo kao relativistički ispravan zakon prihvatili izvornu Newtonovu formulaciju

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt \tag{11.108}$$

U tom smo koraku prihvatili da sila $\vec{F}$ bude relativistička veličina. O njenim svojstvima transformacije iz jednog inercijalnog sustava u drugi bit će riječi kasnije.

Da bismo analizirali odnos sile i promjene brzine, zgodno je zapisati gornju jednadžbu u obliku

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{11.109}$$

Podrazumijeva se da tijelo promatramo u nekom referentnom sustavu, te da ono ima neku trenutnu brzinu $\vec{v}$ u tome sustavu, a na njega djeluje sila $\vec{F}$ koja mu nastoji promijeniti brzinu. Taj odnos možemo bolje analizirati ako vektore $\vec{F}$ i $\vec{v}$ rastavimo na komponente u danome sustavu $Oxyz$

[1] U starijim se udžbenicima navodio pojam *relativističke mase* kao $m(v) = \gamma_p\, m$ tako da se relativistička količina gibanja zapisivala u obliku $\vec{p} = m(v)\,\vec{v}$. U toj se formulaciji govorilo da je m *masa mirovanja*, te da porastom brzine tijela njegova masa $m(v)$ raste. U ovoj je knjizi prihvaćena formulacija koja prevladava u suvremenoj literaturi, a po njoj masa m ostaje *relativistička invarijanta*, tj. ne mijenja se s brzinom, odnosno ima istu vrijednost za dano tijelo ako ga se promatra iz bilo kojeg inercijalnog sustava. U tom slučaju, faktor γ_p se unosi u definiciju relativističke količine gibanja $\vec{p} = \gamma_p\, m\,\vec{v}$.

$$F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\left(v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}}}\right) \tag{11.110}$$

Vidimo da za komponentu sile duž osi x vrijedi

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}}}\right) \tag{11.111}$$

Zbog faktora γ_p koji mora stajati u relativističkoj količini gibanja, dobili smo da je komponenta sile F_x povezana ne samo s derivacijom od v_x po vremenu, nego i s derivacijama od v_y i v_z po vremenu. Analogno vrijedi i za komponente F_y i F_z. Dakle, relativistička sila koja je na ovaj način uvedena, razlikuje se uvelike od sile u klasičnoj (nerelativističkoj) fizici.

Čak i u jednostavnijem slučaju kada sila djeluje u smjeru brzine tijela, npr. oboje duž osi x, odnosi među veličinama nisu kao u klasičnoj mehanici. Možemo izračunati

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}\right) \\ &= m\,\frac{\dfrac{dv_x}{dt}\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}} + \dfrac{v_x^2}{c^2}\left(1-\dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{-1/2}\dfrac{dv_x}{dt}}{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}} \\ &= m\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,a_x \end{aligned} \tag{11.112}$$

Neka je sila F_x konstantna u vremenu. Za akceleraciju dobivamo

$$a_x = \frac{F_x}{m}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{11.113}$$

Samo u trenutku kada tijelo kreće iz mirovanja imamo akceleraciju $a_x = F_x/m$. Kako s vremenom brzina raste, smanjuje se akceleracija sukladno formuli (11.113). Brzina i dalje raste, ali sve sporije, iako je sila konstantna. Kada $v_x \to c$, imamo $a_x \to 0$, pa nema daljnjeg porasta brzine. To je izuzetno važan relativistički rezultat koji kaže da niti jedno tijelo ne može dosegnuti brzinu svjetlosti.

11.3.3 Relativistička energija

U klasičnoj smo mehanici uveli pojam rada kao djelovanja sile na nekom putu, te stvaranja veličine koju smo nazvali kinetičkom energijom tijela. Možemo sada ispitati što se događa s tim veličinama i odnosima među njima kada uvodimo relativističku mehaniku.

Silu i put smo već definirali kao relativističke veličine, pa možemo zadržati pojam rada sile i nastaviti s računanjem. Uzmimo jednostavan slučaj u kojemu tijelo krene iz stanja mirovanja pod utjecajem sile $\vec{F}$ koja djeluje duž osi x, tako da na putu dx rad sile iznosi

$$dW = F_x\,dx \tag{11.114}$$

Za silu F_x možemo iskoristiti prethodno izvedeni izraz (11.112), te ujedno preračunati

$$a_x\,dx = \frac{dv_x}{dt}\,v_x\,dt = v_x\,dv_x \tag{11.115}$$

Rezultat za infinitezimalni rad iznosi

$$dW = \frac{m\,v_x\,dv_x}{\left(1-\dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{11.116}$$

Možemo pokazati da je dobiveni izraz jednak diferencijalu jedne nove veličine

$$\begin{aligned} d\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}\right) &= \frac{m\,c^2\left[-\dfrac{1}{2}\left(-2\,\dfrac{v_x}{c^2\,dv_x}\right)\right]}{\left(1-\dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{m\,v_x\,dv_x}{\left(1-\dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{aligned} \tag{11.117}$$

Prema tome, infinitezimalni rad relativističke sile iznosi

$$dW = d\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}\right) \tag{11.118}$$

Ukupan rad koji sila izvrši u pokretanju tijela iz stanja mirovanja ($v_x = 0$), pa dok tijelo ne postigne neku brzinu $v_x \neq 0$, iznosi

$$W = \int_0^{v_x} dW = \int_0^{v_x} d\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} - m\,c^2 \qquad (11.119)$$

Potrebno je razmotriti interpretaciju dobivenog rezultata. U klasičnoj mehanici smo naučili da rad sile dovodi do promjene kinetičke energije tijela. Pritom se podrazumijevalo da je tijelo slobodno, odnosno da se ne nalazi u nekom potencijalnom polju. Ako je tijelo u početku mirovalo, njegova je kinetička energija bila jednaka ništici, a na kraju djelovanja sile tijelo je imalo neku kinetičku energiju. Ovdje smo utvrdili da se rad relativističke sile svodi na razliku dvaju članova od kojih prvi ovisi o konačnoj brzini tijela v_x, a drugi je konstanta neovisna o brzini tijela. Einstein je zaključio da i energija mora biti postavljena kao relativistička veličina, drugačija od klasične energije, te je načinio logičan izbor proglasivši prvi član u rezultatu (11.119) za *relativističku energiju*

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} \qquad (11.120)$$

Iz tog izraza logično slijedi da drugi član u rezultatu (11.119) odgovara *energiji mirovanja* ($v_x = 0$)

$$E_0 = m\,c^2 \qquad (11.121)$$

Ovo predstavlja glasoviti Einsteinov rezultat. Samim time što neko tijelo ima masu, ono ima i odgovarajuću energiju. Ekvivalentnost mase i energije potvrđena je kasnije u procesima nuklearne fisije i fuzije o kojima ne ćemo detaljnije govoriti u ovoj knjizi.

Jednadžbu (11.119) možemo sada interpretirati tako da razliku članova gledamo kao porast energije tijela koji je nastao uslijed rada sile, te samo taj porast smatramo kinetičkom energijom

$$E_K = E - E_0 = m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} - 1\right) \qquad (11.122)$$

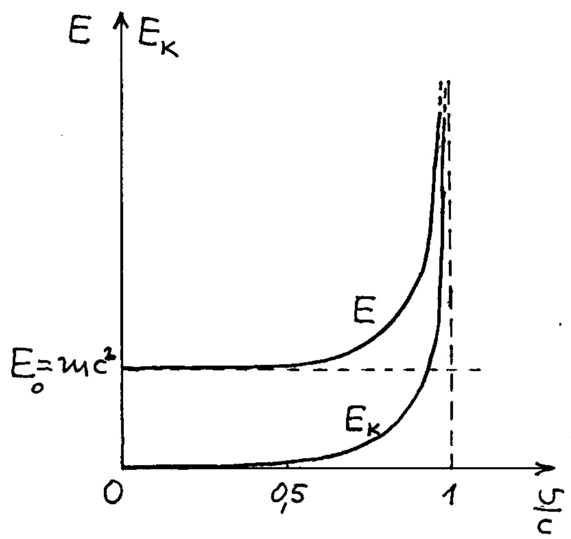
Za malene brzine tijela ($v_x \ll c$), vrijedi aproksimacija

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v_x^2}{c^2} \qquad (11.123)$$

Tada za kinetičku energiju dobivamo

$$E_K = m\,c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_x^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,m\,v_x^2 \qquad (11.124)$$

Dakle, relativistički izraz za kinetičku energiju postavljen u jednadžbi (11.122) ima ispravno ponašanje na niskim brzinama tijela, tj. svodi se na izraz za kinetičku energiju u nerelativističkoj (klasičnoj) mehanici.



Slika 11.8: Ovisnost ukupne relativističke energije E i kinetičke energije E_K o brzini v tijela (čestice) izraženoj relativno prema brzini svjetlosti c.

Kada brzina tijela raste prema brzini svjetlosti ($v_x \to c$), relativistička energija E postaje beskonačno velika, a isto se zbiva i s kinetičkom energijom E_K. Ti su odnosi zgodno prikazani na slici 11.8.

Napomena: U gornjem smo razmatranju rabili oznaku v_x za brzinu tijela kako bismo imali izravnu poveznicu s prethodnim izrazima za drugi Newtonov zakon. Razumije se, u svim tim izrazima možemo naprosto pisati oznaku v za brzinu jer se radi o gibanju po pravcu koji može imati bilo koji smjer, a u konačnici možemo os x postaviti upravo duž tog smjera.

11.3.4 Transformacija energije i količine gibanja

Vidjeli smo da je moguće uspješno uvesti količinu gibanja i energiju kao relativističke dinamičke veličine tako da se pomoću njih mogu izražavati neki zakoni mehanike koji su sukladni s postulatima posebne teorije relativnosti. Potrebno je još istražiti kako se te relativističke veličine transformiraju iz jednog inercijalnog sustava u drugi.

Da bismo ustanovili jednadžbe transformacije, analizirajmo iznova izraze za relativističku energiju i količinu gibanja tijela u nekom inercijalnom sustavu S

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{11.125}$$

Budući da obje veličine ovise o brzini tijela, a transformacije brzine iz jednog sustava u drugi su nam poznate, mogli bismo krenuti putem određivanja energije E' i količine gibanja $\vec{p}\,'$ u sustavu S'. No, bio bi to dugačak račun, a bilo bi potrebno i ponešto intuicije da se dođe do pravog rezultata za jednadžbe transformacije.

Razmotrimo alternativni put tako da još malo analiziramo gornje dvije relativističke veličine. Lako je uočiti da između njih postoji odnos

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\,\vec{v} \tag{11.126}$$

Možemo sada izvesti još jednu korisnu relaciju tako da kvadriramo gornji izraz za količinu gibanja

$$p^2 = \frac{E^2}{c^4}\,v^2 \tag{11.127}$$

Kvadrirajmo također i izraz za energiju

$$E^2 = \frac{m^2\,c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad E^2 - \frac{v^2}{c^2}\,E^2 = m^2\,c^4 \tag{11.128}$$

Ako dobiveni izraz podijelimo s c^2, te zatim u njega uvrstimo izraz iz jednadžbe (11.127), dobivamo važnu relativističku jednadžbu

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2\,c^2 \tag{11.129}$$

Budući da je $m^2\,c^2$ relativistička invarijanta, tj. predstavlja konstantu koja se ne mijenja kod transformacije iz jednog inercijalnog sustava S u drugi inercijalni sustav S', to je i izraz na lijevoj strani jednadžbe (11.129) također relativistička invarijanta. Moramo detaljnije razjasniti značenje ove tvrdnje. Relativistička energija i količina gibanja nisu zasebno relativističke invarijante, ali zbog jednadžbe (11.129) vrijedi

$$\underbrace{\left(\frac{E'}{c}\right)^2 - p'^2}_{u\ sustavu\ S'} = \underbrace{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2}_{u\ sustavu\ S} \tag{11.130}$$

Dakle, ako promatrač u sustavu S utvrdi da neko tijelo ima energiju E i količinu gibanja $\vec{p}$, onda će promatrač u sustavu S' utvrditi da isto tijelo ima energiju E' i količinu gibanja $\vec{p}\,'$ za koje vrijedi gornji uvjet.

Jednadžba (11.130) sama po sebi ne daje još uvijek postupak transformacije veličina iz jednog sustava u drugi. Naime, ako su zadane veličine E i $\vec{p}$ u sustavu S, ne možemo samo putem jednadžbe (11.130) izračunati veličine E' i $\vec{p}\,'$ u sustavu S'. Međutim, jednadžba (11.130) nas potiče da uspostavimo analogiju s Lorentzovim transformacijama za t i $\vec{r}$. Naime, uspoređujući ranije izvedene jednadžbe (11.34) i (11.35), možemo lako utvrditi da za te veličine vrijedi

$$\underbrace{c^2\,t'^2 - r'^2}_{u\ sustavu\ S'} = \underbrace{c^2\,t^2 - r^2}_{u\ sustavu\ S} \tag{11.131}$$

Jednadžbe (11.130) i (11.131) su po formi identične. Možemo reći da se samo radi o zamjeni simbola $\vec{r} \to \vec{p}$, te $c\,t \to E/c$ (odnosno $t \to E/c^2$). To znači da po analogiji s Lorentzovim transformacijama (11.30)-(11.33) možemo odmah napisati

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{V}{c^2} E \right) \tag{11.132}$$

$$p'_y = p_y \tag{11.133}$$

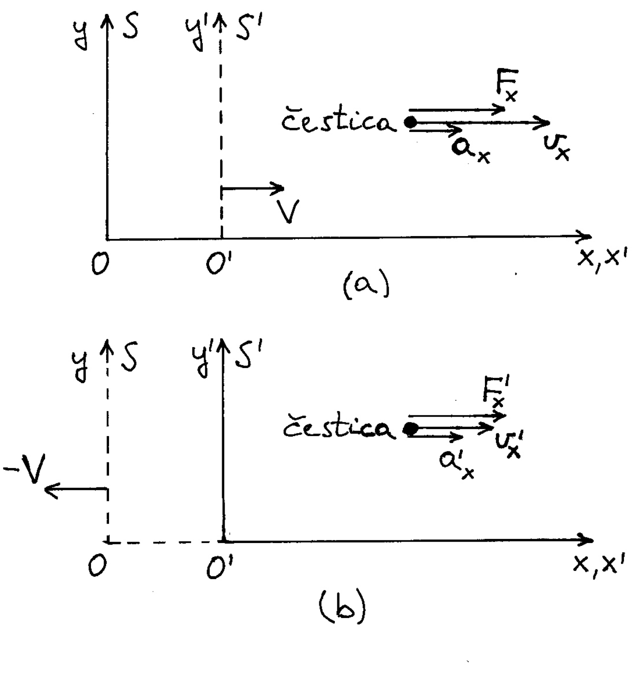
$$p'_z = p_z \tag{11.134}$$

$$E' = \gamma \, (E - V \, p_x) \tag{11.135}$$

Dobili smo relativističke jednadžbe transformacije energije i količine gibanja iz jednog inercijalnog sustava u drugi. Ako su nam poznate veličine E i $\vec{p}$ u sustavu S, onda putem ovih jednadžbi transformacija možemo izračunati E' i $\vec{p}\,'$ koje bi za isto tijelo opazio promatrač u sustavu S'.

11.3.5 Transformacija sile

Preostala nam je još relativistička sila kao dinamička veličina za koju je potrebno utvrditi jednadžbe transformacije iz jednog inercijalnog sustava u drugi. Razmotrimo najprije jednostavan slučaj prikazan na slici 11.9a. Čestica (tijelo) ima u sustavu S trenutnu brzinu v_x i na nju djeluje sila F_x tako da ima i trenutnu akceleraciju a_x. Već smo ranije analizirali takav slučaj i dobili rezultat u jednadžbi (11.112)



Slika 11.9: (a) U sustavu S čestica se giba duž osi x nekom trenutnom brzinom v_x. Na česticu djeluje sila također duž osi x, tako da ona ima trenutnu akceleraciju a_x. (b) Za promatrača u sustavu S' ista čestica ima trenutnu brzinu v'_x. Postojeće djelovanje na tu česticu očituje se kao sila F'_x, koja čestici daje akceleraciju a'_x.

$$F_x = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} \, m \, a_x \tag{11.136}$$

Možemo promatrati istu česticu u sustavu S' koji se giba brzinom V u odnosu na sustav S. Slika 11.9b prikazuje tu česticu u sustavu S', gdje ona ima brzinu v'_x. Ono isto djelovanje na česticu, koje se u sustavu S iskazivalo silom F_x, sada se iskazuje postojanjem neke sile F'_x, koja čestici daje akceleraciju a'_x. Transformacije za brzinu i akceleraciju su nam poznate, te se pitamo kako glasi transformacija za silu, tj. ako poznamo silu F_x, kako bismo izračunali silu F'_x.

Drugi Newtonov zakon u relativističkoj formi vrijedi u svim inercijalnim sustavima, te možemo po analogiji s jednadžbom (11.136) pisati u sustavu S'

$$F'_x = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{v_x'^2}{c^2}\right)^{3/2}} \, m \, a'_x \tag{11.137}$$

Poslužimo se izrazom za transformaciju brzine (11.65) da bismo izračunali

$$1 - \frac{v_x'^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \right)^2$$

$$= \frac{\left(1 - \dfrac{V}{c^2} v_x\right)^2 - \dfrac{1}{c^2} (v_x - V)^2}{\left(1 - \dfrac{V}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$= \frac{1 - 2 \dfrac{V}{c^2} v_x + \dfrac{V^2}{c^4} v_x^2 - \dfrac{v_x^2}{c^2} + 2 \dfrac{v_x V}{c^2} - \dfrac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{V}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right) - \dfrac{V^2}{c^2} \left(1 - \dfrac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{V}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^2}$$

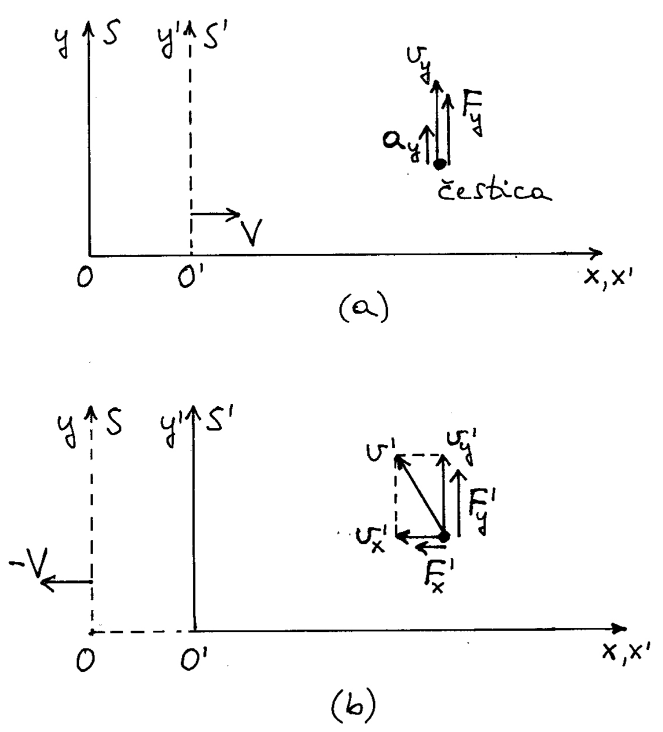
$$= \frac{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^2} \tag{11.138}$$

Ako uvrstimo ovaj rezultat u izraz za silu (11.137), te iskoristimo i izraz za transformaciju akceleracije (11.90), dobivamo

$$F'_x = \frac{\gamma^3 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^3}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, m\, \frac{1}{\gamma^3 \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)^3}\, a_x$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, m\, a_x = F_x \tag{11.139}$$

Pomalo iznenađujuće, nakon tako složenog računanja dobili smo rezultat kao i u nerelativističkoj Newtonovoj fizici. Promatrači u oba sustava opažaju istu po iznosu silu koja djeluje na česticu. Naglasimo još jednom da smo ovdje proveli dosljedno relativističko razmatranje. U sustavu S čestica ima trenutnu brzinu v_x i sila F_x joj daje trenutnu akceleraciju a_x, dok u sustavu S' ista čestica ima brzinu v'_x i sila F'_x joj daje trenutnu akceleraciju a'_x. U transformacijama smo pokazali da, iako čestica ima u dvama sustavima različite brzine ($v'_x \neq v_x$), te različite akceleracije ($a'_x \neq a_x$), ipak za sile vrijedi $F'_x = F_x$. Iako neočekivan, ovaj je rezultat ipak točan.



Slika 11.10: (a) U sustavu S čestica se giba duž osi y nekom trenutnom brzinom v_y. Na česticu djeluje sila također duž osi y, te joj daje trenutnu akceleraciju a_y. (b) Za promatrača u sustavu S' čestica ima trenutnu brzinu s komponentama v'_x i v'_y, odnosno ukupnom brzinom v'. Fizikalno djelovanje na česticu, koje se u sustavu S iskazuje silom F_y, vidi se u sustavu S' kao sila s dvjema komponentama F'_x i F'_y.

Razmotrimo sada drugi jednostavan slučaj koji je prikazan na slici 11.10a. Čestica se u sustavu S giba samo duž osi y, tj. ima neku trenutnu brzinu v_y. Ako na česticu djeluje sila F_y, koja također ima smjer kao trenutna brzina, čestica će imati neku akceleraciju a_y. Za gibanje duž pravca imamo drugi Newtonov zakon u relativističkoj formi

$$F_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, m\, a_y \tag{11.140}$$

Razmotrimo sada istu česticu sa stajališta promatrača u sustavu S' koji se giba brzinom V u odnosu na sustav S. Na slici 11.10b vidimo da ista čestica promatrana u sustavu S' ima komponente brzine koje je lako izračunati

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\, v_x} = -V \tag{11.141}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2}\, v_x\right)} = \frac{v_y}{\gamma} \tag{11.142}$$

Ovdje smo uzeli u obzir da je $v_x = 0$ u sustavu S. Rezultati se podudaraju s onima koje smo imali ranije u jednadžbama (11.76) i (11.77). Za ukupnu brzinu čestice u sustavu S' imamo

$$v'^2 = v'^2_x + v'^2_y = V^2 + v'^2_y \tag{11.143}$$

Količina gibanja čestice u sustavu S' ima također dvije komponente

$$p'_x = \frac{m\, v'_x}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{-m\, V}{\sqrt{1 - \frac{V^2 + v'^2_y}{c^2}}} \tag{11.144}$$

$$p'_y = \frac{m\, v'_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m\, v'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2 + v'^2_y}{c^2}}} \tag{11.145}$$

Varijabla u ovim izrazima je v'_y. Naime, sila F_y u sustavu S mijenja brzinu v_y, a time se i u sustavu S' mijenja brzina $v'_y = v_y/\gamma$ prema jednadžbi transformacije (11.142). Stoga se u vremenu mijenja i komponenta količine gibanja p'_x, iako se odgovarajuća komponenta brzine ne mijenja $v'_x = -V = konst$. Nadalje, prema drugome Newtonovu zakonu, ako postoji vremenska promjena p'_x, onda postoji i komponenta sile F'_x

$$\begin{aligned} F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left(\frac{-m\, V}{\sqrt{1 - \frac{V^2 + v'^2_y}{c^2}}} \right) \\ &= -m\, V \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{-2\, \frac{v'_y}{c^2}\, \frac{dv'_y}{dt'}}{\left(1 - \frac{V^2 + v'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}} \\ &= -m\, \frac{\frac{V}{c^2}\, v'_y}{\left(1 - \frac{V^2 + v'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}}\, a'_y \end{aligned} \tag{11.146}$$

U sustavu S postoji samo sila F_y, te očekujemo da je njenom transformacijom u sustav S' nastala komponenta F'_x. Da bismo došli do poveznice, izrazimo veličine na desnoj strani jednadžbe (11.146) pomoću veličina iz sustava S, tj. iskoristimo jednadžbu transformacije za v'_y iz (11.142) i ranije izvedenu jednadžbu transformacije za a'_y iz (11.142), koja se za ovaj slučaj ($v_x = 0$ i $a_x = 0$) svodi na $a'_y = a_y/\gamma^2$. Tako dobivamo

$$F'_x = -m\, \frac{\frac{V}{c^2}\, \frac{v_y}{\gamma}}{\left(1 - \frac{V^2 + \frac{v_y^2}{\gamma^2}}{c^2}\right)^{3/2}}\, \frac{1}{\gamma^2}\, a_y \tag{11.147}$$

Izraz u nazivniku možemo preinačiti

$$1 - \frac{V^2 + \frac{v_y^2}{\gamma^2}}{c^2} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{1}{\gamma^2}\, \frac{v_y^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right) \tag{11.148}$$

Uvrstimo li ovaj izraz u jednadžbu (11.147), dobivamo

$$F'_x = -m\, \frac{V}{c^2}\, \frac{v_y}{\gamma^3}\, \frac{1}{\frac{1}{\gamma^3} \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)^{3/2}}\, a_y \tag{11.149}$$

Ovdje možemo prepoznati članove koji odgovaraju sili F_y iz jednadžbe (11.140), tako da pišemo konačan rezultat

$$F'_x = -\frac{V}{c^2}\, v_y\, F_y \tag{11.150}$$

Dobili smo jednadžbu transformacije putem koje možemo izračunati komponentu sile F'_x u sustavu S' ukoliko nam je poznata sila F_y u sustavu S.

Korisno je analizirati rezultat koji smo upravo dobili. U posebnom slučaju kada se čestica u sustavu S upravo pokreće iz mirovanja, njena je trenutna brzina $v_y = 0$, pa nalazimo iz jednadžbe (11.150) da je $F'_x = 0$, tj. u tome trenutku nema sile duž osi x' u sustavu S'. Međutim, nakon što sila F_y u sustavu S pokrene česticu, tako da ona postigne neku trenutnu brzinu v_y, nužno u sustavu S' djeluje komponenta sile F'_x na istu česticu. Štoviše, kako raste brzina v_y u sustavu S, povećava se i komponenta sile F'_x u sustavu S'. Objašnjenje ove pojave moramo potražiti u prirodi relativističke količine gibanja koja raste s povećanjem brzine čestice. U ovome slučaju, komponenta brzine $v'_x = -V$ je konstantna, ali raste komponenta v'_y, pa time i ukupna brzina v'. No, kako raste ukupna količina gibanja čestice $\vec{p}'$, nužno raste i njena komponenta p'_x. U zaključku možemo

reći da je komponenta sile F'_x potrebna da bi se uredno povećavala komponenta količine gibanja p'_x, iako je brzina čestice duž osi x' pritom konstantna $v'_x = -V$. I ovdje smo suočeni s neobičnim posljedicama relativističke fizike.

Preostalo nam je još izračunati komponentu sile F'_y u sustavu S'. Prema drugome Newtonovu zakonu, imamo

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m\,v'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2+v'^2_y}{c^2}}}\right) \tag{11.151}$$

Nakon pažljivog računanja dobivamo izraz

$$F'_y = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{V^2+v'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}}\,m\,a'_y \tag{11.152}$$

Želimo sada komponentu sile F'_y iz sustava S' povezati sa silom F_y iz sustava S. U tu svrhu postupimo kao kod jednadžbe (11.146) i postavimo $v'_y = v_y/\gamma$, te $v'_y = v_y/\gamma^2$. Uočimo da u nazivniku jednadžbe (11.152) imamo isti izraz kao i u (11.146), tako da u daljnjem računanju možemo iskoristiti preinaku iz jednadžbe (11.148), te pisati

$$F'_y = \frac{1}{\gamma^2}\,\frac{\gamma^3}{\left(1-\frac{v_y^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,m\,\frac{1}{\gamma^2}\,a_y \tag{11.153}$$

Nakon sređivanja, možemo prepoznati izraz za F_y iz jednadžbe (11.140), tako da je konačan rezultat

$$F'_y = \frac{1}{\gamma}\,F_y \tag{11.154}$$

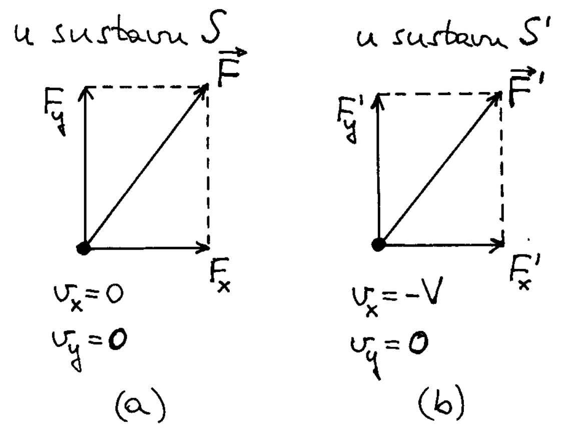
Budući da je uvijek $\gamma > 1$, komponenta sile F'_y u sustavu S' manja je od sile F_y u sustavu S.

Jednadžbe (11.150) i (11.154) predstavljaju transformaciju sile F_y iz sustava S u silu s komponentama F'_x i F'_y u sustavu S'. One vrijede za poseban slučaj kada se u sustavu S čestica giba duž osi y.

Napomena: Sila koja djeluje na neku česticu dolazi uvijek od nekog drugog tijela. To djelovanje je fizikalna realnost. U opisanome primjeru, promatrač u sustavu S opaža da se djelovanje na promatranu čestici odvija u smjeru osi y, tj. kao sila F_y. Za promatrača u sustavu S', to isto djelovanje ima oblik sile s komponentama F'_x i F'_y.

Mogli bismo razmatrati općenit slučaj u kojemu na česticu, koja se u sustavu S giba u proizvoljnom smjeru s trenutnim komponentama brzine v_x i v_y, djeluje sila u nekom drugom proizvoljnom smjeru tako da su njene komponente F_x i F_y. Problem je matematički složen i dugotrajan, te ga ne ćemo ovdje izvoditi. Bitne karakteristike relativističke sile već su iskazane u prethodnim primjerima.

Završimo ovo izlaganje osvrtom na posebno jednostavan slučaj u kojemu se čestica u sustavu S upravo pokreće iz stanja mirovanja ($v_x = 0$ i $v_y = 0$) pod utjecajem sile koja djeluje u proizvoljnom smjeru, tj. ima komponente F_x i F_y (slika 11.11a).



Slika 11.11: (a) U sustavu S čestica se pokreće iz trenutnog stanja mirovanja djelovanjem neke sile $\vec{F}$, koja općenito ima komponente F_x i F_y. (b) U sustavu S', koji se giba brzinom V u odnosu na sustav S, čestica se giba trenutnom brzinom $-V$. Isto fizikalno djelovanje se očituje u sustavu S' kao sila $\vec{F}'$ s komponentama $F'_x = F_x$ i $F'_y = F_y/\gamma$.

Sukladno prethodno obrađenim primjerima, mogli bismo transformirati komponente F_x i F_y kao zasebne sile. Naime, zbog $v_y = 0$ možemo silu F_x transformirati kao da se radi o gibanju duž osi x, pa je $F'_x = F_x$. S druge strane, zbog $v_x = 0$ možemo primijeniti pravila za gibanje duž osi y. No, kako je u tome trenutku $v_y = 0$, jednadžba (11.150) ukazuje da sila F_y ne doprinosi komponenti F'_x. Ona

doprinosi samo komponenti F'_y prema jednadžbi (11.154). Dakle, ako su nam poznate komponente sile F_x i F_y u sustavu S, možemo izračunati komponente F'_x i F'_y u sustavu S' pomoću jednadžbi transformacije

$$F'_x = F_x \tag{11.155}$$

$$F'_y = \frac{1}{\gamma} F_y \tag{11.156}$$

Komponente sile u sustavu S' prikazane su na slici 11.11b. U sustavu S' u kojemu čestica ima trenutnu brzinu $v_x = -V$, komponenta F'_y je manja od F_y u sustavu u kojemu čestica trenutno miruje. Ove će nam jednadžbe transformacije biti od velike koristi u relativističkim izvodima u elektrodinamici koja će biti predmet druge knjige.